Bréfaskóli í fléttufræði

2023

Atli Fannar Franklín

Gefin eru 10 dæmi, nokkurn veginn í þyngdarröð. Skila má mest þremur dæmum til yfirferðar, en þið eru hvött til að leysa sem flest. Skil eru miðnætti 28. Feb.

Dæmi 1:

Hversu margar tölur frá 1 til 1000 eru ekki deilanlegar með 2, 3 né 5?

Dæmi 2:

Hversu mörg n-staka fjölmengi úr $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ hafa summu deilanlega með $n + 1$? Fjölmengi merkir að við leyfum endurtekningar.

Dæmi 3:

Finnið fjölda hlutmengja $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem innihalda engar tvær aðlægar tölur.

Dæmi 4:

Runa ása og núlla af lengd n kallast bitastrengur af lengd n. Lát a_n vera fjölda bitastrengja af lengd n sem innihalda ekki $0, 1, 0$ hlið við hlið í þeirri röð. Lát b_n vera fjölda bitastrengja af lengd n sem innihalda ekki $0, 0, 1, 1$ eða $1, 1, 0, 0$ hlið við hlið í þeirri röð. Sýnið að $b_{n+1} = 2a_n$ fyrir öll $n > 0$.

Dæmi 5:

Lát $D(n)$ vera fjölda leiða til að endurraða n stökum þannig að enginn hlutanna endi á sama stað og hann byrjaði. Sýnið að $D(n) = nD(n-1) + (-1)^n$.

Dæmi 6:

Lát A vera mengi N leifaflokka modulo N^2. Sýnið að til sé mengi B af N leifaflokkum modulo N^2 þannig að $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ hafi stærð a.m.k. $N^2/2$.

Dæmi 7:

Við höfum n (ólíka) staura í röð. Við ætlum að mála þá rauða, bláa, gula, græna, appelsínugula eða fjólubláa. Viljum að odda fjöldi verði rauður, sléttur fjöldi verði blár og að samtals fjöldi appelsínugulra og fjólubláa staura sé sléttur. Hvað má lita staurana á marga vegu?

Dæmi 8:

Tveir íkornar, Nonni og Manni, hafa safnað 2021 valhnetum. Manni númerar hneturnar frá 1 til 2021 og grefur 2021 holur meðfram hring í kringum uppáhalds tré þeirra. Morguninn eftir tekur Manni eftir því að Nonni sé búinn að setja eina hnetu í hverja holu með engu tilliti til númeranna. Ósáttur með þetta fer Manni að endurraða hnetunum með því að framkvæma 2021 hreyfingar. Í k-tu hreyfingu svissar Manni á hnetunum hægra og vinstra megin við k-tu hnetuna.

Sýnið að til sé tala k þannig að í hreyfingu k svissi Manni á tveimur hnetum a og b þannig að $a < k < b$.

Dæmi 9:

Lát G vera net á $n \geq 10$ hnútum og gerum ráð fyrir að það að bæta einhverjum legg í G sem var ekki þegar til staðar fjölgi fjölda 10-klíka í G. Sýnið að G hafi að minnsta kosti $8n - 36$ leggi.

Dæmi 10:

Lát n vera jákvæða heiltölu. Jörmunrekur er með n krónur í röð á borði fyrir framan sig. Hann endurtekur eftirfarandi aðgerð: Ef k krónanna sýna skjaldarmerki og $k > 0$ þá snýr hann k-tu krónunni við, annars hættir hann. Sýnið að sama hvernig krónurnar snúa í byrjun hættir þetta ferli að lokum og ákvarðið meðalfjölda snúninga sem ferlið tekur yfir allar 2^n upphafsstöður.