Algebra - Bréfaskóli

Janúar 2023

Inngangur

Algebra getur táknað marga hluti í stærðfræði en hún snýst að mestu leyti um dæmi sem hafa breytur, í öðrum orðum innihalda óþekktar stærðir sem eru táknaðar með staf. Algebru dæmin sem við skoðum hér fyrir neðan eru jöfnuhneppi, margliður, ójöfnur og fallajöfnur en ætlum að einbeita okkur á efni sem þið hafið ekki séð áður í menntaskóla. Ef þið viljið læra meira um margliður, ójöfnur eða fallajöfnur þá er lesefni inni á https://stae.is/stak/útgáfa-bók og https://stae.is/stak/fróðleikur.
Það eru dæmi í hverjum kafla, þau eru í erfiðleikaröð og ábendingar við þeim má finna neðst í þessu skjali. Það eiga vera dæmi fyrir alla, erfiðleikastigið fer frá gömlum úrslitakeppnum til Ólympíuleikanna í stærðfræði.

Þáttun

Oft í dæmum kemur fyrir að við þurfum að þátta tölur eða margliður og stundum getur verið erfitt að finna þáttuninna, eins og fyrir $x^5 + x^4 + 1 = (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ eða $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$. Þessar þáttanir krefjast mikillar innsýnis og getur oft verið erfitt að finna þær. En hér eru nokkrar þáttunar reglur:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1}),\text{ ef n er oddatala}$$
$$a^{2^n} - b^{2^n} = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \cdots (a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}})$$

Með þessum reglum er hægt að sjá að

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \quad a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \quad a^8-b^8 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$$

Förum nú yfir nokkur sýnidæmi þar sem er hægt að nota þáttun.

Sýnidæmi: Finna á allar jákvæðar heiltölur a og b þannig að $ab + 2a + 2b = 11$.

Lausn: Umritum jöfnunna yfir í $ab + 2a + 2b + 4 = 11 + 4$, og þáttum hana þannig að $(a + 2)(b + 2) = 15$. Skoðum nú fjölda vega til að þátta $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$. Því koma aðeins nokkrir möguleikar til greina fyrir stærðirnar $a + 2$ og $b + 2$ þar sem þær eru heilartölur sem ganga upp í 15.
Athugum ef annaðhvort $a + 2 = 1$ eða $b + 2 = 1$, þá verða gildin á a og b bæði neikvæð sem við viljum ekki, þannig að $a + 2 \neq 1$ og $b + 2 \neq 1$. Þá getur einungis tvennt gilt:

$$a + 2 = 3 \text{ og } b + 2 = 5 \;\text{ eða }\; a + 2 = 5 \text{ og } b + 2 = 3.$$

Það er annaðhvort er $\underline{a = 1 \text{ og } b = 3}$ eða $\underline{a = 3 \text{ og } b = 1.}$

Dæmi 1: (Lokakeppni) Finnið fjóra frumþætti tölunnar $3^{32}-2^{32}$ sem eru lægri en 100

Dæmi 2: Gefið er að $a + b + c = 0$, sýnið að

$$abc = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

Dæmi 3: (Lokakeppni) Finnið öll pör af rauntölum (p, r) þannig að

$$\begin{cases} p + pr + pr^2 = 28 \\ p^2r + p^2r^2 + p^2r^3 = 216 \end{cases}$$

Dæmi 4: Finnið allar jákvæðar heiltölur a og b þannig að

$$4ab + 6a + 6b = 26$$

Dæmi 5: Þáttið $x^4 + 1$ í 2 margliður með rauntölustuðla.

Dæmi 6: (Lokakeppni) Finnið öll pör af heiltölum (a, b), ekki neikvæðum, sem uppfylla

$$2^a3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13$$

með þáttun.

Dæmi 7: (Lokakeppni) Finnið allar heiltölur a og b þannig að

$$(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4.$$

Margliður

Fall af gerðinni $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ með $a_n \neq 0$ kallast margliðufall af stigi n með eina breytu. Stig P er táknað með $deg(P) = n$ vegna enska orðsins *degree* og er ótvírætt ákvarðað. Hér á eftir köllum við margliðufall margliðu. Þá eru tölurnar $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ kallaðar stuðlar margliðunnar, þeir eru ótvírætt ákvarðaðir og eru oftast í $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ eða $\mathbb{N}$.
Dæmi um margliður eru $x^2 + 5x + 1$ og $5y^4 - 3y^2 + 7$ en einnig eru til margliður sem fall af fleiri breytum, eins og $x^3 + y^3$ og $xy^2 + x - y$. Dæmi um föll sem eru ekki margliður eru $\frac{1}{x} + 3 - 5x$ og $\sqrt{y} + 7y$.

Þáttun margliða

Við fórum aðeins yfir þáttun áðan en hér koma nokkrir eiginleikar margliða sem geta hjálpað okkur að þátta þær. Ef margliða $P(x)$ hefur rót r, stundum kallað núllstöð. Þá vitum við að $P(r) = 0$ og er það jafngilt því að $(x - r)|P(x)$, það er að segja að þátta megi $x - r$ út úr $P(x)$.

Sýnidæmi: Þátta á $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Lausn: Athugum að til að þátta $P(x)$ nægir að finna rætur hennar. Skoðum því hvaða gildi margliðan $P(x)$ tekur ef við setjum $x = 1, x = 2$ eða $x = 3$. Við veljum oftast lág gildi fyrir x sem er auðvelt að prófa og notum oft hugarreikning fyrir það. Oft eru líka valdar neikvæðar heiltölur sem gildi. Þá fæst að:

$$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 = 1 + 3 - 4 - 12 = -12 \neq 0$$
$$P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 8 + 3 \cdot 4 - 8 - 12 = 0$$

Nú er $x = 2$ rót í $P(x)$ og þá er óþarfi að skoða $P(3)$ því við kunnum að þátta annars stigs jöfnur. Þá fæst að

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2)(x^2 + 5x + 6) = (x - 2)(x + 2)(x + 3).$$

Hér eru nokkrar reglur um stig margliða sem hjálpa til með næstu dæmi. Þær verða ekki sannaðar en það er góð æfing fyrir lesanda.

Um allar margliður P og Q gildir að

- $deg(P + Q) \leq max(deg(P), deg(Q))$.
- $deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q)$, ef $P(x) \neq 0$ og $Q(x) \neq 0$.
- $deg(P(Q)) = deg(P) \cdot deg(Q)$

Sýnidæmi: Finna á allar margliður $P(x)$ þannig að

$$P(P(x)) = P(x) \quad (*)$$

Lausn: Athugum að $P(x) = 0$ (núllmargliðan) er augljós lausn. Skoðum stigin á margliðunni P með að nota reglurnar hér fyrir ofan. Þá fæst að

$$\begin{aligned} deg(P(P)) = (deg(P))^2 \text{ og } deg(P(P)) &= deg(P) \\ \Leftrightarrow (deg(P))^2 &= deg(P) \\ \Leftrightarrow deg(P) \cdot (deg(P) - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Þá er stig P annaðhvort 0 eða 1.
Ef stig P er 0, þá má rita $P(x) = k$ þar sem $k \in \mathbb{R}$ og þá gildir að

$$P(x) = k = P(k) = P(P(x))$$

fyrir öll $k \in \mathbb{R}$, þannig að $P(x) = k$ er lausn.
Ef stig P er 1, þá má rita $P(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ og þá fæst með að nota upprunalega jöfnunna að

$$ax + b = P(x) = P(P(x)) = P(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b).$$

Þá höfum við jöfnuhneppið

$$\begin{cases} a = a^2 \overset{a \neq 0}{\Longleftrightarrow} a = 1 \\ b = ab + b \Leftrightarrow ab = 0 \overset{a \neq 0}{\Longleftrightarrow} b = 0 \end{cases}$$

sem gefur þá að $P(x) = x$ er eina lausnin með stig 1.

Þá höfum við sýnt að lausnirnar eru $P(x) = x$ eða $P(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

Vieta formúlurnar

Vieta formúlurnar eru formúlur sem lýsa stuðlum margliðu með rótum hennar. Hér munum við skoða þær fyrir annars stigs margliðu en þær eru til fyrir hvaða stig sem er. Aðferðin fyrir hinar formúlurnar eru svipaðar.

Látum $P(x) = x^2 + a_1x + a_0$ með rætur r_1 og r_2. Þá má rita

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2.$$

Þá fæst að

$$a_1 = -(r_1 + r_2) \text{ og } a_2 = r_1r_2$$

Það er hægt að gera eins formúlur fyrir margliðu með stig 3 og 4. Svo verður það aðeins flóknara fyrir hærra stig en dæmin sem koma á keppnum eru oftast með margliður með stig lægra en 5. Mælum með að skoða þetta nánar sjálf.

Dæmi 8: Finnið margliðuna P sem uppfyllir $P(P(x)) = P(x^2)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Dæmi 9: Finnið margliðuna P sem uppfyllir $P(P(x)) = (P(x))^{10}$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Dæmi 10: (Lokakeppni) Gefið er að margliðan

$$P(x) = 30x^4 + 17x^3 - 137x^2 + 13x + 60$$

hefur núllstöðvar (rætur) $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$.

Hvert er gildi margfeldisins $(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4)$?

Ójöfnur

Ójöfnur koma mikið fram í algebru í keppnisstærðfræði og í þeim dæmum þarf að nota reglur sem eru ekki kenndar í menntaskóla. Því er þetta efni líklegast nýtt fyrir flestum og er gott að reyna að æfa sig á dæmunum hér til að muna reglurnar betur. Ein ójafna sem er mikið notuð og þið þekkið mögulega er að $x^2 \geq 0$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.
Ef sýna á að $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ gildi fyrir allar jákvæðar rauntölur a og b þá notum við að

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

Við megum hefja í annað veldi fyrir ofan þar sem báðar hliðar eru jákvæðar og þar sem síðasta ójafnan er sönn fyrir allar rauntölur a og b, þá er einnig upphaflega ójafnan sönn.
Ójöfnu dæmi eru oft leyst á sama hátt og hér fyrir ofan. Það er að umrita ójöfnunna á einhvern veg þangað til hægt er að nota þekkta ójöfnu sem sýnir þá að upprunalega ójafnan sé sönn en að gera þetta getur verið erfitt.

Ójafnan sem við sönnuðum hér fyrir ofan $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ er ein af þessum vel þekktum ójöfnum og er vinsælast ójafnan í stóru keppnunum, hún er oft kölluð AM-GM því hún tengir saman venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal (e. arithmetic mean and geometric mean).
Hún er stundum eina ójafnan sem maður þarf til að leysa dæmin, en einnig er hægt að leysa dæmin á annan hátt með öðrum ójöfnum. Hér er almenna ójafnan.

AM-GM ójafnan:

Um allar rauntölur $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \geq 0$, þar sem n er fjöldi talna gildir að

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n}$$

og jafnaðarmerkið gildir einungis ef $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$.

Athugum að ef við látum $n = 2$, $x_1 = a$ og $x_2 = b$, þá fæst ójafnan sem við sönnuðum að ofan. Skoðum nokkur dæmi sem nota þessa ójöfnu.

Sýnidæmi: Sýna á að $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ef $x \in \mathbb{R}_+$.

<u>Lausn:</u> Notum AM-GM þar sem breyturnar okkar eru $x > 0$ og $\frac{1}{x} > 0$. Þá fæst ójafnan $\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$. Það er $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
Gott er að athuga að hægt væri að leysa þetta dæmi á annan hátt með að margfalda í gegnum ójöfnunna með x og fá $x^2 + 1 \geq 2x$, sem gefur $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$. En þessi leið verður mjög erfið og létt að gera klaufavillur þegar það eru komnar margar óþekktar stærðir inni í spilið eins og í næsta dæmi hér fyrir neðan. Þá er fyrri aðferðin einfaldari og betri. Önnur æfing er að finna lægsta gildi $x^2 + \frac{2}{x}$.

Sýnidæmi: Sýna á að $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$, ef $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

<u>Lausn:</u> Beitum AM-GM með breyturnar $\frac{x}{y} > 0$, $\frac{y}{z} > 0$ og $\frac{z}{x} > 0$. Þá fæst ójafnan:

$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}} = 1$$

Margföldum í gegn með 3 og þá fæst upprunalega ójafnan.

Sýnidæmi: Sýnið að
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$
Lausn: Nú er erfitt að beita AM-GM beint þar sem hægri hliðin er summa liða og ekki margfeldi. Beitum AM-GM á eftirfarandi:

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$
$$b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{b^2c^2} = 2bc$$
$$a^2 + c^2 \geq 2\sqrt{a^2c^2} = 2ac$$

Leggjum þessar ójöfnur saman og deilum með 2 og þá fæst upprunalega ójafnan

Sýnidæmi: Látum $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ með $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Sýna á að
$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) \geq 2^n.$$
Lausn: AM-GM gefur að
$$a_1 + 1 \geq 2\sqrt{a_1}$$
$$a_2 + 1 \geq 2\sqrt{a_2}$$
$$...$$
$$a_n + 1 \geq 2\sqrt{a_n}$$
Þá fæst ef ójöfnurnar eru margfaldaðar saman að
$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) \geq (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2}) \cdots (2\sqrt{a_n}) = 2^n.$$

Næst ætlum við að skoða tvær aðrar mikilvægar ójöfnur, sem eru hins vegar erfiðari að skilja og henta betur fyrir lengra komna. Þessar ójöfnur koma fyrir í mörgum dæmum og eiga að duga í flest dæmi.

Ójafna Cauchy-Schwarz

Um allar rauntölur $x_1, x_2, ..., x_n$ og $y_1, y_2, ..., y_n$ gildir að
$$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$$
og jafnaðarmerkið gildir ef og aðeins ef $x_1 = cy_1, \;\; x_2 = cy_2, \;\; ..., \;\; x_n = cy_n$ fyrir einhverja tölu $c \in \mathbb{R}$.

Ef við lítum á $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ og $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sem vigra með n hnit, þá segir ójafna Cauchy-Schwarz að
$$|x \cdot y| \leq |x||y|,$$
með jöfnuði ef og aðeins ef til er c þannig að x = cy.

Innfeldi tveggja vigra er minna en eða jafnt margfeldi lengdanna, og jafnaðarmerkið gildir þá og því aðeins að x og y séu samsíða. Þannig er auðveldara að muna regluna, enda er $x \cdot y = |x||y|\cos(\theta)$ þar sem θ er hornið á milli vigranna.

Sýnidæmi: Finna á stærsta gildi á $2x + 2y + z$ ef gefið er að $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Lausn: Notum ójöfnu Cauchy-Schwarz og fáum að
$$\begin{aligned} & (2x + 2y + z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 2^2 + 1^2) \\ \Leftrightarrow \;\; & (2x + 2y + z)^2 \leq 4(9) \\ \Leftrightarrow \;\; & (2x + 2y + z) \leq \sqrt{36} = 6. \end{aligned}$$
Jafnaðarmerkið gildir ef $x = 2c, y = 2c$ og $z = c$, og finna má c með $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Stundum nægir ekki ein ójafna til að leysa dæmið, eins og í næsta dæmi. Þar notum við bæði AM-GM ójöfnunna og Cauchy-Scwarz ójöfnunna.

Sýnidæmi: (IMO 1995) Látum $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, þannig að $abc = 1$. Sýna á að

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lausn: Viljum fyrst umbreyta jöfnunni yfir í eitthvað sem er þægilegra að vinna með. Setjum $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$ og $z = \frac{1}{c}$, með $xyz = \frac{1}{abc} = 1$, í ójöfnunna og fáum að

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{x^3}{xyz(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})} + \frac{y^3}{xyz(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})} + \frac{z^3}{xyz(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})} \\ &= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\end{aligned}$$

Nú notum við Cauchy-Schwarz og fáum að

$$((y+z)+(x+z)+(x+y))\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2.$$

Deilum með $(y+z)+(x+z)+(x+y) = 2(x+y+z)$ og þá fæst

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Nú gefur AM-GM að

$$\frac{1}{2}(x+y+z) \geq \frac{1}{2}(3 \cdot \sqrt[3]{xyz}) = \frac{3}{2}$$

Þar með höfum við sýnt að upprunalega ójafnan gildir.

Áður en við skoðum næstu ójöfnu þurfum við að skoða kúpni. Kúpni er eiginleiki ákveðna falla og gildir ójafnan einungis um föll sem eru kúpt, sumir skilgreina einnig kúpt föll með ójöfnunni sjálfri.
Við segjum að fall f sé kúpt á bili $[a, b]$ ef fallið tvídiffrað (f'') er alltaf jákvætt á sama bili. Einnig eru kúpt föll þannig að þegar graf þeirra er teiknað með vaxandi x-gildi þá sveigir fallið alltaf til vinstri, þ.e. grafið er í vinstri beygju. Dæmi um kúpt fall er $f(x) = x^2$

Svo eru til gröf sem eru íhvolft og eru eiginlega öfugt við kúpt föll, þ.e.a.s. fall f er íhvolft ef $-f$ er kúpt. Þá er $f''(x) < 0$ og graf fallsins er alltaf í hægri beygju.

Ójafna Jensen

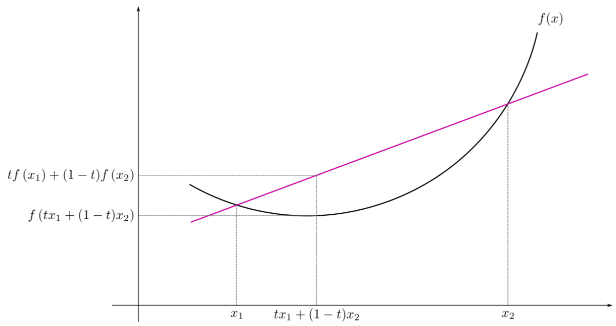
Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera kúpt fall. Þá gildir um alla punkta x_1, x_2 úr $[a, b]$ og allar tölur $t \in [0, 1]$ að

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Ef fall f er íhvolft þá gildir ójafnan nema með ójöfnumerkið snúið við

Hægt er að túlka ójöfnunni þannig að ef maður hefur graf af kúpni falli og maður velur einhverja tvo punkta á grafinu, þá mun strikið á milli þessa tveggja punkta alltaf vera fyrir ofan grafið af fallinu sem má sjá á mynd hér fyrir neðan.

Ef fallið væri íhvolft lendir strikið fyrir neðan fallið.



Þessi ójafna er ekki eins skiljanleg og hinar fyrir flestum ykkar þar sem þið hafið lítið séð föll og eiginleika þeirra en það er hægt að fræðast nánar um það á netinu.

Sýnidæmi: (IMO 2001, smá breytt) Látum a, b, c vera jákvæðar heilatölur þ.a. $a+b+c = 1$. Sýna á að

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

<u>Lausn:</u> Setjum $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ og athugum að $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} > 0$ ef $x > 0$. Þá er f kúpt, beitum því ójöfnu Jensen (vigtuðu ójöfnu Jensen) og fáum að

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} &= af(a^2+8bc) + bf(b^2+8ac) + cf(c^2+8ab) \\
&\geq f(a(a^2+8bc) + b(b^2+8ac) + c(c^2+8ab)) \\
&= f(a^3+b^3+c^3+24abc) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}.
\end{aligned}$$

En nú gefur AM-GM að

$$\begin{aligned}
1 = 1^3 = (a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+6abc+3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2) \\
&\geq a^3+b^3+c^3+6abc+3\cdot 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} \\
&= a^3+b^3+c^3+24abc
\end{aligned}$$

Þá fæst að lokum að

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}} \geq 1$$

Í einhverjum dæmum þarf að nota vigtaða útgáfu af ójöfnum eins og við gerðum hér fyrir ofan. Þær eru almennari og er hægt að nota í fleiri dæmum. Það er til vigtuð útgáfa af AM-GM og Jensen sem við hvetjum áhugasama að kynna sér.

Dæmi 11: Látum $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$. Sýnið að

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Dæmi 12: Látum $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ með $abc = 1$. Sýnið að

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$$

Dæmi 13: Látum $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ með $abc = 1$. Sýnið að

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

Dæmi 14: Látum $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Sýnið að

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$$

Dæmi 15: Sýnið að fyrir sérhvern þríhyrning ΔABC gildi eftirfarandi:

a) $sin(A) + sin(B) + sin(C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $cos(A)cos(B)cos(C) \leq \frac{1}{8}$.

Dæmi 16: Látum $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ með $a + b + c = 3$. Sýnið að

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac \geq 6$$

Dæmi 17: (IMO) Látum $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ með $a + b + c + d = 1$. Sýnið að

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

Fallajöfnur

Hér verður farið yfir nokkrar einfaldar fallajöfnur.
Fall er vörpun (regla) frá einu mengi X til annars Y, þ.e.a.s. fall f tekur x stak úr X og skilar einhverju staki $f(x)$ í Y. Fallið f(x) = x + 2, tekur stak x og skilar út staki x + 2. Fallajafna er í raun jafna sem inniheldur föllin og breyturnar sem fallið tekur inn, og finna á öll föll sem uppfylla jöfnunna. Dæmi um fallajöfnu er:

Finna á öll föll $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ þ.a.

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3. \tag{1}$$

Til að leysa hana þá reynir maður að finna einhverja sniðuga innsetningu fyrir x sem gefur einhverja aðra jöfnu og sú jafna hefur alltaf sömu lausn og upprunalega jafnan. Þá erum við komin með jöfnuhneppi. Það er ef við setjum $x \to \frac{1}{x}$ inn í (1) þá fæst jafnan

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x^3} \tag{2}$$

Nú höfum við jöfnuhneppi með 2 jöfnum og getum leyst fyrir $f(x)$ með að taka $\underline{2 \cdot (1) - (2) :}$

$$2x^3 - \frac{1}{x^3} = 2\left(2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)\right) = 3f(x)$$

Svo lausnin er því $f(x) = \frac{1}{3}\left(2x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = \frac{2x^6-1}{3x^3}$. Nú erum við ekki alveg búin með dæmið, í svona dæmum þarf alltaf að sýna að fallið sem við fengum sé lausn, þannig að við þurfum að prófa að setja $f(x) = \frac{2x^6-1}{3x^3}$ í upprunalegu jöfnunna (1). Þá fæst

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\left(2x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(2\frac{1}{x^3} - x^3\right) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{3}x^3 = x^3$$

sem er eins og upprunalega jafnan í (1) og því er $\underline{f(x) = \frac{2x^6-1}{3x^3}}$ lausn.

Sýnidæmi: (Lokakeppnin 2009-2010) Finna á öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem uppfylla

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

<u>Lausn:</u> Nú viljum við setja inn einhverja innsetningu sem býr til jöfnu sem inniheldur $f(x)$. Þar sem jafnan hefur einungis 2 liði sem innihalda f, þ.e. $f(x)$ og $f(1-x)$, þá viljum við breyta seinni liðnum $f(1-x)$ yfir í $f(x)$ með öðrum orðum viljum við að $1-x \to x$, það er jafngilt að $x \to 1-x$ og þá fæst jafnan:

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 1-x$$

Þá fæst með sömu aðferð fyrir ofan að:

$$\frac{1}{x}(f(x) + xf(1-x)) - (f(1-x) + (1-x)f(x)) = \frac{1}{x} \cdot x - (1-x)$$
$$\left(\frac{1}{x} - 1 + x\right)f(x) = x$$
$$f(x) = \frac{x}{\frac{1}{x} - 1 + x} = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$$

Prófum lausninna okkar og fáum að

$$\begin{aligned} f(x)+xf(1-x) &= \frac{x^2}{x^2-x+1} + x\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2-(1-x)+1} \\ &= \frac{x^2}{x^2-x+1} + x\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-x+1} \\ &= \frac{x^3-x^2+x}{x^2-x+1} \\ &= x \end{aligned}$$

sem passar og því er lausnin $\underline{f(x)=\frac{x^2}{x^2-x+1}}$.

Einnig eru sumar fallajöfnur með 2 breytur og skulum við skoða eina slíka:

Sýnidæmi: (Forkeppnin 2022-23) Finna á öll föll $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ þannig að

$$f(x+f(y)) = x^2 + 2xf(y) + f(y^2).$$

Lausn: Látum $x \to -f(y)$. Þá verður fallajafnan

$$f(0) = (f(y))^2 - 2(f(y))^2 + f(y^2) = f(y^2) - f(y)^2$$

Setjum $y \to 0$ og fáum $f(0) = f(0) - f(0)^2$ sem gefur $f(0) = 0$. Stingum $y \to 0$ í upphaflegu jöfnuna og fáum beint að $f(x) = x^2$.

Prófum nú lausnina og sjáum að

$$(x+y^2)^2 = f(x+f(y)) = x^2+2xf(y)+f(y^2) = x^2+2xy^2+y^4 = x^2+2xy^2+(y^2)^2$$

sem gildir alltaf, svo $f(x) = x^2$ er lausn.

Dæmi 18: Finnið öll föll $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ þannig að

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Dæmi 19: Finnið öll föll $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ þannig að

$$f(x^2+zf(y)) = xf(x) + zf(y).$$

Dæmi 20: Finnið öll föll $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ þannig að $f(4) = 10$ og

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

Dæmi 21: (Lokakeppni) Finnið öll föll $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ þannig að $f(1) = 2$ og

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

Dæmi 22: (IMO) Finnið öll föll $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ þannig að, fyrir öll $a, b \in \mathbb{Z}$ gildir

$$f(2b) + f(a) = f(f(a+b)).$$

Ábendingar fyrir dæmin

Hér eru ábendingar fyrir einhver af dæmunum í hverjum kafla:

Dæmi 1: Notið þáttunarreglu nr. 3

Dæmi 2: Skoðið $(a+b+c)^3$

Dæmi 3: Þáttið neðri jöfnunna og deilið svo neðri jöfnunni með efri

Dæmi 4: Bætið við 9 báðum megin og þáttið

Dæmi 5: Bætið við $2x^2 - 2x^2$, notið svo ferningsreglu og eftir það samokareglu

Dæmi 6: Þáttið 3^b út úr fyrri 2 liðunum og dragið svo 3 frá báðum hliðum

Dæmi 7: Reikna upp úr sviganum, stytta út þekkt gildi og þátta svo

Dæmi 8: Gerið eins og sýnidæmið með að skoða stig P

Dæmi 9: Skoða stig P

Dæmi 10: Skoða $P(x) = A(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$

Dæmi 11: Nota ójöfnu Cauchy-Schwarz

Dæmi 12:

Dæmi 13: Nota $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} \geq \dfrac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$

Dæmi 14: Nota $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$

Dæmi 15: Nota ójöfnu Jensen

Dæmi 16:

Dæmi 17: Hér þarf að nota vigtuðu AM-GM sem hægt er að finna á netinu

Dæmi 18: Setja $x \to \dfrac{1}{1-x}$ og fá aðra jöfnu, setja svo aftur sömu innsetningu í seinni jöfnunna

Dæmi 19: Setja $y \to 0$ og $z \to 0$ og fá jöfnu, og svo setja $x = y = z$ í upprunalegu jöfnunna

Dæmi 20: Sanna að $f(n) = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ þar sem $n \in \mathbb{N}$ með þrepun

Dæmi 21: Nota þrepun eftir að innsetja $y \to 1$

Dæmi 22: Skoða samhverfu, þ.e. prófa að skoða $a \to b$ og $b \to a$, í öðrum orðum víxla á a og b