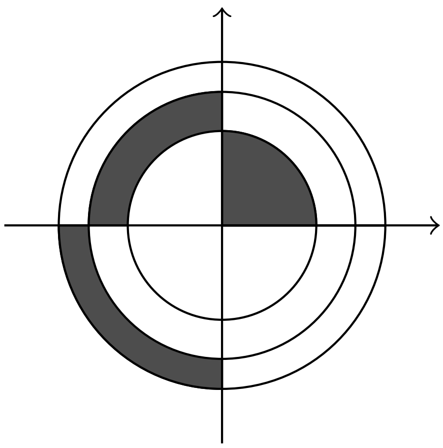
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

# Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2015–2016

## Svör og lausnir

## Efra stig



## Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

**1.** Ef $x$ og $y$ eru jákvæðar heilar tölur og $3^x 5^y = 225$, þá er $x + y$ jafnt og

☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 7

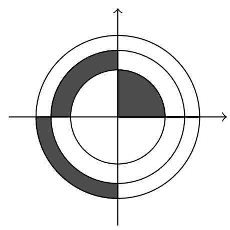
**Skýring:** $3^x 5^y = 225 = 9 \cdot 25 = 3^2 5^2$, svo $x = y = 2$. Þá er $x + y = 4$.

**2.** Appelsínum er raðað í stafla. Botnlagið er 5 appelsínur á breidd og 7 appelsínur á lengd. Í næstu lögum fyrir ofan er hver appelsína skorðuð af fjórum appelsínum. Hver er hámarksfjöldi appelsína í þess konar stafla?

☐ 53 ☐ 80 ☒ 85 ☐ 105

**Skýring:** Í botnlaginu eru $5 \times 7$ appelsínur; næsta lag hefur $4 \times 6$ appelsínur, þá $3 \times 5$ og svo $2 \times 4$. Þá er aðeins pláss fyrir eina röð af 3 appelsínum. Heildarfjöldi er því $35 + 24 + 15 + 8 + 3 = 85$ appelsínur.

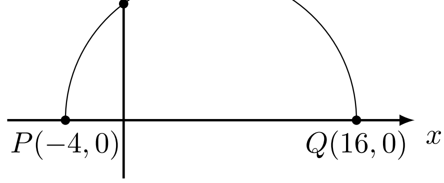
**3.** Á myndinni eru þrír hringar með miðju í (0,0). Ef skyggðu svæðin hafa öll sama flatarmálið og geisli (radíus) innsta hringsins er 1, hvert er þá margfeldi geisla hringanna þriggja?



☒ $\sqrt{6}$ ☐ 3 ☐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ☐ 6

**Skýring:** Táknum geisla miðhringsins með $r$ og geisla ysta hringsins með $R$. Þar sem skyggðu svæðin eru öll jafn að flatarmáli fæst að $\pi r^2/4 = 2 \cdot \pi/4$ svo $r = \sqrt{2}$. Eins er $\pi R^2/4 = 3 \cdot \pi/4$ svo $R = \sqrt{3}$. Margfeldi geislanna þriggja er þá $1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

**4.** Á myndinni er strikið með endapunkta $P(-4, 0)$ og $Q(16, 0)$ miðstrengur hálfhrings. Ef punkturinn $R(0, t)$ er á hálfhringnum þá er gildið á $t$ jafnt




☐ 6 ☐ 7 ☒ 8 ☐ 9

**Skýring:** Látum $O$ tákna miðju hnitakerfisins, $O = (0, 0)$. Miðja hrings sem fellur í hálfhringinn er í miðpunkti striksins $PQ$ og hefur því hnitin $M = (6, 0)$. Geisli hringsins er hálf lengd striksins $PQ$ og er því 10. Þríhyrningurinn $ORM$ er rétthyrndur með skammhliðar 6 og $t$ og langhlið 10. Samkvæmt reglu Pýþagórasar er $t = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

**5.** Bílasali kaupir tvo bíla. Hann selur annan þeirra fyrir 40% meira en kaupverðið og hinn fyrir 60% meira en kaupverðið. Samtals fær bílasalinn 54% hærri upphæð fyrir bílana heldur en hann greiddi fyrir þá í upphafi. Hvert er hlutfallið milli kaupverðs bílanna tveggja?

☐ 10 : 13 ☐ 20 : 27 ☒ 3 : 7 ☐ 7 : 12

**Skýring:** Ef kaupverð bílanna er $v_1$ og $v_2$ þá fær bílasalinn $1{,}4v_1 + 1{,}6v_2$ fyrir bílana tvo sem er jafnt $1{,}54(v_1 + v_2)$. Jöfnuna $1{,}4v_1 + 1{,}6v_2 = 1{,}54(v_1 + v_2)$ má umrita á formið $1{,}4 + 1{,}6\frac{v_2}{v_1} = 1{,}54(1 + \frac{v_2}{v_1})$. Svo $\frac{v_2}{v_1} = \frac{0{,}14}{0{,}06} = \frac{7}{3}$. Þá fæst að $v_1 : v_2 = 3 : 7$.

**6.** Ferningslaga miði er brotinn saman uns úr verður ferningur sem að flatarmáli er einn níundi af flatarmáli upprunalega ferningsins. Röð brotanna skiptir ekki máli. Eitt horn er klippt af litla ferningnum og blaðið síðan flatt út aftur. Hvað eru mörg göt á blaðinu?

☐ 0 ☒ 1 ☐ 2 ☐ 4

**Skýring:** Dregin eru fjögur strik samsíða hliðum miðans sem skipta honum í 9 jafnstóra ferninga. Átta ferninganna liggja að brún miðans, stakur ferningur liggur á miðju miðans. Þegar klippt er myndast gat í einu horni þess fernings.

**7.** Ef $2^{2013} + 4^{1007} + 8^{671} = 32^x$ þá er $x$

☐ 303 ☐ 353 ☒ 403 ☐ 671

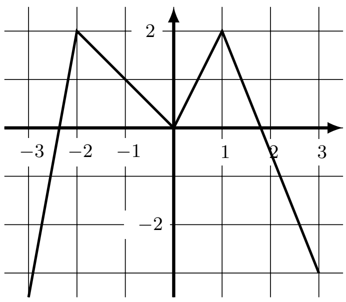
**Skýring:** Þar sem $4 = 2^2$ og $8 = 2^3$ má umrita vinstri hlið jöfnunnar á formið $2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2013} = 2^{2013}(1 + 2 + 1) = 2^{2015}$. Þar sem $32 = 2^5$ verður jafnan þá $2^{2015} = 2^{5x}$. Svo $5x = 2015$ og því $x = 403$.

**8.** Stafrænn sendir er forritaður til að senda ákveðna 5-bita runu, þ.e. runu af 5 tölustöfum sem annaðhvort eru 0 eða 1. Hann er látinn senda rununa 4 sinnum, einu sinni rétta, einu sinni með einni villu, einu sinni með tveimur villum og einu sinni með þremur villum. Fyrir neðan eru sýndar rununarnar sem hann sendir. Hver þeirra er sú rétta?

☐ 00001 ☒ 00100 ☐ 01100 ☐ 10010

**Skýring:** Fyrsta talnarunan getur ekki verið rétt því þá eru runur þrjú og fjögur með þrjár villur hvor. Sömuleiðis geta talnarunur þrjú og fjögur ekki verið réttar. Talnaruna tvö er rétt því þá er runa þrjú með eina villu, runa eitt með tvær villur og runa fjögur með þrjár villur.

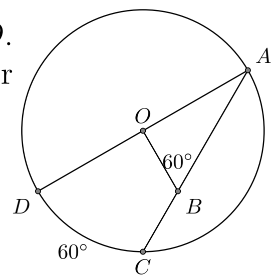
**9.** Hversu mörg gildi á $x$ er hægt að finna þannig að punktarnir $(x, b)$ og $(b, 2)$ liggi á ferlinum sem sýndur er á mynd?




☐ 2 ☐ 4 ☒ 6 ☐ Engin

**Skýring:** $(b, 2)$ liggur á ferlinum aðeins ef $b = 1$ eða $b = -2$. Þar sem $(x, 1)$ liggur á ferlinum fyrir fjögur mismunandi gildi á $x$ og $(x, -2)$ liggur á ferlinum fyrir önnur tvö mismunandi gildi á $x$ er heildarfjöldi $x$-gilda sem uppfylla skilyrðin alls sex.

**10.** Myndin sýnir hring með miðstreng $AD$ og miðju $O$. Boginn $CD$ er $60°$ og hornið $\angle ABO = 60°$. Hver er lengd striksins $BC$ ef lengd striksins $OB$ er 5?




☐ $3\sqrt{5}$ ☒ 5 ☐ $5\sqrt{3}$ ☐ 10

**Skýring:** $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOC = 30°$ og því er $\angle BOA = 90°$. Þar sem $DA$ er miðstrengur þá er $\angle ACD = 90°$ og því er $\angle CDA = 60°$. Þríhyrningur $OCD$ er því jafnhliða. Þá má álykta að $\angle OCB = \angle COB = 30°$ og þar með að $COB$ sé jafnarma. Því er $BC = OB = 5$.

## Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

**11.** Um jákvæðar heiltölur $x$ og $y$ gildir að $x^2 - y^2 = 100$. Finnið gildið á $x^2 + y^2$.

**Svar:** $26^2 + 24^2 = 1252$

**Skýring:** $100 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Nú eru tölurnar $x-y$ og $x+y$ báðar sléttar tölur eða báðar oddatölur. Þar sem margfeldi oddatalna er oddatala en margfeldið á að vera 100 þá verða báðar tölurnar $x-y$ og $x+y$ að vera sléttar tölur. Þar sem $x$ og $y$ eru báðar jákvæðar er eini möguleikinn að $(x-y)(x+y)$ sé $2 \cdot 50$. Svo $x - y = 2$ og $x + y = 50$. Þá er $x = 26$ og $y = 24$.

**12.** $a$ og $b$ eru rauntölur þannig að $ax^3 + 6x^2 + 9x + b = \big(p(x)\big)^3$ þar sem $p(x)$ er margliða. Hvert er gildið á $ab$?

**Svar:** 6

**Skýring:** Margliðan $p(x)$ verður að vera fyrsta stigs, $p(x) = mx + k$. Þá fæst að

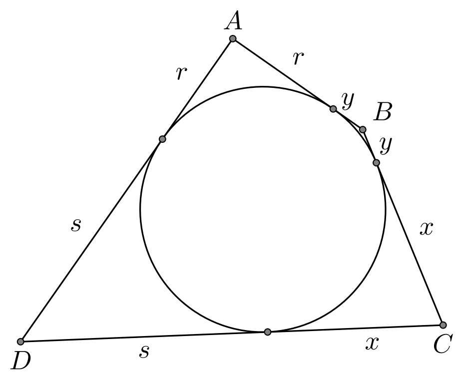
$$\big(p(x)\big)^3 = (mx+k)^3 = m^3x^3 + 3m^2kx^2 + 3mk^2x + k^3 = ax^3 + 6x^2 + 9x + b$$

Með samanburði stuðla við veldi á $x$ sést að $m^2k = 2$ og $mk^2 = 3$. Þá sést að $ab = m^3k^3 = m^2k \cdot mk^2 = 2 \cdot 3 = 6$.

**13.** Ferhyrningur $ABCD$ með innritaðan hring hefur hliðarlengdir $AB = 3$, $CD = 8$ og $AD = 7$. Hver er lengd hliðar $BC$?

**Svar:** 4

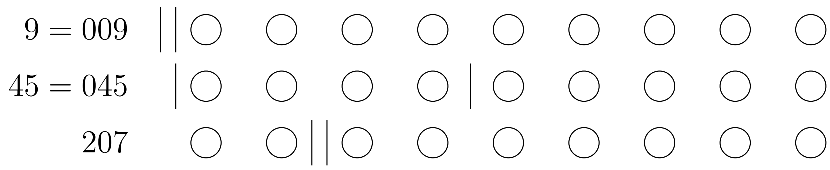
**Skýring:** Táknum fjarlægðir milli hornpunkta ferhyrningsins og snertipunkta innritaðs hringsins með $x$, $y$, $r$ og $s$ eins og sýnt er á mynd. (Það er vel þekkt og auðsannað að þær fjarlægðir sem merktar eru eins séu jafnar.) Þá er $BC = x + y$. En $x + y + r + s = AB + CD = 3 + 8 = 11$, svo $11 = BC + r + s = BC + 7$ og þá er $BC = 4$.




**14.** Hversu margar jákvæðar heiltölur minni en 1000 hafa þversummuna 9? (**Þversumma** tölu er summa tölustafa tölunnar; talan 234 hefur þversummu $2 + 3 + 4 = 9$.)

**Svar:** 55

**Skýring:** Sérhverja jákvæða heiltölu með þversummuna 9 má hugsa sér sem níu kúlna streng sem skipt hefur verið upp með tveimur þilum.




Á hve marga vegu má staðsetja þilin tvö eins og hér að ofan? Fyrsta þilið má staðsetja á 10 mismunandi vegu. Kúlurnar níu ásamt fyrsta þili gefa 11 möguleika á staðsetningu annars þils; alls $10 \cdot 11$ vegu. En þar sem það skiptir ekki máli í hvaða röð þilin tvö eru staðsett þá er heildarfjöldi ólíkra staðsetninga alls $10 \cdot 11/2 = 55$. Það eru því 55 jákvæðar heiltölur minni en 1000 með þversummuna 9.

**Önnur leið** til að sjá þetta er að hugsa tölurnar sem þriggja stafa strengi $xyz$ þar sem $x, y, z$ eru heiltölur á bilinu 0 til 9. Talan 9 samsvarar þá strengnum 009. Ef $x = 0$ eru 10 möguleikar: $009, 018, 027, \ldots, 081, 090$. Ef $x = 1$ eru 9 möguleikar: $108, 117, 126, \ldots, 180$. Getum haldið þannig áfram þar til á endanum fyrir $x = 9$ fæst bara ein tala: 900. Alls gerir þetta $10 + 9 + \cdots + 1 = 55$ tölur.

**15.** Hvert er gildið á $2^{\frac{1}{a-b}}$ ef $17^a = 16$ og $17^b = 4$ ?

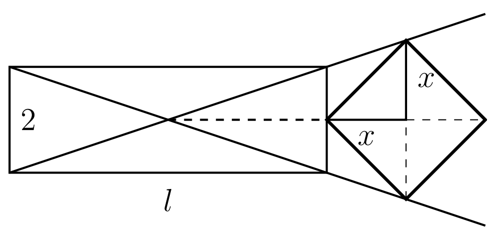
**Svar:** $17^{1/2} = \sqrt{17}$

**Skýring:** $17^{a-b} = \dfrac{17^a}{17^b} = \dfrac{16}{4} = 2^2$ svo $17 = 2^{\frac{2}{a-b}}$ og því er $2^{\frac{1}{a-b}} = 17^{1/2} = \sqrt{17}$.

## Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

**16.** Myndin sýnir ferning þar sem eitt horn hans snertir rétthyrning af stærðinni $2 \times l$. Önnur tvö horn ferningsins snerta framlengdar hornalínur rétthyrningsins og fjórða horn ferningsins er á framlengdri línu sem liggur um miðju rétthyrningsins og andstætt horn ferningsins.




Finnið lengdina $l$ þegar flatarmál rétthyrningsins og ferningsins eru jöfn.

**Lausn:** Táknum hálfa lengd hornalínu fernings með $x$. Þá er flatarmál fernings jafnt flatarmáli ferhyrnings þegar $2x^2 = 2l$; þegar $x = \sqrt{l}$. Með samanburði hliða i einslaga þríhyrningum fæst eftirfarandi:

$$\frac{\frac{1}{2}l}{1} = \frac{\frac{1}{2}l + x}{x} \quad \text{svo} \quad l = \frac{l+2x}{x} \quad \text{eða} \quad l = \frac{l}{x} + 2 \quad \text{svo} \quad l = \sqrt{l} + 2$$

Jöfnuna $l = \sqrt{l} + 2$ má umrita á formið $(\sqrt{l} - 2)(\sqrt{l} + 1) = 0$. Þá er $\sqrt{l} = 2$ og því $l = 4$.

**17.** Sannið að ekki séu til neinar jákvæðar heilar tölur $a$ og $b$ sem eru þannig að $4a^2 + 4a = b^2 + b$.

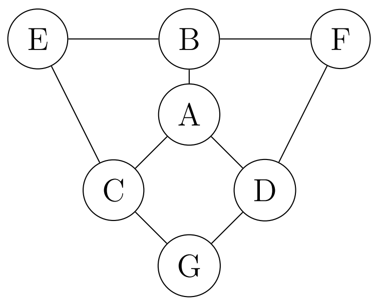
**Lausn:** Væru slíkar heiltölur $a$ og $b$ til þá væri

$$4a^2 + 4a + 1 = b^2 + b + 1 \quad \text{svo} \quad (2a+1)^2 = b^2 + b + 1.$$

Þá yrði $b^2 + b + 1$ að vera ferningstala. En þar sem $b^2 < b^2 + b + 1 < (b+1)^2$ þá er engin slík jákvæð heiltala $b$ til. Jákvæðu heiltölurnar $a$ og $b$ finnast því ekki.

**18.** Tölurnar $1, 2, \ldots, 7$ eru faldar undir bókstafaspjöldunum þannig að summan í hverjum ferhyrningi er 15. Hvaða tala er falin undir A?

**Lausn:** Gefið er að




$$\begin{aligned} \text{i)}\ & A + C + G + D = 15 \\ \text{ii)}\ & A + B + E + C = 15 \\ \text{iii)}\ & A + B + F + D = 15 \end{aligned}$$

Ef við leggjum saman i) og ii) og notum að summa talnanna undir spjöldunum sjö er 28 fæst:

$$(A + C) + (A + B + C + D + E + F + G) = 30 + F$$
$$\text{svo} \quad (1)\ A + C = 2 + F$$

Sömuleiðis fæst, með því að leggja saman i) og iii) annars vegar og ii) og iii) hins vegar, að (2) $A + D = 2 + E$ og (3) $A + B = 2 + G$.
Ef $A = 2$ þá er t.d. $C = F$, sem gengur ekki.
Ef $A \geq 4$ þá fæst úr jöfnum (1)–(3) að $F \geq C + 2$, $E \geq D + 2$ og $G \geq B + 2$. Þá verður $B$, $C$ eða $D$ að vera 2 og þar með $A = F$, $A = E$ eða $A = G$, sem gengur ekki.
Ef $A = 1$ eða $A = 3$ þá má, til dæmis, raða tölunum upp á eftirfarandi hátt:

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 7 | 5 | 4 | 6 | 2 |

eða

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | 6 | 7 | 5 | 2 |

Aðrar raðanir eru mögulegar með speglun um miðlínu gegnum $A$, $B$ og $G$.

**Önnur lausn:** Hægt er að mynda töluna 15 sem summu af fjórum ólíkum tölum úr menginu $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ á einungis fjóra mismunandi vegu:

$$1+2+5+7=15$$
$$1+3+4+7=15$$
$$1+3+5+6=15$$
$$2+3+4+6=15$$

Einu tölurnar sem koma fyrir í þremur summum eru 1 og 3, en allar hinar koma fyrir í tveimur summum hver. Það þýðir að 1 og 3 eru þær einu sem geta verið undir bókstafnum $A$ og í báðum tilfellum er hægt að raða tölunum til að skilyrði dæmisins sé uppfyllt (sjá fyrri lausn).

**19.** Sérhver jákvæð heiltala er lituð einum af þremur ólíkum litum. Sannið að til séu ólíkar jákvæðar heiltölur $x$ og $y$ sem báðar hafa sama lit og $|x-y|$ sé ferningstala.

**Lausn:** Athugið að ekki má velja sér ákveðna litun heldur þarf að sanna að fullyrðingin gildi hvernig sem litað er. Við sönnum þetta með því að gera ráð fyrir að fullyrðingin sé röng og leiða fram mótsögn.

Gerum ráð fyrir að jákvæðu heiltölurnar hafi verið litaðar með þremur litum þannig að ekki séu til tvær ólíkar tölur $x$ og $y$ í sama lit þar sem mismunurinn er ferningstala. Við munum nota að um ferningstölurnar $3^2=9$, $4^2=16$ og $5^2=25$ gildir að ein er summa hinna tveggja $25=9+16$. Ef við gerum ráð fyrir að talan 1 sé lituð blá, þá verður talan 26 að vera í öðrum lit, segjum rauðum, vegna þess að $26-1=25$. Eins geta tölurnar 10 og 17 ekki verið bláar, því $10-1=9$ og $17-1=16$, og ekki heldur rauðar, því $26-9=16$ og $26-17=9$. Þær þurfa því báðar að vera í þriðja litnum, sem við segjum að sé grænn.

Nú er $17-10=7$ ekki ferningstala svo ekki er mótsögn í því að þær séu báðar grænar. En hins vegar ef við hefðum byrjað með einhverja aðra jákvæða heiltölu $m$ í staðinn fyrir 1, þá sést á sama hátt að $m+9$ og $m+16$ verða að vera af sama lit. Það þýðir að fyrir sérhverja heiltölu $n \geq 10$ verða $n$ og $n+7$ að vera af sama lit (tökum $m=n-9$). Þar með gildir að $17+7=24$ er græn eins og 17, og þannig getum við haldið áfram: $10,17,24,31,38,45,52,59,\ldots$ verða allar að vera grænar. En $59-10=49=7^2$ er ferningstala sem er í mótsögn við forsenduna sem við gáfum okkur.

Því hlýtur forsendan að vera röng og því hljóta að vera til tvær ólíkar jákvæðar heiltölur $x$ og $y$ þannig að $|x-y|$ sé ferningstala.