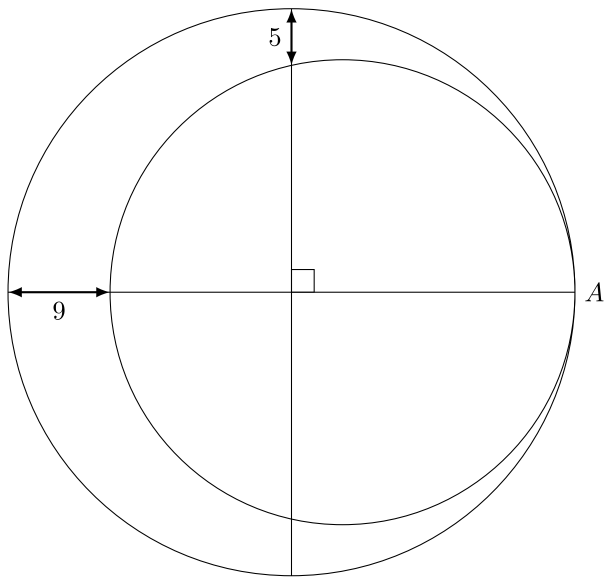
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2019–2020

Svör og lausnir

Efra stig



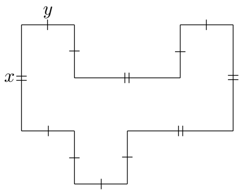
Fyrsti hluti

1. Margfeldið $8 \cdot 4 \cdot 81$ er deilanlegt með 6^k. Stærsta jákvæða heiltalan sem k getur verið er

☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

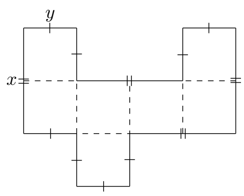
Skýring: $8 \cdot 4 \cdot 81 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^4 = 2 \cdot (2 \cdot 3)^4 = 2 \cdot 6^4$ svo k getur í mesta lagi verið 4.

2. Á myndinni eru lengdir línanna annaðhvort x eða y. Einnig eru öll horn rétt. Ef flatarmál myndarinnar er $252\,\mathrm{m}^2$ og $x = 2y$, hvert er þá ummál myndarinnar?



☐ 72 m ☒ 96 m ☐ 168 m ☐ 192 m

Skýring: Myndinni má skipta upp í 7 jafnstóra hluta, hvern þeirra y^2 að flatarmáli. $7y^2 = 252$ gefur $y^2 = 252/7 = 36$ svo $y = 6$. Hlið merkt | er af lengd 6 og hlið merkt || er af lengd 12. Samanlagt eru hliðarlengdir $16 \cdot 6 = 96$ m.

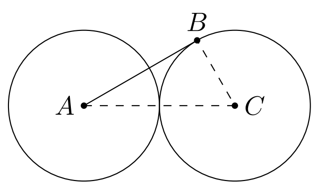


3. Sex börn borða samtals 20 vínber. Andri borðar eitt vínber, Binni borðar tvö vínber, Dóra borðar þrjú vínber. Erpur borðar flest vínber allra, enginn borðar jafnmörg vínber og hann. Hver er minnsti mögulegi fjöldi vínberja sem Erpur getur hafa borðað?

☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7

Skýring: Andri, Binni og Dóra borða samtals 6 vínber. Erpur og tvö önnur börn, sem við köllum X og Y, borða því samtals 14 vínber. Erpur getur ekki hafa borðað 5 vínber því þá hefur annað hvort barnanna X eða Y borðað a.m.k. 5 vínber. Mögulegt er að Erpur hafi borðað 6 vínber og þá X og Y samanlagt 8 vínber, fjögur hvort.

4. Tveir jafnstórir hringir, annar með miðju í A og hinn með miðju í C snertast. Punktur B er staðsettur á hringnum með miðju í C þannig að lína gegnum A og B er snertill við þann hring. Hver er lengd striksins AB, í cm, ef geisli (radíus) beggja hringja er 6 cm?



☐ $5\sqrt{3}$ ☐ $6\sqrt{2}$ ☒ $6\sqrt{3}$ ☐ $9/\sqrt{2}$

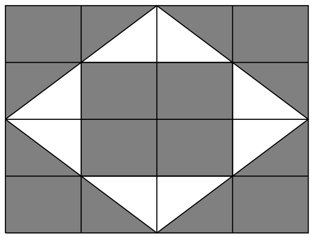
Skýring: þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur með rétthorn B. Hlið AC er af lengd 12 og hlið BC af lengd 6. Skv. reglu Pýþagórasar er þá er hliðin AB af lengd $|AB| = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$.

5. Tölvuvírus ræðst á harðan disk. Fyrsta daginn étur hann upp $\frac{1}{2}$ af disknum. Næsta dag étur hann upp $\frac{1}{3}$ af því sem þá er eftir. Þriðja daginn étur hann upp $\frac{1}{4}$ af því sem þá er eftir og fjórða daginn étur hann upp $\frac{1}{5}$ af því sem þá er eftir. Hversu stór hluti harða disksins er eftir óskaddaður?

☒ 1/5 ☐ 1/6 ☐ 1/10 ☐ 1/12

Skýring: Við lok 1. dags er $\frac{1}{2}$ diskur eftir. Í lok 2. dags eru $\frac{2}{3}$ af helmingi eða $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ eftir. Í lok 3. dags eru $\frac{3}{4}$ af $\frac{1}{3}$ eða $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ eftir. Þá, í lok 4. dags eru $\frac{4}{5}$ af $\frac{1}{4}$ eða $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ eftir.

6. Myndin sýnir lítinn rétthyrning innritaðan í tígul sem er innritaður í stóran rétthyrning. Horn innritaða rétthyrningsins snerta miðpunkta hliða tígulsins og horn tígulsins snerta miðpunkta hliða stóra rétthyrningsins. Hversu stór hluti stóra rétthyrningsins er litaður grár?



☐ 3/5 ☐ 2/3 ☐ 5/7 ☒ 3/4

Skýring: Skiptum stóra rétthyrningnum upp í 16 jafnstóra hluta eins og sýnt er. Samtals 4 hlutar, eða fjórðungur er hvítur. Restin, sem er 12 hlutar af 16 er grár og $12/16 = 3/4$.

7. Þrjár jákvæðar heiltölur a, b og c eru þannig að

$$4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$$

Hver er summan $a + b + c$?

☐ 28 ☐ 31 ☒ 36 ☐ 49

Skýring: Vinstri hlið má rita $2^{2a} \cdot 5^b \cdot 2^c 3^c = 2^{2a+c} 5^b 3^c$ og hægri hlið má rita $2^{24} \cdot 3^{18} \cdot 2^{10} 5^{10} = 2^{34} 5^{10} 3^{18}$. Samanburður veldisvísa gefur $b = 10$, $c = 18$ og $2a + c = 34$ og því $a = 8$. Þá er $a + b + c = 8 + 10 + 18 = 36$.

8. Í rétthyrndum þríhyrningi eru hliðarlengdir a, $a + d$ og $a + 2d$ þar sem a og d eru jákvæðar tölur. Hvert er hlutfallið $\dfrac{a}{d}$?

- [x] 3
- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] 6

Skýring: Þríhyrningur með hliðarlengdir 3, 4 og 5 er rétthyrndur; með $a = 3$ og $d = 1$. Hlutfallið a/d er því 3.

9. Á eyju búa hrappar sem alltaf ljúga og heiðursmenn sem alltaf segja satt. Rúnar, Sigrún, Teitur og Unnur búa á eyjunni. Þau segja:

Rúnar: „Að minnsta kosti eitt okkar segir ósatt."

Sigrún: „Ég er sú eina okkar sem lýgur."

Teitur: „Ég er sá eini sem segir satt."

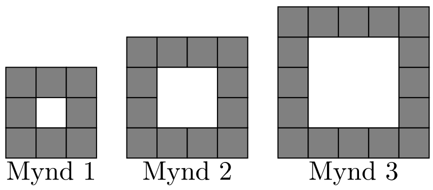
Unnur: „Við segjum öll satt."

Hversu mörg þeirra eru hrappar?

- [ ] 4
- [x] 3
- [ ] 2
- [ ] 1

Skýring: Væri Unnur að segja satt þá væri Teitur að segja satt, sem getur ekki staðist; svo Unnur skrökvar. Sigrún getur ekki verið að segja satt því þá væri hún að skrökva. Væri Rúnar að skrökva þá væru allir að segja satt sem getur ekki staðist, svo Rúnar segir satt og þá er Teitur að skrökva. Rúnar er því sá eini sem segir satt.

10. Hve marga gráa ferninga þyrfti í Mynd 10 ?

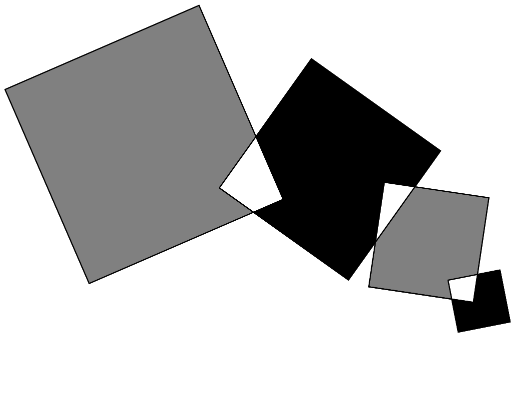


- [ ] 38
- [ ] 40
- [ ] 42
- [x] 44

Skýring: Í sérhverri mynd eru fjórir ferningar í hornunum. Að auki eru svo ferningar á hverri hlið, fjöldi ferninga per hlið jafn númeri myndar. Í Mynd 10 þarf því 4 hornferninga og að auki 10 ferninga á hverja hlið; alls 44 ferninga.

Annar hluti

11. Á myndinni sjást fjórir ferningar með hliðarlengdir 5, 7, 9 og 11. Hversu miklu stærra er flatarmál gráu svæðanna heldur en flatarmál svörtu svæðanna?



Svar: 64

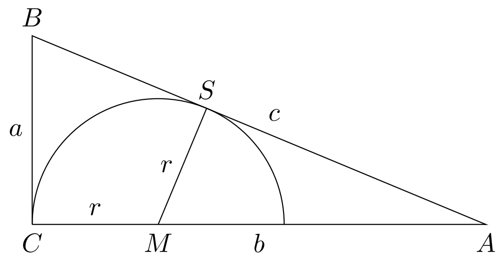
Skýring: Ef samanlagt flatarmál hvítu svæðanna er táknað með H þá er samanlagt flatarmál gráu svæðanna $(11^2 + 7^2 - H)$ og samanlagt flatarmál svörtu svæðanna $(9^2 + 5^2 - H)$. Mismunur flatarmála þessara svæða er því $(11^2 + 7^2 - H) - (9^2 + 5^2 - H) = 11^2 + 7^2 - 9^2 - 5^2 = 64$.

12. Í verslunarmiðstöð er rúllustigi. Ef rúllustiginn er í gangi og Guðrún stendur kyrr allan tímann á leið upp þá tekur það hana 60 sekúndur að komast upp. Ef rúllustiginn er ekki í gangi og Guðrún gengur upp rúllustigann þá tekur það hana 90 sekúndur að komast upp. Hversu margar sekúndur tekur það Guðrúnu að fara upp ef rúllustiginn er í gangi og hún gengur upp stigann?

Svar: 36 sekúndur

Skýring: Vegalengdin V, sem Guðrún fer í rúllustiganum, er sú sama hvort heldur sem hún gengur upp eða ekki. Tíminn ræðst alfarið af hraða Guðrúnar. Ef hun stendur kyrr í rúllustiganum er hraði hennar $\frac{V}{60}$ og ef hún gengur upp er hraði hennar $\frac{V}{90}$. Ef t táknar tímann, sem það tekur Guðrúnu að komast gangandi upp rúllustigann í gangi þá er $(\frac{V}{60} + \frac{V}{90}) \cdot t = V$ svo $(\frac{1}{60} + \frac{1}{90}) \cdot t = 1$. Þá er $\frac{1}{36} \cdot t = 1$ og því $t = 36$.

13. Hálfhringur er innritaður í rétthyrndan þríhyrning með hliðarlengdir $a < b < c$. Finnið geisla (radíus) hálfhringsins og táknið hann með a, b og c.



Svar: $\dfrac{ac - a^2}{b}$ eða $\dfrac{ab}{c + a}$

Skýring: Köllum miðpunkt hálfhringsins M og punkt á c sem geisli hringsins snertir S. Þríhyrningarnir ABC og AMS eru einslaga. Þar sem BC og BS eru snertlar við hringinn með miðju í M og $|BS| = a$ þá er $|AS| = c - a$. Hlutföll milli skammhliða ABC og AMS gefa þá að $\frac{r}{c-a} = \frac{a}{b}$ og því fæst $r = \frac{ac-a^2}{b}$.

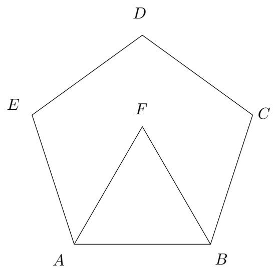
Eins má sjá að $|MA| = b - r$ og því fást jöfn hlutföll $\frac{r}{b-r} = \frac{a}{c}$ og því $rc = ab - ar$ sem gefur $r = \frac{ab}{c+a}$

14. Hversu margar sjö stafa jákvæðar heiltölur, sem búnar eru til eingöngu úr 0 og 1, eru deilanlegar með tölunni 6?

Svar: 11

Skýring: Þar sem talan er deilanleg með 6 þá er hún deilanleg með 2 og með 3. Talan er því slétt tala og þversumma hennar er deilanleg með 3. Fyrsti tölustafurinn verður að vera 1 og þar sem talan er slétt tala verður síðasti tölustafurinn að vera 0. Talan er þá 1□□□□□0 . Til að 3 gangi upp í þversummunni getur 1 komið fyrir þrisvar eða sex sinnum. Ef sex sinnum þá er talan 1111110. Ef þrisvar þá þarf að dreifa tveimur ásum einhvers staðar í boxin 5 (10 möguleikar alls). Það eru því 11 mismunandi slíkar tölur.

15. Í reglulegum fimmhyrningi $ABCDE$ eru allar hliðar jafnlangar og öll horn jafnstór. Einnig er þríhyrningurinn ABF jafnhliða. Finnið stærð hornsins $\angle EFC$.

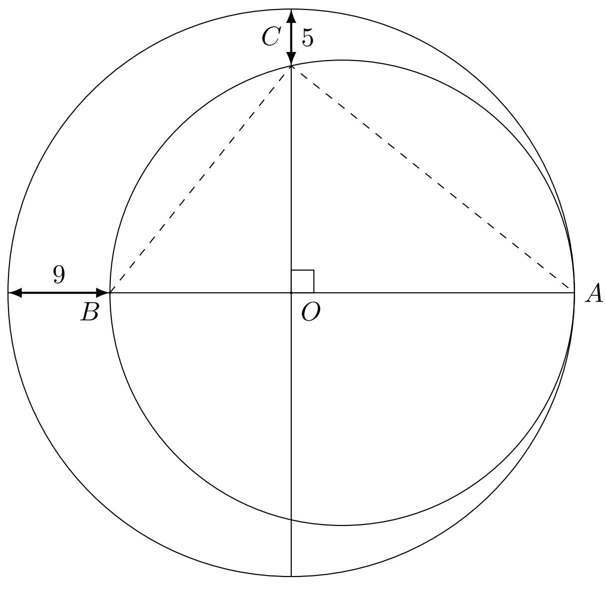


Svar: 168°

Skýring: Reglulegum fimmhyrningi má skipta upp í fimm jafnstóra jafnarma þríhyrninga með topphorn $360°/5 = 72°$ hver. Samanlögð stærð grunnhornanna tveggja í hverjum fimm þríhyrninganna er því $180° - 72° = 108°$ sem er stærð allra horna fimmhyrningsins. Á myndinni er þríhyrningurinn AFB janfhliða og horn hans öll 60° og því er $\angle EAF = 108° - 60° = 48°$. En þríhyrningurinn EAF er jafnarma með topphorn 48° svo grunnhorn hans eru $\angle AEF = \angle AFE = (180° - 48°)/2 = 132°/2 = 66°$. Á sama hátt fæst að $\angle BFC = 66°$ og því má reikna $\angle EFC = 360° - 60° - 2 \cdot 66° = 168°$.

Þriðji hluti

16. Myndin sýnir hring innritaðan í stærri hring þannig að þeir snertast í punkti A. Tveir miðstrengir stærri hringsins eru sýndir og fellur miðstrengur minni hrings í miðstreng þess stærri. Þeir hlutar miðstrengja stærri hringsins, sem liggja utan minni hringsins eru af lengd 5 og 9, eins og sýnt er á mynd. Hver er geisli (radíus) stærri hringsins?



Lausn: Táknum geisla stærri hringsins með R. Takið eftir að þríhyrningur ABC er rétthyrndur þríhyrningur þar sem AB er miðstrengur.

Aðferð I, einslaga þríhyrningar: Þríhyrningarnir BOC, BCA og COA eru allir einslaga. Sér í lagi gilda eftirfarandi hlutföll skammhliða í þríhyrningum ΔBOC og ΔCOA:

$$\frac{BO}{OC} = \frac{CO}{OA} \quad \text{svo} \quad \frac{R-9}{R-5} = \frac{R-5}{R}$$

Þá er $R(R-9) = (R-5)^2$ og því $R = 25$.

Aðferð II, regla Pýþagórasar: Þar sem þríhyrningur ABC er rétthyrndur er

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

En

$$\begin{aligned} & AB^2 = (2R-9)^2 \\ & BC^2 = OB^2 + OC^2 = (R-9)^2 + (R-5)^2 \\ \text{og} \qquad & CA^2 = OC^2 + OA^2 = (R-5)^2 + R^2 \end{aligned}$$

Þá fæst:

$$\begin{aligned} (2R-9)^2 &= \left[(R-9)^2 + (R-5)^2\right] + \left[(R-5)^2 + R^2\right] \\ -36R + 81 &= [-18R + 81 - 10R + 25] + [-10R + 25] \\ 2R &= 50 \qquad \text{svo} \quad R = 25 \end{aligned}$$

17. Á borði liggja 40 gulir, 40 rauðir og 40 bláir kubbar. Arnar og Brynja spila með eftirfarandi leikreglum. Í hverjum leik þarf leikmaður að taka tvo kubba af leikborðinu, sem mega þó ekki vera rauður og blár saman. Leikmaður tapar ef engir kubbar eru eftir þegar hann á leik eða hann getur ekki tekið kubba af borðinu. Arnar byrjar. Hvernig getur Brynja tryggt sér sigur í leiknum?

Lausn: Brynja getur tryggt sér sigur í leiknum með því að gæta þess að ávallt sé sléttur fjöldi kubba af hverri tegund eftir á borðinu. Sýnum fyrst að þetta sé mögulegt. Í byrjun er sléttur fjöldi af hverri tegund. Ef Arnar tekur tvo mismunandi kubba þá tekur Brynja nákvæmlega eins kubba og hann. Þetta er mögulegt af því að í byrjun var sléttur fjöldi af hverri tegund og Arnar tók bara einn af hvoru tagi. Ef Arnar tekur tvo eins kubba þá tekur Brynja líka tvo eins kubba (ekki nauðsynlega af sömu tegund og Arnar tók). Þetta er mögulegt eins lengi og kubbar eru eftir, þar sem eftir að Arnar tekur tvo eins kubba verður að vera áfram sléttur fjöldi af hverri tegund. Svona tryggir Brynja ávallt sléttan fjölda af hverri tegund í borði eftir að hún hefur gert. Brynja getur því fylgt þessari leikáætlun svo lengi sem kubbar eru eftir þegar hún á að gera. sýnum næst að þetta leiði til sigurs. Tökum eftir að 4 gengur upp í fjölda kubba af hverri tegund. Þegar Brynja á að gera eru því ávallt minnst tveir kubbar eftir.

Brynja getur með öðrum orðum alltaf gert. Því tapar Arnar þegar Brynja fylgir þessari leikáætlun.

18. Finnið allar rauntölur x sem uppfylla jöfnuna $(x^2+7x+11)^{x^2+4x-12} = 1$

Lausn: Höfum í fyrsta lagi að annað hvort er $x^2+4x-12 = 0$ eða $x^2+7x+11 = 1$. Það er $(x-2)(x+6) = 0$ eða $x^2+7x+10 = 0$. Sem gefur $x = 2$ eða $x = -6$ eða $(x+2)(x+5) = 0$ og því mögulegar lausnir $x \in \{-6, -5, -2, 2\}$. Í öðru lagi gæti gilt að $x^2+4x-12 = 2k$ með k heiltölu og $x^2+7x+11 = -1$. Seinni jafnan gefur $(x+3)(x+4) = 0$ og þótt $x = -3$ gefi ekki slétta tölu í $x^2+4x-12 = 2k$ þá gefur $x = -4$ að $k = -6$ og því eru lausnir jöfnunnar fimm talsins, $x \in \{-6, -5, -4, -2, 2\}$.

19. Um tvær tveggja stafa tölur a og b gildir að margfeldi þeirra gengur upp í fjögurra stafa töluna sem a og b mynda, með öðrum orðum fjögurra stafa töluna þegar tölustafirnir í a og b eru ritaðir hlið við hlið. Ákvarðið öll möguleg gildi á a og b.

Lausn: Um tveggja stafa tölurnar tvær a og b gildir að ab gengur upp í $100a+b$. Því gengur a upp í $100a+b$ og þar með upp í b. Af því leiðir að til er heiltala s þannig að $b = sa$, og þar sem a og b eru tveggja stafa tölur, gildir að $1 \leq s \leq 9$. Þar sem $100a+b = a(100+s)$, og ab gengur upp í þeirri tölu, þá gengur $b = sa$ upp í $100+s$. Það að s gangi upp í $100+s$ og þarmeð í 100, takmarkar möguleika á gildi fyrir s. Mögulegra gilda fyrir s er að leita í menginu $\{1, 2, 4, 5\}$. Ef $s = 1$, gengur b upp í 101. En 101 hefur enga tveggja stafa deila svo það gengur ekki upp. Ef $s = 2$, er b slétt tveggja stafa tala sem gengur upp í $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Eini möguleikinn er $b = 34$ og þá $a = \frac{b}{2} = 17$. Þetta gengur upp því $\frac{1734}{17 \cdot 34} = 3$. Ef $s = 4$, þá gengur 4 upp í b og b tveggja stafa tala sem gengur upp í $104 = 2^3 \cdot 13$. Eini möguleikinn er $b = 52$ og þá $a = \frac{b}{4} = 13$. Þetta gengur upp því $\frac{1352}{13 \cdot 52} = 2$. Ef $s = 5$, þá gengur 5 upp í b og b tveggja stafa tala sem gengur upp í $105 = 5 \cdot 21$. Slík tala b er ekki til. Möguleg gildi eru því $a = 17, b = 34$ og $a = 13, b = 52$.