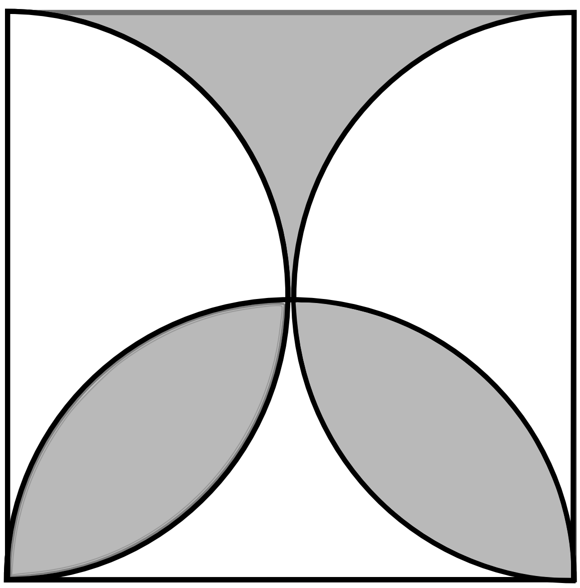
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2021–2022

Svör og lausnir

Efra stig



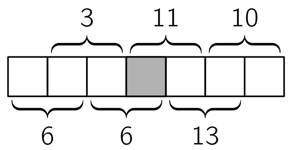
Fyrsti hluti

1. Ef $2 = 4^{2x}$, þá er x jafnt og

☐ 0 ☒ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1

Skýring: Ritum $4 = 2^2$. Þá fæst $2 = 2^1 = (2^2)^{2x} = 2^{4x}$. Þá er $1 = 4x$ og því $x = \frac{1}{4}$

2. Regína raðar tölustöfunum 1,2,3,4,5,6,7 í reitina til hægri. Tölurnar við slaufusvigana standa fyrir summu nágrannatalna. Hvaða tölustafur verður að standa í gráa reitnum til að þetta gangi upp?



☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

Skýring: Summa talnanna sem Regína notar er $1 + 2 + \cdots + 7 = 28$. Tölur efri slaufusviga hafa summuna $3 + 10 + 11 = 24$ svo talan 4 verður að vera í fyrsta reit. Þá má rekja sig til hægri með vísan í neðri og efri slaufusviga; 2 í öðrum reit, 1 í þriðja reit og 5 í skyggða reitnum. (Allt eins má nota tölur neðri slaufusviga og fá að talan í síðasta reit verður að vera 3; rekja sig svo til vinstri.

3. Í Húsdýragarðinum telur Anna kýr og hesta, samtals 12 dýr. Breki telur kýr og grísi, samtals 22 dýr. Díana telur hesta og grísi, samtals 24 dýr. Einar telur kýr, hesta og grísi. Hvaða tölu fær hann?

☐ 26 ☒ 29 ☐ 34 ☐ 48

Skýring: Ef k er fjöldi kúa, h fjöldi hesta og g fjöldi grísa þá höfum við að

$$k + h = 12, \quad k + g = 22, \quad \text{og} \quad h + g = 24$$

Við viljum finna $k + h + g$. Tökum eftir að

$$12 + 22 + 24 = (k + h) + (k + g) + (h + g) = 2(k + h + g)$$
$$\text{svo} \quad k + h + g = \tfrac{1}{2}(12 + 22 + 24) = 29$$

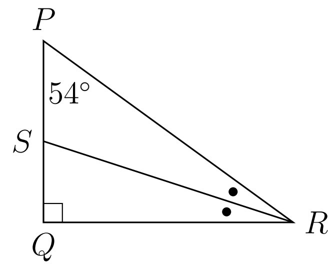
4. Í dæminu hér til hliðar standa P, Q og R fyrir ólíkar jákvæðar heiltölur (allar minni en 10). Hvert er gildið á $P + Q + R$?

$$\begin{array}{cccc} & P & 7 & R \\ + & 3 & 9 & R \\ \hline & R & Q & 0 \end{array}$$

☒ 13 ☐ 12 ☐ 14 ☐ 3

Skýring: Tökum eftir að $R \neq 0$ því $R \geq 3 + P > 3$. Þá verður $R = 5$ og því $Q = 7$. Þá fæst loks að $1 + P + 3 = 5$, svo $P = 1$ og þar með $P + Q + R = 1 + 7 + 5 = 13$.

5. Á myndinni er $\triangle PQR$ rétthyrndur með Q rétt og $\measuredangle QPR = 54°$. Punktur S liggur á PQ þannig að $\measuredangle PRS = \measuredangle SRQ$. Hvað er $\measuredangle QSR$ stórt?



☐ 18° ☐ 36° ☐ 54° ☒ 72°

Skýring: Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180° og $\measuredangle PQR = 90°$ Þá fæst

$$\text{Þríhyrningur } PQR: \quad 54° + R = 90° \qquad \text{(i)}$$
$$\text{Þríhyrningur } SQR: \quad S + \tfrac{1}{2}R = 90° \qquad \text{(ii)}$$

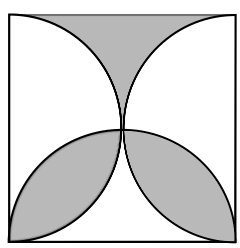
Úr jöfnu (i) fæst að $R = 36°$ og þá fæst úr jöfnu (ii) að $S = 90° - \frac{1}{2}R = 90° - 18° = 72°$.

6. Auðun álfur og Trausti tröll hittast. Auðun segir alltaf satt og Trausti lýgur alltaf. Báðir segja nákvæmlega sömu setninguna. Hvaða setning getur það verið?

☐ Við segjum báðir satt ☐ Ég lýg alltaf ☒ Ég segi satt ☐ Annar okkar segir satt og hinn lýgur

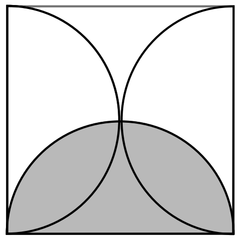
Skýring: Þar sem Auðun segir alltaf satt þá eru fyrstu tveir svarmöguleikarnir úti. Þar sem Trausti lýgur alltaf þá er fjórði svarmöguleikinn einnig úti. Þá er aðeins þriðji svarmöguleikinn eftir; setning sem bæði Auðun og Trausti geta vel sagt.

7. Á myndinni er ferningur með hliðarlengd 2. Þrír hálfhringir skerast í miðjum ferningnum. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



☐ $2 - \frac{\pi}{2}$ ☐ $4 - \pi$ ☐ $4 - \frac{3\pi}{4}$ ☒ $\frac{\pi}{2}$

Skýring: Ef við speglum efra skyggða svæðinu um lárétta helmingalínu ferhyrningsins þá fæst skyggða svæðið á mynd; hálf hringskífa með geisla 1, sem hefur flatarmálið $\frac{1}{2} \cdot 1^2\pi = \frac{\pi}{2}$.



8. Íssali nokkur býr dag einn til 20 kg af ísblöndu. Hann selur stóra og litla ísa. Lítill ís kostar 12 kr. og er 2 ískúlur en stór kostar 16 kr. og er 3 ískúlur. Úr einu kg af ísblöndu fást 12 ískúlur. Í lok dagsins hefur hann selt allan ísinn fyrir 1376 kr. Hvað hefur hann selt marga stóra ísa þann dag?

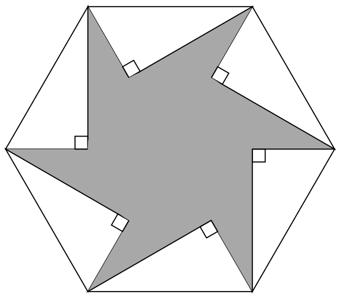
☐ 17 ☐ 24 ☒ 32 ☐ 43

Skýring: Íssalinn á efni í $20 \cdot 12 = 240$ ískúlur. Látum s vera fjölda stórra ísa sem íssalinn hefur selt og l fjölda lítilla ísa. Þá fæst fyrri jafnan út frá fjölda ískúlna, og seinni út frá krónunum:

$$\begin{cases} 3s + 2l = 240 \\ 16s + 12l = 1376 \end{cases}$$

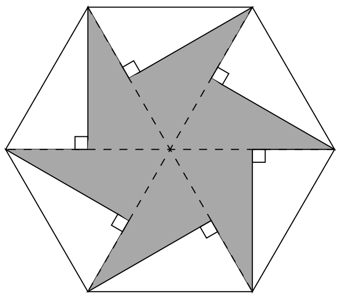
Séu jöfnurnar leystar saman fæst að $s = 32$.

9. Úr reglulegum 6-hyrningi, með lengstu hornalínur 12 cm eru sex 30°-60°-90° þríhyrningar klipptir eins og sýnt er á mynd. Hvert er flatarmál sagarblaðsins (skyggða svæðisins) sem myndast?



☐ $18\sqrt{3}$ ☒ $27\sqrt{3}$ ☐ $36\sqrt{3}$ ☐ $54\sqrt{3}$

Skýring: Drögum hornalínur sexhyrningsins. Þær skerast allar í miðju hans og skipta honum í sex jafnhliða þríhyrninga, hver með helming skyggðan og því er sagarblaðið helmingur flatarmáls sexhyrningsins. Þar sem lengd lengstu hornalínu er 12 cm þá eru hliðarlengdir sexhyrningsins 6 cm.



Hæð jafnarma þríhyrnings með grunnlínu 6 er $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ og því er flatarmál hans $9\sqrt{3}$. Hálft flatarmál sexhyrningsins er því $3 \cdot 9\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$ cm^2.

10. Á hvaða tölustaf endar 2^{2021} ?

☒ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8

Skýring: Nokkur fyrstu veldin af 2 eru

$$\mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{8},\ 1\mathbf{6},\quad 3\mathbf{2},\ 6\mathbf{4},\ 12\mathbf{8},\ 25\mathbf{6},\quad 51\mathbf{2},\ 102\mathbf{4},\ \ldots$$

Lotan $\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{6}$ endurtekur sig. Nú er $2^{2021} = 2^{4\cdot 505} \cdot 2$. Lotan er endurtekinn 505 sinnum og tekið er eitt skref inn í nýja lotu; á tölustafinn **2**

Annar hluti

11. Blær ekur 42 km til vinnu. Vegna framkvæmda kemst hán aðeins með hraða 12 km/klst fyrstu 21 km. Hve hratt þarf hán að aka seinni 21 km leiðarinnar til að ná meðalhraða 20 km/klst fyrir alla leiðina?

Svar: 60 km/klst

Skýring: Á meðalhraða 20 km/klst tekur það Blæ $42/20 = 21/10$ klukkustundir að komast í vinnuna. Hán hefur þegar eytt $21/12 = 7/4$ klukkustundum í akstur fyrstu 21 km, svo seinni 21 km verður hán að aka á $21/10 - 7/4 = 7/20$ klukkustundum sem gerir meðalhraðann $21/(7/20) = 60$ km/klst.

12. Hver er stærsta frumtalan sem gengur upp í $4^{11} - 2^{12}$?

Svar: 31.

Skýring: Ritum $4 = 2^2$ og þáttum:

$$\begin{aligned}(2^2)^{11} - 2^{12} &= 2^{22} - 2^{12} = 2^{12}(2^{10} - 1)\\ &= 2^{12}(2^5 + 1)(2^5 - 1)\\ &= 2^{12} \cdot 33 \cdot 31\\ &= 2^{12} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31\end{aligned}$$

13. Gerum ráð fyrir að x og y séu rauntölur þannig að $xy = 3$. Hvert er minnsta gildið sem $x^2 + y^2$ getur haft?

Svar: 6

Skýring: Athugum að

$$x^2 + y^2 = 2xy + (x - y)^2 = 6 + (x - y)^2$$

Þá er ljóst að $x^2 + y^2 \geq 6$ og jafnaðarmerki fæst ef $x = y$ $(= \sqrt{3})$

14. Alls sitja 25 riddarar við hringborð. Þrír riddarar eru valdir af handahófi til að fást við erfiðan dreka. Á hve marga vegu má velja þessa þrjá, þannig að a.m.k. tveir þeirra sitji hlið við hlið?

Svar: 550.

Skýring: Veljum tvo riddara hlið við hlið með því að velja bara þann sem á að vera á vinstri hönd, sem má gera á 25 vegu, því hinn ákvarðast út frá því. Þriðja riddarann má velja meðal þeirra 23 sem eftir eru, en þá höfum við tvítalið, alls 25 sinnum, þegar riddararnir þrír sitja saman

$$\underbrace{\boldsymbol{AB}}_{par}C = A\underbrace{\boldsymbol{BC}}_{par}$$

Fjöldi valmöguleika er því $25 \cdot 23 - 25 = 25 \cdot 22 = 550$

15. Fyrstu tvö stök heiltalnarunu eru 1 og 3. Næsta stak í rununni er fundið með því að reikna mismun síðustu tveggja staka, $3 - 1 = 2$ og svo á sama hátt, $2 - 3 = -1$ og svo framvegis þannig að runan byrjar svona $1, 3, 2, -1, \ldots$ Hvert er þá stak númer 2021 í rununni?

Svar: -3.

Skýring: Köllum rununa $(a_n)_{n\geq 1}$. Þá er $a_1 = 1$ og $a_2 = 3$. Með því að beita formúlunni $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ þá fæst að $a_3 = 2$, $a_4 = -1$, $a_5 = -3$, $a_6 = -2$, $a_7 = 1$ og $a_8 = 3$. Við sjáum því að $(a_1, a_2) = (1, 3) = (a_7, a_8)$. Þar sem hvert stak rununnar ákvarðast einungis af síðustu tveimur stökum þá fæst að $a_9 = a_3$, $a_{10} = a_4$ o.s.frv. Við fáum því að $a_{2021} = a_{2015} = a_{2009} = \ldots = a_5 = -3$.

Hægt er að lesa meira um dæmi með línulegum rakningarvenslum hér: `http://stae.is/sites/default/files/L_nuleg_rakningarvensl.pdf`

Þriðji hluti

16. Verslun selur epli í lokuðum pokum með 5, 8 eða 12 eplum. Ekki má opna poka til að breyta fjöldanum í pokanum. Hver er mesti fjöldi epla sem ekki er mögulegt að kaupa?

Lausn: Gerum ráð fyrir að n sé fjöldi epla sem við viljum kaupa. Vissulega má kaupa $n = 0$ epli með því að kaupa ekkert. Gerum ráð fyrir að $n > 0$. Þá má kaupa n epli ef og aðeins kaupa megi $n - 5$, $n - 8$ eða $n - 12$ epli þar sem að ef $n > 0$ þá þarf að kaupa einhvern poka og ef við teljum þann poka frá þá getum við keypt hin eplin með hinum pokunum. Rekjum okkur því upp með því að merkja o ef við getum keypt tiltekinn fjölda og x ef svo er ekki:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
o	x	x	x	x	o	x	x	o	x	o	x	o	o	x	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o

Við sjáum því að við getum ekki keypt 19 epli en við getum keypt 20, 21, 22, 23 og 24 epli. Þá er ljóst að hvaða fjölda epla, meiri en 19 er hægt að kaupa; leggjum margfeldi af 5 epla poka við einhvern fjöldann 20-24.

17. Á hve marga vegu má raða níu ásum inn í venjulegt Sudoku?
Engir tveir ásar mega vera í sama dálki eða sömu línu, né í sama 3×3 ferningi með þykkri rönd. Dæmi um leyfilega uppröðun má sjá til hægri.

			1					
1								
								1
	1							
				1				
							1	
					1			
		1						
						1		

Lausn 1:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Við númerum 3×3 reitina frá 1 upp í 9 eins og á mynd til hægri. Setja má ás í fyrsta reitinn á 9 vegu. Sá ás útilokar eina línu í reit tvö og einn dálk í reit fjögur, í þeim reitum má velja ás á 6 vegu. Í reit fimm er þá búið að útiloka eina línu og einn dálk, sem skarast í einum reit, svo 4 reitir eru eftir sem koma til greina.
Í reitum þrjú og sex er búið að útiloka tvær línur, og því þrír möguleikar eftir í hvorum fyrir sig. Í reitum 7 og 8 er búið að útiloka tvo dálka, og því einnig 3 möguleikar í þessum reitum. í reit 9 er búið að útiloka tvær línur og tvo dálka, svo þar er aðeins 1 möguleiki.

Heildarfjöldi leiða til þess að fylla inn ásana er þá $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 46656$.

Athugasemd: Í svona dæmum eru gefin full stig fyrir rétta tölu, t.d. $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$ án þess að margfeldið sé reiknað út.

Lausn 2:

Ef settir eru ásar inn á borðið á leyfilegan máta, þá má merkja t.d. dálka 1-3 eftir því í hvaða 3×3 reit er ás í þeim dálki. T.d. ef ásinn í fyrsta dálknum er í miðreitnum þá merkjum við hann með 2, ef ásinn í næsta dálki er í neðsta reitnum merkjum við hann með 3 og ef ásinn í þriðja dálkinum er í efsta reitnum merkjum við hann með 1, eins og á mynd. Eins gerum við fyrir dálka 4-6 og 7-9, og svo eins fyrir línurnar.

	2	3	1	2	3	1	2	1	3
1			1						
2						1			
3								1	
1	1								
2				1					
3							1		
2					1				
1		1							
3									1

Öfugt, þá ef gefnar eru svona raðanir á þrenndum dálka og lína, þá getum við skrifað ásana inn út frá því á nákvæmlega einn hátt. Svo fjöldi leiða til þess að raða inn ásunum er $(3!)^6 = 6^6 = 46656$.

18. Tveir kúlulaga boltar liggja á gólfi og snertast í einum punkti. Annar hefur þvermál 198 cm og hinn hefur þvermál 126 cm. Í hvaða hæð frá gólfinu er snertipunktur boltanna tveggja?

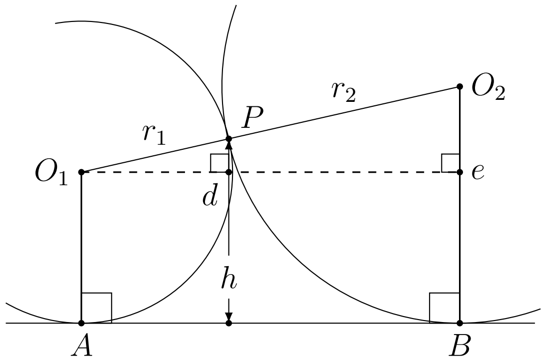
Lausn: Látum A og B vera snertipunkta smærri og stærri kúlunnar við gólfið. Látum P vera snertipunkt kúlanna. Látum O_1 vera miðpunkt smærri kúlunnar og O_2 vera miðpunkt þeirrar stærri. Táknum með r_1 geisla smærri kúlunnar og r_2 geisla stærri kúlunnar. Táknum hæð P frá gólfinu með h.

Aðferð I:
Lárétt lína gegnum O_1 sker lóðréttan geisla stærri hrings í e og hæð punkts P í d. Þríhyrningar O_1dP og O_1eP eru einslaga. Þá fæst:

$$\frac{|dP|}{r_1} = \frac{|eO_2|}{r_2 + r_1} \quad \text{þ.e.} \quad \frac{h - r_1}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

og því

$$h = r_1 + r_1\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = 63 + 63 \cdot \frac{36}{162} = 77\,\text{cm}$$

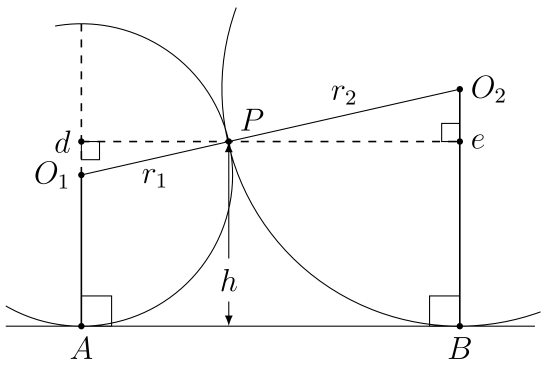


Aðferð II:
Lárétt lína gegnum P sker lóðréttan miðþveril minni hrings í d og lóðréttan geisla stærri hrings í e. Þríhyrningarnir O_1dP og O_2eP eru einslaga. Þá fæst:

$$\frac{|dO_1|}{r_1} = \frac{|eO_2|}{r_2} \quad \text{þ.e.} \quad \frac{h - r_1}{r_1} = \frac{r_2 - h}{r_2}$$

Þá er $h(r_2 + r_1) = 2r_1r_2$ og því

$$h = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2 \cdot 63 \cdot 99}{63 + 99} = 77\,\text{cm}$$



19. Finnið allar jákvæðar heiltölur m og n þannig að $2^m + 1 = 3^n$.

Lausn: Fáum $2^m = 3^n - 1$. Ef n er slétt, þá fæst

$$2^m = \left(3^{\frac{n}{2}} - 1\right)\left(3^{\frac{n}{2}} + 1\right)$$

svo að báðir svigar eru veldi af 2, og þar sem mismunur þeirra er 2, þá er $3^{\frac{n}{2}} - 1 = 2$, $3^{\frac{n}{2}} + 1 = 4$ svo að $n = 2$ og $m = 3$.

Ef n er oddatala, þá er $3^n \equiv 3 \mod 4$ en

$$2^m + 1 \equiv \begin{cases} 1 \mod 4 & \text{ef } m \geq 2 \\ 3 \mod 4 & \text{ef } m = 1 \\ 2 \mod 4 & \text{ef } m = 0 \end{cases}$$

svo að eini kosturinn er $m = 1$ og þá $n = 1$. Þá er ljóst að einu mögulegu gildin á (m, n) eru $(m, n) = (3, 2)$ og $(m, n) = (1, 1)$.