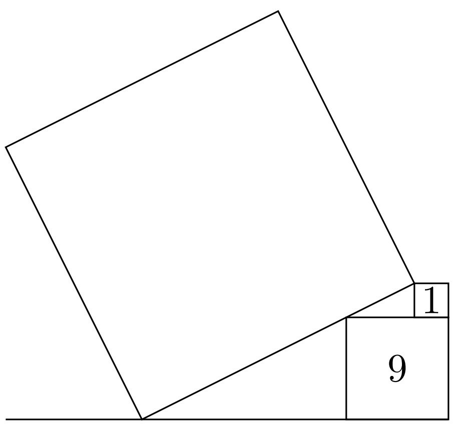
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2020–2021

Svör og lausnir

Efra stig



Fyrsti hluti

1. Í poka eru grænar, bláar og rauðar kúlur. Hlutfall grænu kúlanna á móti bláu og svo rauðu er $3 : 4 : 2$. Ef 63 af kúlunum í pokanum eru ekki rauðar, hver er fjöldi rauðra kúlna?

☐ 14 ☒ 18 ☐ 27 ☐ 36

Skýring: Hlutfall ekki rauðra kúlna á móti rauðum kúlum er $7 : 2$, alls 7 hlutar af 9 eru ekki rauðir. Þar sem þessir sjö hlutar gera alls 63 kúlur þá er stærð hvers hluta 9 kúlur. Rauðu kúlurnar, tveir hlutar alls, eru því $2 \cdot 9 = 18$ talsins.

2. Hvert er gildi stærðarinnar $\dfrac{4^a}{8^b}$ ef $2a = 3b + 5$?

☐ 8 ☐ 16 ☒ 32 ☐ 64

Skýring: Ritum $4 = 2^2$ og $8 = 2^3$ og fáum:

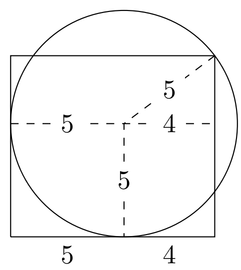
$$\frac{4^a}{8^b} = \frac{2^{2a}}{2^{3b}} = 2^{2a-3b} = 2^5 = 32$$

3. Jákvæðu heiltölurnar a og b uppfylla $a^4 = b^2 + 71$. Hver er summan $a + b$?

☐ 37 ☒ 41 ☐ 48 ☐ 51

Skýring: $71 = a^4 - b^2 = (a^2 - b)(a^2 + b)$. Þar sem 71 er frumtala er annar þáttur margfeldisins 1 og hinn þátturinn 71; $a^2 - b = 1$ og $a^2 + b = 71$. Þá fæst að $2a^2 = 72$ og því er $a^2 = 36$. Þar sem a er jákvæð er $a = 6$ og þá $b = 71 - 36 = 35$. Þá má reikna $a + b = 6 + 35 = 41$.

4. Á myndinni sjást rétthyrningur og hringur. Hringurinn snertir tvær hliðar rétthyrningsins og einn hornpunkta hans. Snertipunktur hrings við lárétta hlið rétthyrningsins skiptir hliðinni í tvo hluta af lengd 5 og 4 eins og sýnt er. Hvert er flatarmál rétthyrningsins?



☐ 63 ☒ 72 ☐ 81 ☐ 90

Skýring: Eins og myndin sýnir er geisli hringsins 5 og þá, með hjálp reglu Pyþagórasar, reiknast hæð rétthyrningsins $5+3 = 8$. Flatarmál rétthyrningsins er því 72.

5. Edda hljóp 1000 m hlaupabraut á 380 sekúndum. Hún hljóp fyrstu 720 m brautarinnar á 3 m/s jöfnum hraða. Hún hljóp það sem eftir var á jöfnum hraða. Hver var sá hraði?

☒ 2 m/s ☐ 3 m/s ☐ 4 m/s ☐ Annað

Skýring: Hún hleypur fyrstu 720 m á $720/3 = 240$ sekúndum. Restina af hlaupinu, 1000-720=280 m hleypur hún á $380 - 240 = 140$ sekúndum sem gerir $280/140 = 2$ m/s.

6. Hversu margar 5 stafa jákvæðar heiltölur hafa þversummuna 3?

☐ 10 ☐ 11 ☐ 14 ☒ 15

Skýring: 3 getum við ritað sem summu jákvæðra heiltalna á þrjá vegu: 3, $1+2$ og $1+1+1$.

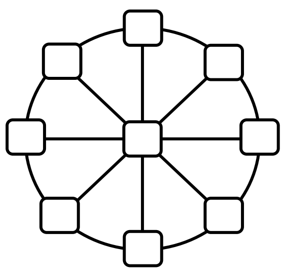
3	300000
1,2	12000,10200,10020,10002
	21000,20100,20010,20001
1,1,1	11100,10110,10011
	11010,11001,10101

7. Rétthyrndur kassi (ferstrendingur) hefur hliðarlengdir x, y og z. Flatarmál hliða kassans eru 24, 24, 48, 48, 72 og 72. Hver er summan $x + y + z$?

☐ 20 ☒ 22 ☐ 24 ☐ 30

Skýring: Táknum hliðar kassans, í vaxandi röð, með x, y og z. Þá fæst $xy = 24$, $xz = 48$ og $yz = 72$. Fyrstu tvær jöfnurnar gefa $z/y = 2$ sem leyfir umritun 3ju jöfnu á formið $2y^2 = 72$. Þá fæst að $y = 6$ og þá $x = 4$ og loks $z = 12$. Summan er þá $4 + 6 + 12 = 22$

8. Velja skal jákvæðar heiltölur og setja í reitina. Fyrir sérhverjar þrjár tölur sem liggja á beinni línu í gegnum hringinn verður summa þeirra að vera 13. Summa talnanna átta í reitunum sem liggja á hringnum verður að vera 40. Hvaða tölu þarf að setja í miðjuna til að skilyrði séu uppfyllt?



☐ 1 ☒ 3 ☐ 5 ☐ Annað

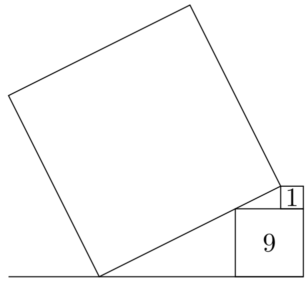
Skýring: Ef við leggjum saman tölurnar á hverri beinu línanna gegnum miðju hringsins þá fæst $4 \cdot 13 = 52$ og þá er miðjutalan talinn 4 sinum. þar sem summa talnanna á hringum er 40 fæst $52 = 40 + 4 \cdot$ (miðjutala). Miðjutalan er því 3.

9. Hversu mörg hlutmengi mengisins $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ innihalda a.m.k. eina frumtölu?

☐ 128 ☐ 192 ☐ 224 ☒ 240

Skýring: Heildarfjöldi hlutmengja af þessu 8 staka mengi er 2^8. Hlutmengin þar af sem innihalda enga frumtölu eru hlutmengi mengisins $\{4, 6, 8, 9\}$, sem eru 2^4 talsins. Fjöldi hlutmengja sem innihalda þá a.m.k. 1 frumtölu eru $2^8 - 2^4 = 256 - 16 = 240$ talsins.

10. Ferningur hefur verið lagður upp að tveimur minni ferningum, annar að flatarmáli 1 og hinn að flatarmáli 9. Hvert er flatarmál stóra ferningsins?



☐ 49 ☒ 80 ☐ 81 ☐ 100

Skýring: Milli ferninganna myndast tveir einslaga rétthyrndir þríhyrningar. Hlutfall skammhliða þess minni er 1:2. Hið sama gildir um stærri þríhyrninginn, svo lengri skammhlið hans er því 6. Hlið stóra ferningins er því langhlið í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðar 4 og 8. Flatarmál stóra ferningsins er því $4^2 + 8^2 = 80$.

Annar hluti

11. Kanína sér 24 metra frá sér. Refur getur hlaupið tvöfalt hraðar en kanína. Ef kanína nær að holu sinni á undan refnum þá sleppur hún frá honum. Hve langt er kanínu óhætt að fara frá holu sinni, samkvæmt þessu?

Svar: 8m

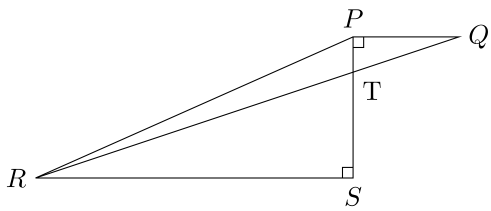
Skýring: Ef kanínan og refurinn eru sömu megin við holuna, í beinni línu frá holunni, þá getur kanínan farið allt að 12m frá holu sinni. Ef kanínan og refurinn eru sitt hvoru megin við holuna, bein lína liggur gegnum ref, holu og kanínu og 24m eru milli þeirra þá nær kanínan holunni á sama tíma og refurinn ef hún var 8m frá holunni og refurinn 16m frá holunni. Hún má því í mesta lagi fara 8m frá holu sinni.

12. Klukkan er nákvæmlega þrjú. Hversu langan tíma (í mínútum) tekur það stóra vísinn að ná þeim litla þannig að vísarnir tveir bendi í nákvæmlega sömu átt?

Svar: $\frac{180}{11}$ mínútur

Skýring: Stóri vísir fer einn hring á 60 mín sem svarar til $6°$ á mín. Litli vísir fer einn tólfta úr hring á 60 mín sem svarar til $\frac{1}{2}^{\circ}$ á mínútu. Litli vísir er með $90°$ forskot á stóra vísi þegar klukkan er þrjú svo hér fæst jafnan $90° + x \cdot \frac{1}{2}^{\circ} = x \cdot 6°$ og þá fæst $x = \frac{180}{11}$ mínútur.

13. Á myndinni til hliðar eru gefnar lengdirnar $PS = 8$, $PQ = 6$ og $RS = 18$. Hvert er flatarmál þríhyrningsins PTR?



Svar: 18 flatareiningar

Skýring: Þríhyrningar TPQ og TSR eru einslaga. Nú er $PQ : SR$ er $1 : 3$ svo $PT : TS$ er $1 : 3$. Þar sem $PS = 8$ þá er $PT = 2$ og flatarmál $PRT = \frac{1}{2} \cdot PT \cdot SR = 18$ flatareiningar.

14. Fallið f er þannig að fyrir allar jákvæðar heiltölur n gildir að

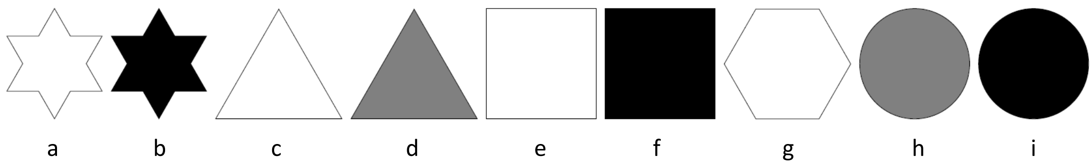
$$f(4+n^2) = an + 2 \quad \text{og} \quad f(9-n^2) = 3n - b$$

þar sem a og b eru rauntölur. Hvert er fallgildið $f(13)$?

Svar: -7

Skýring: Ef $n = 1$ fæst að $f(5) = a + 2$ og $f(8) = 3 - b$. Ef $n = 2$ fæst að $f(8) = 2a + 2$ og $f(5) = 6 + b$. Við fáum hér tvær jöfnur $a + 2 = 6 + b$ og $3 - b = 2a + 2$. Leysum þær saman og fáum að $a = -3$ og $b = 7$. Því er $f(4+n^2) = -3n + 2$ og $f(9-n^2) = 3n - 7$. Þá fæst með fyrri fallforskriftinni að $f(13) = f(4+3^2) = -3 \cdot 3 + 2 = -7$.

15. Á vegg hanga níu myndir merktar með bókstöfum:



Kári á sér eina uppáhaldsmynd. Ari veit að Bella þekkir hvaða form uppáhaldsmynd Kára hefur. Bella veit að Ari þekkir litinn á uppáhaldsmynd Kára. *Ari segir:* Ég veit ekki hver uppáhaldsmynd Kára er en ég veit að Bella veit það ekki heldur. *Þá segir Bella:* Fyrst vissi ég ekki hver uppáhaldsmynd Kára væri en núna veit ég hver hún er. *Ari:* Nú veit ég það líka. Hvaða bókstafur stendur við uppáhaldsmynd Kára?

Svar: d

Skýring: Bella þekkir formið og út frá litnum getur Ari dregið þá ályktun að formið eitt dugir ekki til að ákvarða myndina. Formið eitt getur einugis dugað til ákvarða myndina ef myndin væri hvíti sexhyrningurinn. Ari veit að formið dugar ekki til ákvarða myndina. Þar með getur liturinn ekki verið hvítur því þá kæmi hvíti sexhyrningurinn til greina.

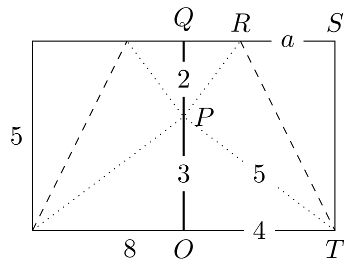
Þegar Bella heyrir að Ari veit að formið eitt dugar ekki til ákvarða myndina áttar hún sig á að liturinn getur ekki verið hvítur og eftir að hvítar myndir hafa verið útilokaðar þá dugar formið til ákvarða myndina. Þar með er ljóst að myndirnar sem koma til greina eru svört stjarna, grár þríhyrningur eða svartur ferningur.

Þegar Ari heyrir svo að nú dugi formið til að ákvarða myndina þá nægir liturinn til ákvarða myndina. Þar með hlýtur rétta myndin að vera grái þríhyrningurinn því liturinn getur ekki skilið á milli svartrar stjörnu og svarts fernings.

Eina myndin sem kemur því til greina er grái þríhyrningurinn.

Þriðji hluti

16. Rétthyrnt blað af lengd 8 cm og breidd 5 cm er brotið eftir strikalínum, eins og sýnt er, þannig að tvö horn blaðsins snertast, eins og punktalínur sýna. Hvert er flatarmál trapisunnar sem myndast við brotið?



Lausn: Aðferð 1 (Regla Pyþagórasar): Segjum að hornin tvö snertist í punkti P. Lína gegnum P hornrétt á langhliðar rétthyrningsins er miðþverill beggja hliða. Köllum skurðpunktana O og Q. Þá er $OT = 4$ cm og þar sem $PT = TS = 5$ cm verður $OP = 3$ cm (regla Pyþagórasar) og þá $PQ = 2$. Táknum lengd SR með a. Þá er $RP = a$ og $RQ = 4-a$. Með reglu Pýþagórasar fæst $a^2 = 2^2 + (4-a)^2 = 20 - 8a + a^2$ svo $a = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ Þá er $QR = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$ cm og flatarmál trapisunnar því $\frac{1}{2} \cdot (8 + 2QR) \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 5 = 27{,}5\ \text{cm}^2$

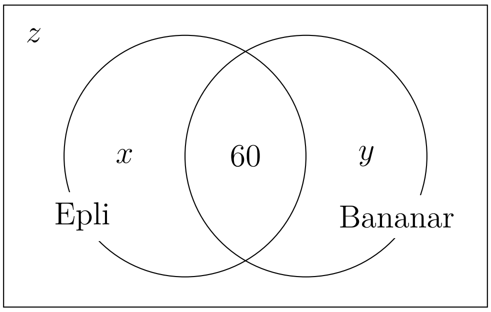
Aðferð 2 (Einslaga þríhyrningar): Lína gegnum P þvert á langhliðar rétthyrnings er miðþverill beggja hliða. Þar sem hornið $\angle RPT = \angle RQP = \angle POT = 90°$ þá er $\angle QPR = \angle PTO$. Þríhyrningarnir PQR og POT eru þá einslaga. Sér í lagi gildir að $QR : QP = 3 : 4$ svo $QP = \frac{3}{2}$. Þar sem Q er miðpunktur langhliðar fæst að flatarmál trapisunnar er $\frac{1}{2} \cdot (8 + 2QR) \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 5 = 27{,}5\ \text{cm}^2$

17. Hópur nemenda var spurður um banana og epli. Svörin voru á þann veg að

- 30% nemenda fannst epli ekki góð;
- 36 nemendum fannst bananar ekki góðir;
- 60 nemendum fannst bæði epli og bananar góðir;
- 48 fannst aðeins annar ávöxturinn góður en ekki hinn.

Hve mörgum fannst hvorki bananar né epli góð?

Lausn: Teiknum Venn mynd



Upplýsingarnar getum við sett fram í formi jafna m.t.t. x, y og z:

$$x + z = 36 \quad \text{(i)}$$
$$x + y = 48 \quad \text{(ii)}$$
$$0.3(x + 60 + y + z) = z + y \quad \text{(iii)}$$

Ef við drögum jöfnu (ii) frá jöfnu (i) fæst $y - z = 12$. Svo $y = z + 12$. Skoðum nú jöfnu (iii); notum jöfnu (ii) til að einfalda vinstri hlið jöfnu (iii) og notum $y = z + 12$ til að einfalda hægri hlið:

$$0.3(48 + 60 + z) = z + z + 12 \quad \text{svo} \quad \tfrac{3}{10}(108 + z) = 2z + 12$$

Þá fæst að $324 + 3z = 20z + 120$ og því $z = \frac{204}{17} = 12$. Alls 12 nemendum fannst hvorki bananar né epli góð.

Viðbót: Skv. jöfnu (i) er $x = 36 - 12 = 24$ og skv. jöfnu (ii) er $y = 48 - 24 = 24$. Heildarfjöldi spurðra er því $x + 60 + y + z = 24 + 60 + 24 + 12 = 120$

18. Ákvarða skal allar talnaþrenndir (p, q, n) þar sem p og q eru frumtölur og n er jákvæð heiltala þannig að eftirfarandi gildi:

$$p^2 = q^2 + 2^n$$

Lausn: 1) Athugum fyrst að hvorki getur gilt $p = 2$ eða $q = 2$ því þá þyrfti bæði að gilda $p = 2$ og $q = 2$ því önnur hlið jöfnunnar væri slétt tala og því hin hliðin líka að vera slétt tala. En $2^2 = 2^2 + 2^n$ getur ekki gilt fyrir neitt gildi á n. Þar með er ljóst p og q eru oddatölur.

Jöfnuna má umrita í

$$(p - q)(p + q) = p^2 - q^2 = 2^n.$$

Svo til eru náttúrulegar tölur i og j þannig að

$$p - q = 2^j \quad \text{og} \quad p + q = 2^i.$$

Þá er ljóst að $i > j$ og

$$2p = 2^i + 2^j = 2^j(2^{i-j} + 1) \quad \text{og} \quad 2q = 2^i - 2^j = 2^j(2^{i-j} - 1).$$

En þar sem p er oddatala þá þarf að gilda $j = 1$.

Við höfum því $p = 2^{i-1} + 1$ og $q = 2^{i-1} - 1$. Nú eru $q = 2^{i-1} - 1, 2^{i-1}$ og $p = 2^{i-1} + 1$ þrjár heiltölur í röð svo einhver af þeim hlýtur að vera deilanleg með 3. En þar sem $q < p$ þá hlýtur að gilda $q = 3$. En þá er $p = 5$ og

$$25 = 5^2 = 3^2 + 2^n = 9 + 2^n$$

hefur lausn þá og því aðeins að $n = 4$.

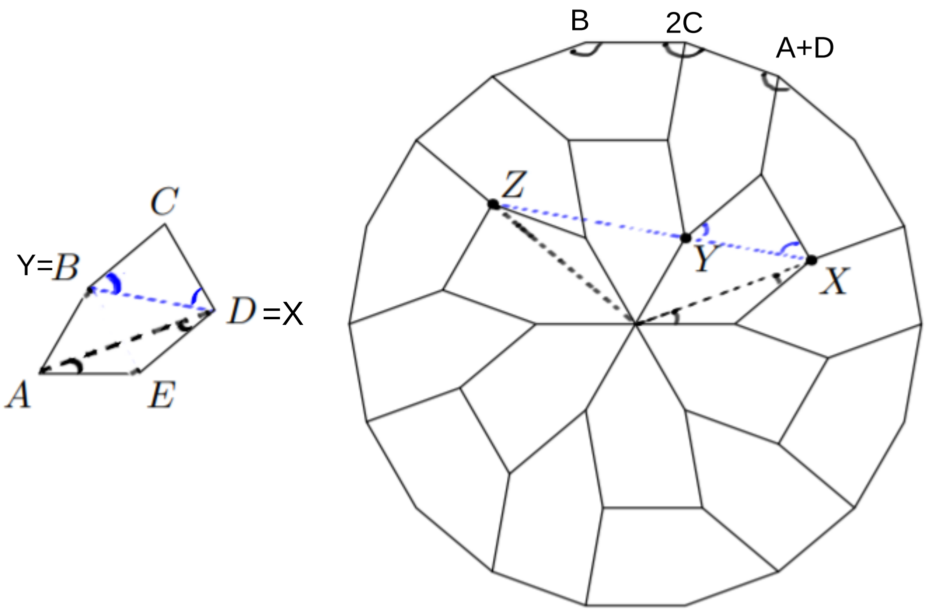
Eina lausnin er því $(p, q, n) = (5, 3, 4)$.

Lausn: 2) Önnur leið til að sýna að $q = 3$ er eftirfarndi:

Tökum eftir að $p > q$ og þar sem $p > q > 2$ þá er $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Enn fremur er ljóst að $2^n \equiv 1$ eða $2^n \equiv 2 \pmod 3$. Í fyrra tilfellinu þarf $q^2 \equiv 0 \pmod 3$ sem gildir bara ef $q = 3$. Í seinna filfellinu þarf $q^2 \equiv 2 \pmod 3$ sem gildir aldrei.

Eins of fyrri lausninni gefur svo þáttunin að $p = q + 2 = 5$ og við sýnum svo að $(p, q, n) = (5, 3, 4)$ er eina lausnin.

19. Reglulegum 18 hyrningi er skipt í 18 fimmhyrninga sem allir eru eins og fimmhyrningurinn $ABCDE$ á meðfylgjandi mynd. Hliðar fimmhyrningsins $ABCDE$ eru allar jafnlangar.



Ákvarðið stærð hornanna A, B, C, D og E í fimmhyrningnum og sýnið að punktarnir X, Y og Z liggja á sömu línu.

Lausn: Tökum eftir að í myðjunni mætast sex fimmhyrningar á horninu A. Svo við fáum $6A = 360°$ eða $A = 60°$.

Hornið B myndar horn í reglulega 18 hyrningnum svo $B = 180° \cdot (18 - 2)/18 = 160°$.

Hornið C í tveimur fimmhyrningum myndar horn í reglulega 18 hyrningnum svo $2C = 160°$ eða $C = 80°$.

Hornin A og D mynda saman horn í reglulega 18 hyrningnum svo $A+D = 160°$ svo $D = 100°$.

Hornasumma fimmhyrnings er $(5-2)\cdot 180° = 540°$ svo $A+B+C+D+E = 540°$ sem gefur $E = 540° - 60° - 160° - 80° - 100° = 140°$.

Við viljum nú sýna að X, Y og Z liggja á sömu línu. Köllum miðpunkt reglulega 18 hyrningsins O (punkturinn þar sex fimmhyrningar koma saman á horninu A). Okkur nægir þá að sýna að $\angle ZXO = \angle YXO$.

Athugum að ef 18 hyrningnum er snúið um $120°$ réttsælis þá lendir Z ofan í X. Þar með er þrýhyringurinn OXZ jafnarma með topphorn $120°$. Þá er ljóst að $\angle ZXO = 30°$.

Tökum nú eftir að X og Y samsvara hornunum D og B í fimmhyrningnum $ABCDE$ og $\angle YXO = \angle BDA$. Enn fremur er $D = \angle CDB + \angle BDA + \angle ADE$. Þríhyrningarnir BDC og AED eru jafnarma með topphorn $80°$ og $140°$. Því eru $\angle CDB = 50°$ og $\angle ADE = 20°$. Þar með er ljóst að $\angle BDA = D - \angle CDB - \angle ADE = 100° - 50° - 20° = 30°$.

Þar með höfum við sýnt að $\angle ZXO = \angle YXO = 30°$ svo punktarnir X, Y og Z liggja á sömu línu.