Bréfaskóli 2022 - Hluti I

Algebruleg lausn á dæmi 19

Dæmi: Látum ℓ og m vera línur. Látum n vera speglun m um ℓ. Látum P vera punkt. Punktur Q er speglun P um ℓ, punktur R er speglun Q um m og punktur S er speglun R um ℓ. Sannið að S sé speglun P um n.

Lausn: Fyrir línu ℓ þá skulum við láta ref_ℓ vera speglunina um ℓ. Vörpun φ frá punktum sléttunnar yfir í punkta sléttunnar kallast einsfirðun ef hún varðveitir fjarlægðir, það er fyrir alla punkta A, B í sléttunni þá er $[\varphi(A)\varphi(B)] \cong [AB]$. Þekkt er að einsfirðanir varpa punktum á sömu línu í punkta á sömu línu svo við megum gera ráð fyrir að φ varpi líka línum á línur. Við getum nú lýst speglunum sem tiltekinni gerð einsfirðanna.

Hjálparsetning 1. *Setjum sem svo að ℓ sé lína. Þá er ref_ℓ einsfirðun með kyrrapunkta (punktur P er kyrrapunktur ref_ℓ ef $\mathrm{ref}_\ell(P) = P$) nákvæmlega þá punkta sem liggja á ℓ. Enn fremur gildir að ef φ er einsfirðun þá er $\varphi = \mathrm{ref}_\ell$ ef og aðeins ef kyrrapunktar φ eru nákvæmlega þeir punktar sem liggja á ℓ.*

Sönnun. 1. Setjum sem svo að ℓ sé lína. Setjum sem svo að P sé einhver punktur og Q sé einhverpunktur á ℓ. Látum P' vera hornrétt ofanvarp P á ℓ.

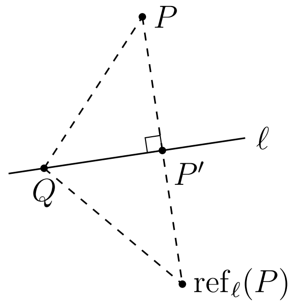
(a) Ef P liggur á ℓ þá er $\mathrm{ref}_\ell(P) = P$ svo $[PQ] \cong [\mathrm{ref}_\ell(P)Q]$.

(b) Ef A liggur ekki á ℓ þá er $\mathrm{ref}_\ell(P) \neq P$, P' er miðpunktur $[P\,\mathrm{ref}_\ell(P)]$ og $\langle P\,\mathrm{ref}_\ell(P)\rangle \perp \ell$. Ef $Q = P$ þá er ljóst að $[PQ] \cong [\mathrm{ref}_\ell(P)Q]$. Ef $Q \neq P$ þá fæst að $\angle QP'P$ og $\angle QP'\,\mathrm{ref}_\ell(P)$ eru bæði rétt og því samsniða. Auk þess er $[P'Q] \cong [P'Q]$ og $[P'P] \cong [P'\,\mathrm{ref}_\ell(P)]$ svo $\triangle P'QP \cong \triangle P'Q\,\mathrm{ref}_\ell(P)$, sér í lagi er $[PQ] \cong [\mathrm{ref}_\ell(P)Q]$.

Í báðum tilvikum er $[PQ] \cong [\mathrm{ref}_\ell(P)Q]$.

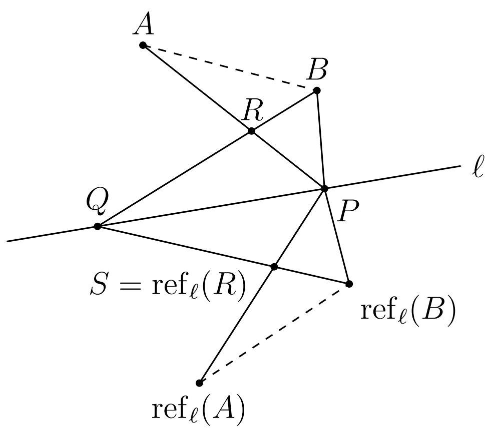
Setjum nú sem svo að A og B séu einhverjir punktar. Ef A liggur á ℓ þá er $\mathrm{ref}_\ell(A) = A$ og þar sem $[A\,\mathrm{ref}_\ell(B)] \cong [AB]$ þá er $[\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)] \cong [AB]$. Eins er $[\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)] \cong [AB]$ er B liggur á ℓ. Gerum því ráð fyrir að hvorki A né B liggi á ℓ. Ef $A = B$ þá er ljóst að $[\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)] \cong [AB]$ svo við megum gera ráð fyrir að $A \neq B$. Þar sem ℓ og $\langle AB\rangle$ eru ólíkar línur þá hafa þær í mesta lagi einn skurðpunkt. Tökum P á ℓ sem er ekki skurðpunktur $\langle AB\rangle$ við ℓ. Þá liggur B ekki á $\langle AP\rangle$ og ℓ sker $\langle AP\rangle$ í P. Finnum punkt Q á ℓ þannig að B og Q liggi sitthvoru megin við $\langle AP\rangle$. Þá sker $\langle AP\rangle$ strikið $[BQ]$, í segjum R.

Látum S vera punktinn á $[Q\,\mathrm{ref}_\ell(B)\rangle$ þannig að $[QR] \cong [QS]$. Nú er $[PQ] \cong [PQ]$, $[\mathrm{ref}_\ell BP] \cong [BP]$, $[\mathrm{ref}_\ell(B)Q] \cong [BQ]$ og $[QR] \cong [QS]$ auk þess sem R liggur á $[QB\rangle$ svo



af fimmstrikasetningu leiðir að $[PR] \cong [PS]$. Nú er $[P\,\mathrm{ref}_\ell(R)] \cong [PR]$ og $[\mathrm{ref}_\ell(R)Q] \cong [RQ]$ svo $[P\,\mathrm{ref}_\ell(R)] \cong [PS]$ og $[Q\,\mathrm{ref}_\ell(R)] \cong [QS]$. Því fæst að $S = R$ eða $S = \mathrm{ref}_\ell(R)$. Þar sem B og $\mathrm{ref}_\ell(B)$ liggja sitthvoru megin við ℓ þá liggja $[QB\rangle$ og $[Q\,\mathrm{ref}_\ell(B)\rangle$ sitthvoru megin við ℓ. Það er R og S liggja sitthvoru megin við ℓ sem sýnir að $S = \mathrm{ref}_\ell(R)$.

Þar sem R liggur á milli Q og B þá er $[QR] \mathrel{\tilde{<}} [QB]$ og því $[Q\,\mathrm{ref}_\ell(R)] \mathrel{\tilde{<}} [Q\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$. Þar sem $\mathrm{ref}_\ell(R)$ liggur á $[Q\,\mathrm{ref}_\ell(B)\rangle$ þá fæst að $\mathrm{ref}_\ell(R)$ liggur á milli Q og B. Þar sem $[QR] \cong [Q\,\mathrm{ref}_\ell(R)]$ og $[QR] \cong [Q\,\mathrm{ref}_\ell(R)]$ þá er $[RB] \cong [\mathrm{ref}_\ell(R)\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$.



(a) Setjum sem svo að A og R liggi sömu megin við ℓ. Þá liggur R á $[PA\rangle$. Þar sem A og $\mathrm{ref}_\ell(A)$ liggja sitthvoru megin við ℓ og R og $\mathrm{ref}_\ell(R)$ liggja sitthvoru megin við ℓ þá liggja $\mathrm{ref}_\ell(A)$ og $\mathrm{ref}_\ell(R)$ sömu megin við ℓ. Þá liggur $\mathrm{ref}_\ell(R)$ á $[P\,\mathrm{ref}_\ell(B)\rangle$. Þar sem $[PR] \cong [P\,\mathrm{ref}_\ell(R)]$, $[PA] \cong [P\,\mathrm{ref}_\ell(A)]$, $[PB] \cong [P\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$ og $[RB] \cong [\mathrm{ref}_\ell(R)\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$ þá gefur fimm strika setningin að $[AB] \cong [\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$.

(b) Setjum sem svo að A og R liggi sitthvoru megin við ℓ. Þá liggur P á milli R og A. Þar sem A og $\mathrm{ref}_\ell(A)$ liggja sitthvoru megin við ℓ og R og $\mathrm{ref}_\ell(R)$ liggja sitthvoru megin við ℓ þá liggja $\mathrm{ref}_\ell(A)$ og $\mathrm{ref}_\ell(R)$ sitthvoru megin við ℓ sem sýnir að P liggur á milli $\mathrm{ref}_\ell(A)$ og $\mathrm{ref}_\ell(R)$. Þar sem P liggur á $[RA]$ og $[\mathrm{ref}_\ell(R)\,\mathrm{ref}_\ell(A)]$, $[AP] \cong [\mathrm{ref}_\ell(A)P]$ og $[RP] \cong [\mathrm{ref}_\ell(R)P]$ þá er $[RA] \cong [\mathrm{ref}_\ell(R)\,\mathrm{ref}_\ell(A)]$. Nú liggur A á $[RP\rangle$, $\mathrm{ref}_\ell(A)$ og $\mathrm{ref}_\ell(A)$ liggur á $[\mathrm{ref}_\ell(R)P\rangle$, $[RP] \cong [\mathrm{ref}_\ell(R)P]$, $[RA] \cong$

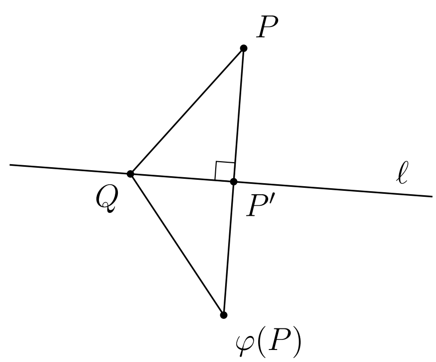
$[\mathrm{ref}_\ell(R)\,\mathrm{ref}_\ell(A)]$, $[BP] \cong [\mathrm{ref}_\ell(B)P]$ og $[RB] \cong [\mathrm{ref}_\ell(R)\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$ svo af fimm strika setningu leiðir að $[AB] \cong [\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$þ

Við höfum því sannað að $[\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)] \cong [AB]$ fyrir alla punkta A og B svo ref_ℓ er einsfirðun. Ljóst er að kyrrapunkta ref_ℓ eru nákvæmlega þeir punktar sem liggja á ℓ.

2. Setjum sem svo að ℓ sé lína og φ sé einsfirðun. Ef $\varphi = \mathrm{ref}_\ell$ þá er ljóst að punktarnir á ℓ eru nákvæmlega kyrrapunktar φ. Setjum nú sem svo að punktarnir á ℓ séu nákvæmlega kyrrapunktar φ, það er $\varphi(P) = P$ ef og aðeins ef P liggur á ℓ.

   Gerum ráð fyrir að P sé einhver punktur sem liggur ekki á ℓ. Látum P' vera hornrétt ofanvarp P á ℓ og látum Q vera einhver annan punkt á ℓ. Þar sem φ er einsfirðun þá er $[\varphi(P')\varphi(P)] \cong [P'P]$ og $[\varphi(Q)\varphi(P)] \cong [QP]$. Þar sem P' og Q' liggja á ℓ þá er $\varphi(P') = P'$ og $\varphi(Q) = Q$. Þar sem $[P'Q] \cong [P'Q]$ þá fæst að $\triangle PP'Q \cong \triangle\varphi(P)P'Q$, sér í lagi er $\angle\varphi(P)P'Q \cong \angle PP'Q$ og þar sem $\angle PP'Q$ er rétt þá er $\angle\varphi(P)PQ$ það einnig. Nú liggur P ekki á ℓ svo P er ekki kyrrapunktur φ, það er $\varphi(P) \neq P$. Nú eru til nákvæmlega tveir punktar R þannig að $[PP'] \cong [RP']$ og $[PQ] \cong [RQ]$ og þeir liggja sitthvoru megin við ℓ, ljóst er að P er annar þeirra og þar sem $\varphi(P) \neq P$ þá er $\varphi(P)$ hinn þeirra. Sér í lagi liggja P og $\varphi(P)$ sitthvoru megin við ℓ. Þetta sýnir að $\varphi(P)$ er speglun P um ℓ, það er $\varphi(P) = \mathrm{ref}_\ell(P)$.

   Þar sem $\varphi(P) = \mathrm{ref}_\ell(P)$ fyrir alla punkta P þá er $\varphi = \mathrm{ref}_\ell$.



Setjum sem svo að ℓ og m séu einhverjar línur. Ef A og B eru punktar þá er $[\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)] \cong [AB]$ þar sem ref_ℓ er einsfirðun. Þar sem ref_m er einsfirðun þá er $[\mathrm{ref}_m(\mathrm{ref}_\ell(A))\,\mathrm{ref}_m(\mathrm{ref}_\ell(B))] \cong [\mathrm{ref}_\ell(A)\,\mathrm{ref}_\ell(B)]$. Þá er $[(\mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell)(A)(\mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell)(B)] \cong [AB]$. Þetta sýnir að $\mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}\,\ell$ er einsfirðun. Eins fæst að $\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}\,\ell$ er einsfirðun.

Ljóst er að spegla tvisar sum sömu línu tekur alla punkt í sjálfa sig, það er $\mathrm{ref}_n \circ \mathrm{ref}_n = \mathrm{id}$ fyrir allar línur n (id er samsendarvörpunin, $\mathrm{id}(P) = P$ fyrir alla punkta P). Sér í lagi eru speglanir andhverfanlegar (þær eru andhverfur sjálfra sín).

Setjum sem svo að P sé punktur. Þá fæst:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell)(P) = P &\iff \mathrm{ref}_\ell((\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell)(P)) = \mathrm{ref}_\ell(P) \\
&\iff (\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m)(\mathrm{ref}_\ell(P)) = \mathrm{ref}_\ell(P) \\
&\iff (\mathrm{id} \circ \mathrm{ref}_m)(\mathrm{ref}_\ell(P)) = \mathrm{ref}_\ell(P) \\
&\iff \mathrm{ref}_m(\mathrm{ref}_\ell(P)) = \mathrm{ref}_\ell(P)
\end{aligned}$$

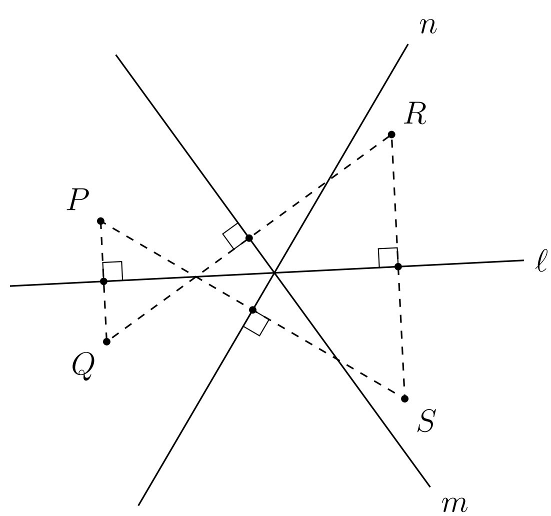
Það er P er kyrrapunktur $\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell$ ef og aðeins ef $\mathrm{ref}_\ell(P)$ er kyrrapunktur ref_m. Nú er $\mathrm{ref}_\ell(P)$ kyrrapunktur m ef og aðeins ef $\mathrm{ref}_\ell(P)$ liggur á m. En þá liggur $P = \mathrm{id}(P) = (\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_\ell)(P) = \mathrm{ref}_\ell(\mathrm{ref}_\ell(P))$ á $\mathrm{ref}_\ell(m)$. Þetta sýnir að P er kyrrapunktur $\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell$ ef og aðeins ef P liggur á $\mathrm{ref}_\ell(m)$.

Við höfum því sýnt að $\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell = \mathrm{ref}_{\mathrm{ref}_\ell(m)}$.

Skoðum núna dæmið. Gefnar eru línur ℓ og m. Línan n er speglun m um ℓ, það er $n = \mathrm{ref}_\ell(m)$. Punktur P er gefinn. Speglun P um ℓ er Q, það er $Q = \mathrm{ref}_\ell(P)$. Speglun Q um m er R, það er $R = \mathrm{ref}_m(Q)$. Speglun R um ℓ er S, það er $S = \mathrm{ref}_\ell(R)$. Því fæst að:

$$S = \mathrm{ref}_\ell(\mathrm{ref}_m(\mathrm{ref}_\ell(P))) = (\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{ref}_m \circ \mathrm{ref}_\ell)(P) = \mathrm{ref}_{\mathrm{ref}_\ell(m)}(P) = \mathrm{ref}_n(P)$$

Það er S er speglun P um n eins og sýna átti.



$\square$