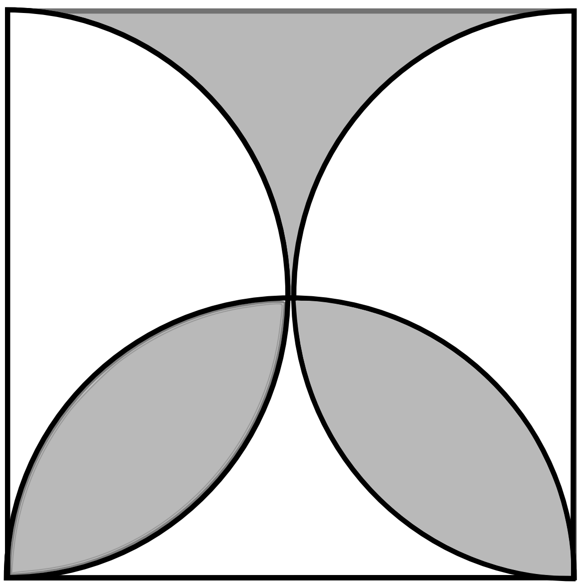
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2021–2022

Svör og lausnir

Efra stig



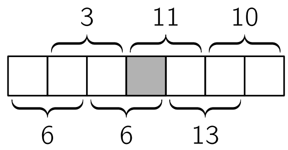
Fyrsti hluti

1. Ef $2 = 4^{2x}$, þá er x jafnt og

☐ 0 ☒ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1

Skýring: Við fáum að $2^1 = 2 = 4^{2x} = (2^2)^{2x} = 2^{2\cdot 2x} = 2^{4x}$. Því fæst að $1 = 4x$, það er $x = \frac{1}{4}$.

2. Regína raðar tölustöfunum 1,2,3,4,5,6,7 í reitina til hægri. Tölurnar við slaufusvigana standa fyrir summu nágrannatalna. Hvaða tölustafur verður að standa í gráa reitnum til að þetta gangi upp?



☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

Skýring: Summa talnanna í öðru og þriðja sætinu getur aðeins orðið 3 ef þær eru 1 og 2. Ef talan 2 er í sæti þrjú, þá er talan $6 - 2 = 4$ í sæti fjögur, svo 7, 6, 4. Þetta stenst ekki þar sem 4 kemur tvisar fyrir en 3 aldrei.

Ef talan 1 er í sæti þrjú þá fæst röðin $4, 2, 1, 5, 6, 7, 3$ sem er lausn. Þetta sýnir talan í miðjunni er 5.

3. Í Húsdýragarðinum telur Anna kýr og hesta, samtals 12 dýr. Breki telur kýr og grísi, samtals 22 dýr. Díana telur hesta og grísi, samtals 24 dýr. Einar telur kýr, hesta og grísi. Hvaða tölu fær hann?

☐ 26 ☒ 29 ☐ 34 ☐ 48

Skýring: Ef k er fjöldi kúa, h fjöldi hesta og g fjöldi grísa þá höfum við

$$\begin{aligned} k + h &= 12 \\ k + g &= 22 \\ h + g &= 24 \end{aligned}$$

Ef við leggjum allar jöfnurnar saman fæst

$$2(k + h + g) = (k + h) + (k + g) + (h + g) = 12 + 22 + 24 = 58.$$

Í orðum: Ef við leggjum saman talningar Önnu, Breka og Díönu þá fáum við $12 + 22 + 24 = 58$. Þetta er tvítalning á öllum dýrunum. Því fæst að fjöldi dýranna sem Einar telur er $k + h + g = \dfrac{58}{2} = 29$.

Reyndar má sýna að það eru 5 kýr, 7 grísir og 17 hestar.

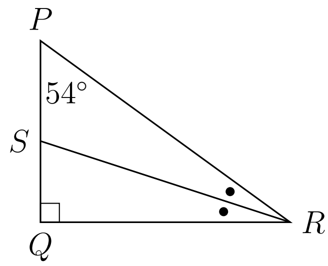
4. Í dæminu hér til hliðar standa P, Q og R fyrir ólíkar jákvæðar heiltölur (allar minni en 10). Hvert er gildið á $P+Q+R$?

$$\begin{array}{cccc} & P & 7 & R \\ + & 3 & 9 & R \\ \hline & R & Q & 0 \end{array}$$

☒ 13 ☐ 12 ☐ 14 ☐ 3

Skýring: Með því að skoða einingarsætið þá sæst að $R=0$ eða $R=5$. Þar sem $P7R+39R=RQ0$ þá sést að $R \geqq 3$. Því er $R=5$. Því flyst einn í tugasætið þegar einingarnar eru lagar saman. Því fæst að $Q=7$ og við þurfum að flytja einn í hundraðasætið við samlagningu tuganna. Því fæst $P+3+1=R=5$. Við ályktum að $P=1$. Því fæst að $P+Q+R=1+7+5=13$.

5. Á myndinni er $\triangle PQR$ rétthyrndur með Q rétt og $\measuredangle QPR=54°$. Punktur S liggur á PQ þannig að $\measuredangle PRS=\measuredangle SRQ$. Hvað er $\measuredangle QSR$ stórt?



☐ 18° ☐ 36° ☐ 54° ☒ 72°

Skýring: Nú er $\measuredangle PQR=90°$ og $\measuredangle QPR=54°$. Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180° þá fæst að $\measuredangle PQR+\measuredangle QPR+\measuredangle PRQ=180°$. Það er $\measuredangle PRQ=180°-\measuredangle PQR-\measuredangle QPR=180°-90°-54°=36°$.

Þar sem $\measuredangle PRS=\measuredangle SRQ$ og $\measuredangle PRS+\measuredangle SRQ=\measuredangle PRQ$. Þá fæst að $2\cdot\measuredangle SRQ=\measuredangle PRQ=36°$. Því er $\measuredangle SRQ=18°$.

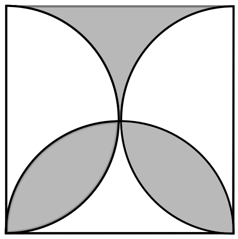
Nú er $\measuredangle SQR=\measuredangle PQR=90°$. Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180° þá er $\measuredangle SQR+\measuredangle SRQ+\measuredangle QSR=180°$. Því er $\measuredangle QSR=180°-\measuredangle SQR-\measuredangle SRQ=180°-90°-18°=72°$.

6. Auðun álfur og Trausti tröll hittast. Auðun segir alltaf satt og Trausti lýgur alltaf. Báðir segja nákvæmlega sömu setninguna. Hvaða setning getur það verið?

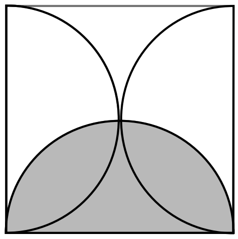
☐ Við segjum báðir satt ☐ Ég lýg alltaf ☒ Ég segi satt ☐ Annar okkar segir satt og hinn lýgur

Skýring: Þar sem Auðun segir alltaf satt þá getur hann ekki sagt að þeir segi báðir satt. Þar sem Auðun segir alltaf satt þá myndi hann ekki segja að hann lygi alltaf. Auðun getur sagt (satt frá) að hann segi satt. Eins getur Trausti sagt (ósatt) að hann segi satt. Þar sem það er satt að annar þeirra segi satt en hinn ljúgi þá getur Trausti ekki sagt að annar þeirra segi satt en hin ljúgi.

7. Á myndinni er ferningur með hliðarlengd 2. Þrír hálfhringir skerast í miðjum ferningnum. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



☐ $2 - \frac{\pi}{2}$ ☐ $4 - \pi$ ☐ $4 - \frac{3\pi}{4}$ ☒ $\frac{\pi}{2}$



Skýring: Ef við snúum efra skyggða svæðinu um háfhring um miðju ferhyrningsins þá fáum við neðra óskyggða svæðið.Við göngum út frá því að þessi snúningur varðveiti flatarmál. Við gerum líka ráð fyrir því að reikna megi flatarmál skyggað svæðisins með því að leggja sama flatarmál hvers hinna þriggja búta sem það er setta saman úr. Við fáum því að flatarmál skyggða svæðisins er það sama og flatarmál neðri hálfhringskífunnar.
Þar sem hliðarleng ferningsins er 2 þá er það þvermál háflhringskífunnar. Því er geisli hennar 1. Sé gert ráð fyrir að flatarmál hringskífu með geisla r sé $\pi \cdot r^2$ þá fæst að flatarmál hringskífu með geisla 1 er π. Nú er hringskífa sett saman úr tveimur hálfhringskífum. Gerum ráð fyrir að flatarmál hringskífu megi fá með því að leggja sama flatarmál hvorrar hálfhringskífu fyrir sig og að hvor hálfhringskífa hafi sama flatarmál. Því fæst að hálfhringskífa hefur hálft flatamál tilsvarandi hringskífu. Þar með fæst að flatarmál neðri hringskífunnar á myndinni er $\frac{\pi}{2}$. Þar sem það er flatarmál skyggða svæðisins þá fæst að það er $\frac{\pi}{2}$.

8. Íssali nokkur býr dag einn til 20 kg af ísblöndu. Hann selur stóra og litla ísa. Lítill ís kostar 12 kr. og er 2 ískúlur en stór kostar 16 kr. og er 3 ískúlur. Úr einu kg af ísblöndu fást 12 ískúlur. Í lok dagsins hefur hann selt allan ísinn fyrir 1376 kr. Hvað hefur hann selt marga stóra ísa þann dag?

☐ 17 ☐ 24 ☒ 32 ☐ 43

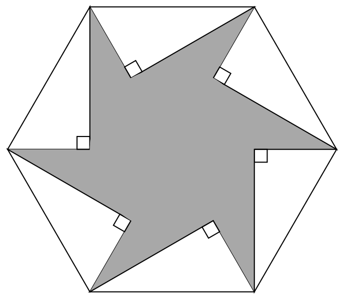
Skýring: Íssalinn á efni í $20 \cdot 12 = 240$ ískúlur. Látum s vera fjölda stórra ísa sem íssalinn hefur selt og l fjölda lítilla ísa. Þá fæst fyrri jafnan út frá fjölda ískúlna, og seinni út frá krónunum:

$$\begin{cases} 3s + 2l = 240 \\ 16s + 12l = 1376 \end{cases}$$

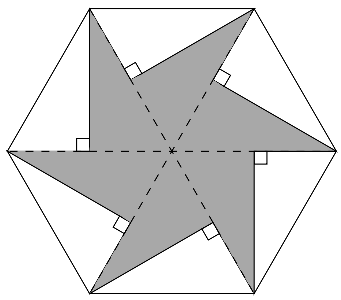
Þá er

$$\begin{aligned} 6(3s + 2l) - (16s + 12l) &= 6 \cdot 240 - 1376 \\ 18s + 12l - 16s - 12l &= 1440 - 1376 \\ 2s &= 64 \\ s &= 32 \end{aligned}$$

9. Úr reglulegum 6-hyrningi, með lengstu hornalínur 12 cm eru sex 30°-60°-90° þríhyrningar klipptir eins og sýnt er á mynd. Hvert er flatarmál sagarblaðsins (skyggða svæðisins) sem myndast?



☐ $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ☒ $27\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ☐ $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ☐ $54\sqrt{3}\,\text{cm}^2$



Skýring: Drögum hornalínur sexhyrningsins. Þær skerast allar í miðju hans og skipta honum í sex jafnhliða þríhyrninga, hver með helming skyggðan og því er sagarblaðið helmingur flatarmáls sexhyrningsins. Þar sem lengd lengstu hornalínu er 12 cm þá er hliðarlengd sexhyrningsins 6 cm.
Hæð jafnarma þríhyrnings með grunnlínu x er $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ og því er flatarmál hans $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2$. Það þýðir að flatarmál hvers hinna 6 jafnhliða þríhyrninga er $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6\,\text{cm})^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Þar af leiðir að flatarmál sexhyrningsins er $6 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Sagarblaðið hefur því flatarmál $\frac{1}{2} \cdot 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 27\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

10. Á hvaða tölustaf endar 2^{2021} ?

☒ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8

Skýring: Fyrstu veldin af 2 eru $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$. Síðasti tölustafurinn í næsta veldi af 2 ræðst bara af síðasta staf veldisins fyrir ofan, svo mynstrið $2, 4, 8, 6, 2, 4, \ldots$ endurtekur sig endalaust. Fjórða hver tala endar þá á 6, svo $2^{2020} = 2^{4 \cdot 505}$ hefur síðasta tölustaf 6, svo 2^{2021} endar á 2.

Annar hluti

11. Blær ekur 42 km til vinnu. Vegna framkvæmda kemst hán aðeins með hraða 12 km/klst fyrstu 21 km. Hve hratt þarf hán að aka seinni 21 km leiðarinnar til að ná meðalhraða 20 km/klst fyrir alla leiðina?

Svar: 60km/klst.

Skýring: Látum v_1 vera ökuhraða, d_1 vera vegalengd og t_1 vera tímann fyrri hluta leiðarinnar. Látum v_2 ökuhraða, d_2 vera vegalengd og t_2 vera tímann seinni hluta leiðarinnar. Þá er $v_1 = \dfrac{d_1}{t_1}$ og $v_2 = \dfrac{d_2}{t_2}$. Jafngilt er $t_1 = \dfrac{d_1}{v_1}$ og $t_2 = \dfrac{d_2}{v_2}$.

Látum v vera meðalhraða alla leiðina, $d = d_1 + d_2$ vera heildarvegalengdina og $t = t_1 + t_2$ vera heildartímann. Þá er $v = \dfrac{d}{t}$. Setjum inn fyrir d og t og fáum:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\frac{d}{t}} = \frac{t}{d} = \frac{t_1 + t_2}{d_1 + d_2} = \frac{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}}{d_1 + d_2} = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \cdot \frac{1}{v_2}$$

Því fæst:

$$\frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v} - \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{1}{v_1}$$

og þar með:

$$v_2 = \frac{1}{\frac{d_1 + d_2}{d_2} \cdot \frac{1}{v} - \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{v_1}} = \frac{d_2 \cdot v \cdot v_1}{(d_1 + d_2) \cdot v_1 - d_1 \cdot v}$$

Gefið er að $d_1 = 21\text{km}$, $d_2 = 21\text{km}$, $v_1 = 12\text{km/klst.}$ og $v = 20\text{km/klst.}$ svo við fáum að meðalhraði Blær seinni hluta leiðarinnar, það er v_2 er:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{21\text{km} \cdot 20\text{km/klst.} \cdot 12\text{km/klst.}}{(21\text{km} + 21\text{km}) \cdot 12\text{km/klst.} - 21\text{km} \cdot 20\text{km/klst.}} \\ &= \frac{5040\text{km}^3/\text{klst}^2}{84\text{km}^2/\text{klst.}} \\ &= 60\text{km/klst.} \end{aligned}$$

12. Hver er stærsta frumtalan sem gengur upp í $4^{11} - 2^{12}$?

Svar: 31.

Skýring: Nú fæst:

$$\begin{aligned}
4^{11} - 2^{12} &= (2^2)^{11} - 2^{12} \\
&= 2^{2\cdot 11} - 2^{12} \\
&= 2^{12+10} - 2^{12} \\
&= 2^{12} \cdot 2^{10} - 2^{12} \\
&= 2^{12} \cdot (2^{10} - 1) \\
&= 2^{12} \cdot (2^{5\cdot 2} - 1) \\
&= 2^{12} \cdot ((2^5)^2 - 1^2) \\
&= 2^{12} \cdot (2^5 + 1) \cdot (2^5 - 1) \\
&= 2^{12} \cdot (2 + 1) \cdot (2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1 + 2^0) \cdot 2^5 - 1) \\
&= 2^{12} \cdot 3 \cdot (16 - 8 + 4 - 2 + 1) \cdot (32 - 1) \\
&= 2^{12} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31
\end{aligned}$$

Nú eru allar tölurnar 2, 3, 11 og 31 óþáttanlegar í heiltölunum (ef þær væru þáttanlegar þá mætti skrifa þær sem margfeldi náttúrlegra talna sem eru minni en þær en einföld prófun sýnir að svo sé ekki). Þar sem óþáttanlegar heiltölur eru frumtölur þá eru 2, 3, 11 og 31 allt frumtölur. Af grundvallarsetningu reikningslistarinnar leiðir að frumþáttun sérhverra náttúrlegra tölur er ótvíræð. Við ályktum að 2, 3, 11 og 31 séu einu frumtölurnar sem ganga upp í $4^{11} - 2^{12}$ og 31 er þeirra stærst.

13. Gerum ráð fyrir að x og y séu rauntölur þannig að $xy = 3$. Hvert er minnsta gildið sem $x^2 + y^2$ getur haft?

Svar: 6

Skýring: Athugum að $x^2 + y^2 = 2xy + (x - y)^2 = 2 \cdot 3 + (x - y)^2 = 6 \cdot (x - y)^2$. Þar sem $(x - y)^2 \geq 0$ og $(x - y)^2 = 0$ ef og aðeins ef $x = y$ þá er $x^2 + y^2 \geq 6$ og jafnan gildir ef og aðeins ef $x = y$. Ef $x = y = \sqrt{3}$ þá er $xy = 3$ og $x^2 + y^2 = 6$. Þess vegna er 6 minnsta gildið sem $x^2 + y^2$ getur tekið af því gefnu að $xy = 3$.

14. Alls sitja 25 riddarar við hringborð. Þrír riddarar eru valdir af handahófi til að fást við erfiðan dreka. Á hve marga vegu má velja þessa þrjá, þannig að a.m.k. tveir þeirra sitji hlið við hlið?

Svar: 550.

Skýring: Veljum tvo riddara hlið við hlið með því að velja bara þann sem á að vera á vinstri hönd, sem má gera á 25 vegu, því hinn ákvarðast út frá því. Ef þriðji riddarinn er ekki við hlið þeirra þá eru 21 sæti sem koma til greina fyrir hann. Ef riddararnir þrír eru allir í röð er það einnig valið á 25 vegu. Fjöldinn er því $25 \cdot 21 + 25 = 550$.

15. Fyrstu tvö stök heiltalnarunu eru 1 og 3. Næsta stak í rununni er fundið með því að reikna mismun síðustu tveggja staka, $3 - 1 = 2$ og svo á sama hátt, $2 - 3 = -1$ og svo framvegis þannig að runan byrjar svona $1, 3, 2, -1, \ldots$ Hvert er þá stak númer 2021 í rununni?

Svar: -3.

Skýring: Köllum rununa $(a_n)_{n \geq 1}$. Þá er $a_1 = 1$ og $a_2 = 3$. Með því að beita formúlunni $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ þá fæst að $a_3 = 2$, $a_4 = -1$, $a_5 = -3$, $a_6 = -2$, $a_7 = 1$ og $a_8 = 3$. Við sjáum því að $(a_1, a_2) = (1, 3) = (a_7, a_8)$. Þar sem hvert stak rununnar ákvarðast einungis af síðustu tveimur stökum þá fæst að $a_9 = a_3$, $a_{10} = a_4$ o.s.frv. Við fáum því að $a_{2021} = a_{2015} = a_{2009} = \ldots = a_5 = -3$.

Hægt er að lesa meira um dæmi með línulegum rakningarvenslum hér: `http://stae.is/sites/default/files/L_nuleg_rakningarvensl.pdf`

Þriðji hluti

16. Verslun selur epli í lokuðum pokum með 5, 8 eða 12 eplum. Ekki má opna poka til að breyta fjöldanum í pokanum. Hver er mesti fjöldi epla sem ekki er mögulegt að kaupa?

Lausn: Gerum ráð fyrir að n sé fjöldi epla sem við vilju kaupa. Vissulega má kaupa $n = 0$ epli með því að kaupa ekkert. Gerum ráð fyrir að $n > 0$. Þá má kaupa n epli ef og aðeins kaupa megi $n - 5$, $n - 8$ eða $n - 12$ epli þar sem að ef $n > 0$ þá þarf að kaupa einhvern poka og ef við teljum þann poka frá þá getum við keypt hin eplin með hinum pokunum. Rekjum okkur því upp með því að merkja o ef við getum keypt tiltekinn fjölda og x ef svo er ekki:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
o	x	x	x	x	o	x	x	o	x	o	x	o	o	x	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o

Við sjáum því að við getum ekki keypt 19 epli en við getum keypt 20, 21, 22, 23 og 24 epli. Ef við viljum kaupa fleiri en 24 epli þá getum við keypt 5 epla poka þangað til við eigum eftir að kaupa 24 eða færri epli. Rétt áður en við keyptum 5 epla pokan sem kom afgangnum niður fyrir 25 þá vorum við með 25 eða fleiri epli sem við áttum eftir að kaupa. Þegar við höfum keypt þenna 5 epla poka þá eigum við því eftir að kaupa að minnsta kosti 20 epli. Það er við getum keypt 5 epla poka þanngað til við eigum eftir að kaupa 20, 21, 22, 23 eða 24 epli en við vitum að við getum keypt þessa fjölda af eplum. Við sjáum því að ef við getum keypt hvaða fjölda sem er stærri en 19. Stærsti fjöldi sem ekki má kaupa er því 19.

17. Á hve marga vegu má raða níu ásum inn í venjulegt Sudoku?
Engir tveir ásar mega vera í sama dálki eða sömu línu, né í sama 3×3 ferningi með þykkri rönd. Dæmi um leyfilega uppröðun má sjá til hægri.

			1					
1								
								1
	1							
				1				
							1	
					1			
		1						
						1		

Lausn 1:

Við númerum 3×3 reitina frá 1 upp í 9 eins og á mynd til hægri. Setja má ás í fyrsta reitinn á 9 vegu. Sá ás útilokar eina línu í reit tvö og einn dálk í reit fjögur, í þeim reitum má velja ás á 6 vegu. Í reit fimm er þá búið að útiloka eina línu og einn dálk, sem skarast í einum reit, svo 4 reitir eru eftir sem koma til greina.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Í reitum þrjú og sex er búið að útiloka tvær línur, og því þrír möguleikar eftir í hvorum fyrir sig. Í reitum 7 og 8 er búið að útiloka tvo dálka, og því einnig 3 möguleikar í þessum reitum. í reit 9 er búið að útiloka tvær línur og tvo dálka, svo þar er aðeins 1 möguleiki.

Heildarfjöldi leiða til þess að fylla inn ásana er þá $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 46656$.

Athugasemd: Í svona dæmum eru gefin full stig fyrir rétta tölu, t.d. $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$ án þess að margfeldið sé reiknað út.

Lausn 2:

Ef settir eru ásar inn á borðið á leyfilegan máta, þá má merkja t.d. dálka 1-3 eftir því í hvaða 3×3 reit er ás í þeim dálki. T.d. ef ásinn í fyrsta dálknum er í miðreitnum þá merkjum við hann með 2, ef ásinn í næsta dálki er í neðsta reitnum merkjum við hann með 3 og ef ásinn í þriðja dálkinum er í efsta reitnum merkjum við hann með 1, eins og á mynd. Eins gerum við fyrir dálka 4-6 og 7-9, og svo eins fyrir línurnar.

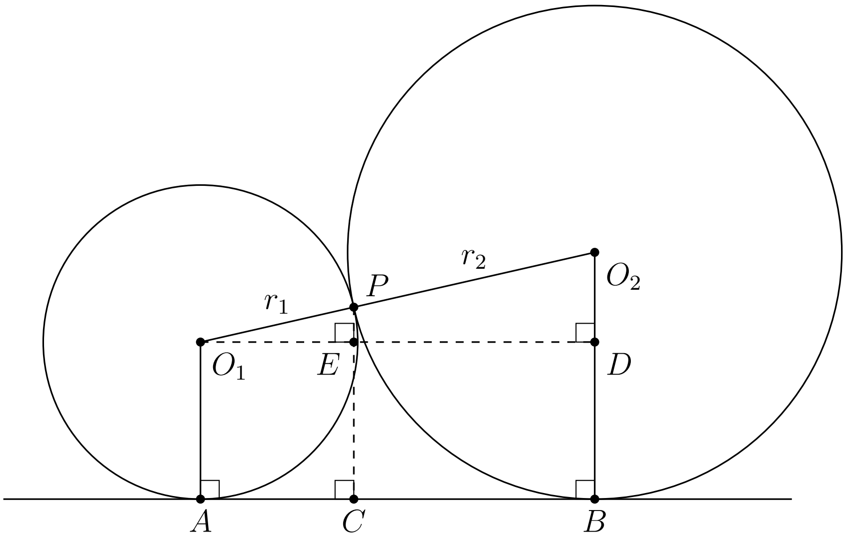
	2	3	1	2	3	1	2	1	3
1			1						
2						1			
3								1	
1	1								
2				1					
3							1		
2					1				
1		1							
3									1

Öfugt, þá ef gefnar eru svona raðanir á þrenndum dálka og lína, þá getum við skrifað ásana inn út frá því á nákvæmlega einn hátt. Svo fjöldi leiða til þess að raða inn ásunum er $(3!)^6 = 6^6 = 46656$.

18. Tveir kúlulaga boltar liggja á gólfi og snertast í einum punkti. Annar hefur þvermál 198 cm og hinn hefur þvermál 126 cm. Í hvaða hæð frá gólfinu er snertipunktur boltanna tveggja?

Lausn: Látum A og B vera snertipunkta smærri og stærri kúlunnar við gólfið. Látum P vera snertipunkt kúlanna. Látum O_1 vera miðpunkt smærri kúlunnar og O_2 vera miðpunkt þeirrar stærri. Látum $r_1 = 63$ cm og $r_2 = 99$ cm vera geisla þeirra, í sömu röð.

Látum C vera punktinn á gólfinu sem er beint undir P. Látum D vera punktinn undir O_2 sem er í sömu hæð og O_1, og E vera undir P í sömu hæð og O_1.



Þá er AO_1DB rétthyrningur svo $|O_1A| = |DB|$, og $|O_2D| = |O_2B| - |DB| = |O_2B| - |O_1A| = r_2 - r_1$. Einnig er $|O_1O_2| = r_1 + r_2$.

Því $\triangle O_1EP$ og $\triangle O_1DO_2$ hafa hornið $\angle DO_1O_2$ sameiginlegt auk þess sem hornin $\angle O_1EP$ og $\angle O_1DO_2$ eru rétt þá eru þríhyrningarnir $\triangle O_1EP$ og $\triangle O_1DO_2$ einslaga. Því fæst

$$\frac{|PE|}{|O_1P|} = \frac{|O_2D|}{|O_1O_2|}$$

Svo

$$|PE| = \frac{|O_2D|}{|O_1O_2|}|O_1P| = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot (r_2 - r_1)$$

Þannig fæst

$$|PC| = r_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot (r_2 - r_1) = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2 \cdot 63\text{cm} \cdot 99\text{cm}}{63\text{cm} + 99\text{cm}} = 77\text{cm}.$$

19. Finnið allar jákvæðar heiltölur m og n þannig að $2^m + 1 = 3^n$.

Lausn:

Lausn: Fyrir $m = 1$ fæst jafnan $3^n = 2^m + 1 = 2^1 + 1 = 3 = 3^1$ svo $n = 1$ er eina lausnin. Þetta sýnir að fyrir $m = 1$ þá er $n = 1$ og ljóst er að $(m, n) = (1, 1)$ er lausn.

Við megum því gera ráð fyrir að $m \geq 2$. Þá er $3^n - 1 = 2^m = 2^{2+(m-2)} = 2^2 \cdot 2^{m-2} = 4 \cdot 2^{m-2}$. Þetta sýnir að 4 gengur upp í 2^m og þar sem $3^n - 1 = 2^m$ þá gengur 4 upp í $3^n - 1$. Gerum ráð fyrir að $n = 2k$ sé slétt. Þá fæst:

$$\begin{aligned} 3^n - 1 = 3^{2k} - 1 &= \left(3^2\right)^k - 1 \\ &= (3^2 - 1)((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \ldots + 3^2 + 1) \\ &= 4 \cdot (2 \cdot ((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \ldots + 3^2 + 1)) \end{aligned}$$

Svo rita má $3^n - 1 = 4 \cdot l$ þar sem l er heiltala. Sér í lagi þá gengur 4 upp í $3^n - 1$ ef n er slétt. Gerum nú ráð fyrir að $n = 2k + 1$ sé oddatala. Þá er:

$$3^n - 1 = (3^{2k+1} - 3) + (3 - 1) = 3 \cdot (3^{2k} - 1) + 2 = 3 \cdot 4l + 2 = 4 \cdot (3l) + 2$$

Þetta sýnir að $3^n - 1$ gefur afganginn 2 úr deilingu með 4 og því gegnur 4 ekki upp í $3^n - 1$. Þar af leiðir að 4 gengur ekki upp í 3^n ef n er oddatala.

Þar sem 4 gengur upp í $3^n - 1$ þá ályktum við að n sé slétt, það er $n = 2k$. Þá fæst:

$$2^m = 3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = (3^k)^2 - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1)$$

Þar sem 2 er eini frumþáttur 2^m þá sést að 2 er einnig eini frumþáttur $3^k + 1$ og $3^k - 1$. Þetta þýðir að til eru náttúrlegar tölur s og t þannig að $3^k + 1 = 2^s$ og $3^k - 1 = 2^t$. Þar sem $3^k + 1 > 3^k - 1$ þá er $s > t$. Því fæst:

$$2 = (3^k + 1) - (3^k - 1) = 2^s - 2^t = 2^{(s-t)+t} - 2^t = (2^{s-t} - 1) \cdot 2^t$$

Þetta þýðir að 2^t gengur upp í 2 og því $t = 0$ eða $t = 1$. Ef $t = 0$ þá er $2^{s-t} - 1 = 2$ svo $2^{s-t} = 3$ sem stenst ekki þar sem 3 hefur 2 ekki sem frumþátt. Ef $t = 1$ þá er $2^{s-t} - 1 = 1$ og því $2^{s-t} = 2 = 2^1$ svo $s - t = 1$. Þá er $s = t + 1 = 2$.

Nú er $3^k + 1 = 2^s = 2^2 = 4$ svo $3^k = 3 = 3^1$ og því $k = 1$. Svo er $n = 2k = 2$ og því $2^m = 3^m - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 2^3$ svo $m = 3$. Ljóst er að $(m, n) = (3, 2)$ er lausn.

Þetta sýnir að $(m, n) = (1, 1)$ og $(m, n) = (3, 2)$ eru einu jákvæðu heiltölulausnir jöfnunnar $2^m + 1 = 3^n$.