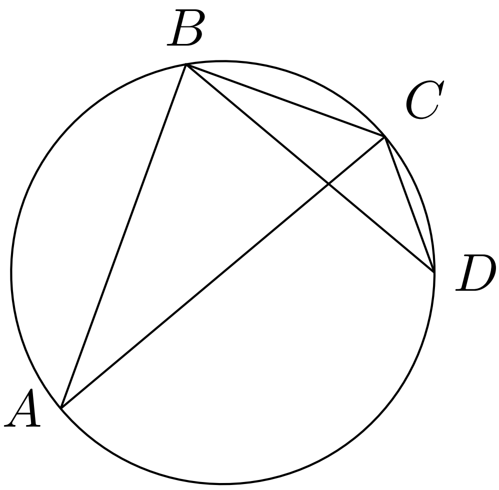
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2018–2019

Svör og lausnir

Efra stig



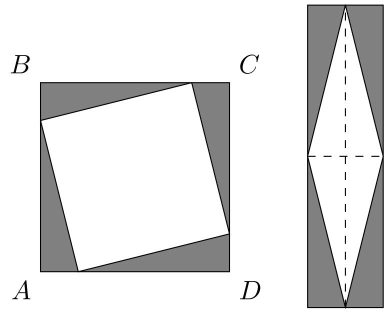
Fyrsti hluti

1. Elísabet hefur lokið $\frac{2}{3}$ af daglegu morgunhlaupi sínu. Ef hún hleypur $\frac{1}{2}$ km í viðbót þá hefur hún lokið $\frac{3}{4}$ af hlaupinu. Hversu langt er daglegt morgunhlaup Elísabetar?

☐ 4 km ☐ 5 km ☒ 6 km ☐ 7 km

Skýring: Ef lengd daglegs morgunhlaups er táknuð með L þá er gefið að $\frac{2}{3}L$ að viðbættum $\frac{1}{2}$ km sé jafnt $\frac{3}{4}L$; það er, $\frac{2}{3}L + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}L$. Sé þessi jafna leyst fyrir L fæst að $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}L - \frac{2}{3}L = \frac{1}{12}L$. Svo $L = 6$.

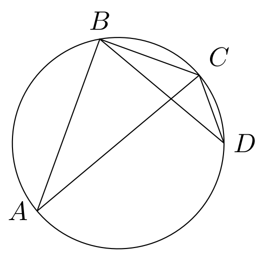
2. Fjórum gráum rétthyrndum þríhyrningum er raðað á tvo mismunandi vegu á borð. Annars vegar myndast hvítur ferningur og hins vegar myndast hvítur tígull milli þríhyrninganna. Hvíti ferningurinn hefur flatarmálið 17 m^2 og hvíti tígullinn 8 m^2. Hvert er flatarmál ferningsins $ABCD$ í m^2?



☐ 19 ☐ 24 ☒ 25 ☐ 32

Skýring: Flatarmál hvíta tígulsins er jafnt samanlögðu flatarmáli þríhyrninganna fjögurra sem mynda umgjörð tígulsins eða 8 m^2. Því fæst að flatarmál ferningsins $ABCD$ er $(17+8)$ m^2 eða alls 25 m^2.

3. A, B, C og D eru punktar á hring með radíus (geisla) 3 cm. AC er miðstrengur og $\angle CDB = 30°$. Hvert er ummál þríhyrningsins ABC mælt í cm?



☐ $6 + 3\sqrt{3}$ ☐ $8 + 3\sqrt{3}$ ☒ $9 + 3\sqrt{3}$ ☐ $11 + 3\sqrt{3}$

Skýring: Þar sem AC er miðstrengur þá er ABC rétthyrndur þríhyrningur. Ferilhornin $\angle BAC$ og $\angle BDC$ spanna sama boga og eru því jafn stór; 30° hvort. ABC er þá $30° - 60° - 90°$ þríhyrningur og því er $BC = \frac{1}{2}AC = 3$ cm. Með vísan í reglu Pýþagórasar fæst að $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$ cm. Ummálið er þá $6 + 3 + 3\sqrt{3} = 9 + 3\sqrt{3}$ cm.

4. Tölvuúr sýnir tímann $4:56$ að morgni dags. Hve margar mínútur líða þar til úrið sýnir næst tíma þar sem tölurnar eru samliggjandi og í vaxandi röð?

☐ 315 ☐ 376 ☒ 458 ☐ 587

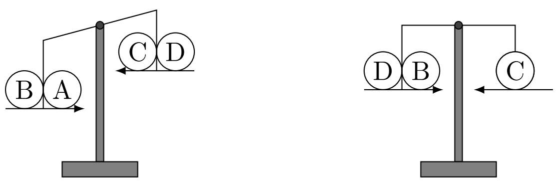
Skýring: $5:67$ kemur ekki til greina þar sem mestur fjöldi sýndra mínútna er 59. Næsti tími er því $12:34$ eftir hádegi, sem er $(4+7\cdot 60+34)$ mínútum síðar. En $4+7\cdot 60+34=458$.

5. Tölurnar a og b eru jákvæðar og $a^b=b^a$. Hvert er gildið á a ef vitað er að $b=9a$?

☐ $\sqrt[9]{9}$ ☒ $\sqrt[8]{9}$ ☐ $\sqrt[3]{9}$ ☐ 3

Skýring: Umritum jöfnuna: $a^{9a}=(9a)^a$ eða $(a^a)^9=9^a\cdot a^a$. Svo $(a^a)^8=9^a$ sem með umritun gefur $(a^8)^a=9^a$. Þá verður $a^8=9$ og því $a=9^{1/8}=\sqrt[8]{9}$.

6. Fjórar kúlur A, B, C og D eru af sömu stærð en mismunandi þyngd. Þær vega 10, 20, 30 og 40 grömm, ekki endilega í þessari röð. Hvaða kúla vegur 30 grömm?



☐ A ☐ B ☒ C ☐ D

Skýring: Skv. vinstri vogarskál er $(A+B)>(C+D)$ og skv. hægri vogarskál er $(B+D)=C$. Þá má umrita fyrri ójöfnu: $(A+B)>(B+D+D)$. Svo $A>2D$ og því er $D=10$ grömm. Þá má rita $(B+10)=C$ og því verður annaðhvort (i) $B=20$ grömm og þá $C=30$ grömm og $A=40$ grömm eða (ii) $B=30$ grömm og þá $C=40$ grömm og $A=20$ En möguleiki (ii) hefði í för með sér jöfnuna $(A+B)=(C+D)$ sem er í mótsögn við vinstri vogarskál.

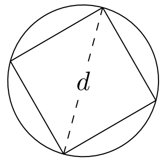
7. Fyrir hversu margar heiltölur n með $1\leq n\leq 100$ er mögulegt að þátta stæðuna x^2+2x-n í tvo línulega þætti $(x+a)(x+b)$ þar sem a og b eru heiltölur?

☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Skýring: Ritum þáttunina $(x+a)(x+b)=(x+a)(x+2-a)$. Þá verður $a(2-a)=-n$ og því $a(a-2)=n$. Ójöfnuna $1\leq n\leq 100$ má því rita

$1 \leq a(a-2) \leq 100$. Þá fæst að $3 \leq a \leq 11$ með tilsvarandi $1 \leq -b \leq 9$ eða $-9 \leq a \leq -1$ með tilsvarandi $-11 \leq -b \leq -3$; alls 9 ólíkir möguleikar á margfeldinu $-n = a \cdot b$.

8. Ummál hrings er 100 metrar. Finnið hliðarlengd innritaðs fernings í metrum.



☐ $\frac{25\sqrt{2}}{\pi}$ ☐ $\frac{25}{\pi}$ ☐ $\frac{50}{\pi}$ ☒ $\frac{50\sqrt{2}}{\pi}$

Skýring: Táknum þvermál hringsins með d. Þá er $d = \frac{100}{\pi}$. En þvermál hrings er jafnt hornalínu innritaðs fernings svo ef hliðarlengd fernings er táknuð x fæst jafnan $x^2 + x^2 = d^2$ og því $x = \frac{1}{\sqrt{2}}d = \frac{100}{\pi\sqrt{2}} = \frac{50\sqrt{2}}{\pi}$.

9. Tvær hliðar þríhyrnings eru 5 og 8 að lengd. Lengd þriðju hliðar þríhyrningsins er einnig heiltala. Hversu mörg gildi koma til greina fyrir þriðju hliðina?

☐ 7 ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10

Skýring: Í þríhyrningi er summa lengda hverra tveggja hliða alltaf stærri en lengd þriðju hliðar. Ef við táknum lengd þriðju hliðar þríhyrningsins með x þá verður (i) $x > 3$ vegna þess að $5 + x > 8$ og (ii) $x < 13$ vegna þess að $8 + 5 > x$. Ef, að auki, x á að vera heiltala fæst að $x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ svo það eru alls 9 möguleikar á lengd þriðju hliðar.

10. Gerum ráð fyrir að m og n séu jákvæðar heiltölur með $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = m + \sqrt{n}$. Hvert er gildið á $m + n$?

☒ 5 ☐ 7 ☐ 11 ☐ 17

Skýring: Nú er $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ svo jafnan verður $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = m + \sqrt{n}$. Hefjum báðar hliðar í annað veldi og fáum að $7 + 4\sqrt{3} = \left(m + \sqrt{n}\right)^2 = m^2 + n + 2m\sqrt{n}$. Þá er ljóst að $n = 3$ og $m = 2$

Annar hluti

11. Heiltöluna k má rita sem summu

$$k = 1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \cdots + 100000000001.$$

Hver er þversumma tölunnar k?

Svar: 14

Skýring: Leggjum saman:

$$\begin{aligned}
&1 + 11 + (101 + 1\,001 + 10\,001 + \cdots + 10\,000\,000\,001) + 100\,000\,000\,001 \\
=&1 + 11 + 11\,111\,111\,109 + 100\,000\,000\,001 \\
=&1 + 11 + 111\,111\,111\,110 \\
=&11 + 111\,111\,111\,111 = 111\,111\,111\,122
\end{aligned}$$

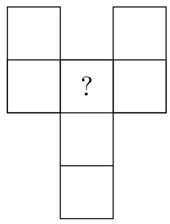
Þversumman er því 14.

12. Hve mörg pör heiltalna (x, y) uppfylla jöfnuna $x^4y^4 - 13x^2y^2 + 40 = 4$?

Svar: 16

Skýring: Umritum jöfnuna: $(xy)^4 - 13(xy)^2 + 36 = 0$ og því $((xy)^2 - 4)((xy)^2 - 9) = 0$. Þá sést að $(xy)^2 = 4$ eða $(xy)^2 = 9$ svo $xy = \pm 2$ eða $xy \pm 3$. Þar sem x og y eiga að vera heiltölur sést að annars vegar er $x, y \in \{\pm 1, \pm 2\}$ og velja má gildin á x og y á 8 mismunandi vegu. Hins vegar er $x, y \in \{\pm 1, \pm 3\}$ og aftur má velja á 8 ólíka vegu.

13. Leó ætlar að rita heilu tölurnar, frá og með 1 til og með 7, í reitina hér til hægri þannig að engir tveir reitir sem liggja horn í horn eða eiga sameiginlega hlið innihaldi tölur sem eru samliggjandi. Hvaða tölu(r) má rita í merkta reitinn?



Svar: 1 eða 7

Skýring: Tölurnar 2–6 eru samliggjandi tveimur tölum hver. Aðeins önnur þessara tveggja talna færi í neðsta reit. Hin talan færi í einn reitanna fjögurra sem eru horn-í-horn við eða samhliða merkta reitnum. Það er því ómögulegt að rita einhverja talnanna 2–6 í merkta reitinn. Endatölurnar 1 og 7 eru samhliða aðeins einni tölu og þá tölu má rita í neðsta reit. Hinum fimm má raða þannig að skilyrðum er uppfyllt.

14. Þrír bollar, A, B og C eru einlitir. Einn er rauður, annar hvítur og þriðji blár en ekki endilega í þessari litaröð. Ein og aðeins ein eftirtalinna fullyrðinga er sönn:

(i) bolli A er rauður (ii) bolli B er ekki rauður (iii) bolli C er ekki blár

Segið til um lit hvers bolla fyrir sig.

Svar: A blár, B rauður og C hvítur.

Skýring: Væri fullyrðing (i) sú sanna en hina tvær ósannar væru báðir bollarnir A og B rauðir sem er ómögulegt. Sömuleiðis, væri fullyrðing (ii) sú sanna en hinar tvær ósannar þá væri bolli C blár og bollar A og B báðir hvítir sem er ómögulegt. Þá er fullyrðing (iii) sanna fullyrðingin, fullyrðingar (i) og (ii) eru ósannar, svo B er rauður, C er hvítur og A er blár.

15. Um fallið f og allar rauntölur x gilda eftirfarandi tvær jöfnur:

$$f(x) + f(1-x) = 10 \quad \text{og} \quad f(1+x) = 4 + f(x)$$

Hvert er þá gildið á $f(2018) + f(-2018)$?

Svar: 6

Skýring: Veljum $-x$ í seinni jöfnu og fáum að $f(1-x) = 4+f(-x)$. Þá má rita fyrri jöfnu á formið $f(x)+4+f(-x) = 10$ og þar með fæst að $f(x)+f(-x) = 6$ fyrir öll x. Sér í lagi fæst að $f(2018) + f(-2018) = 6$

Þriðji hluti

Allar lausnir eru keppenda.

16. Talan $101^4 - 1$ er deilanleg með fimm mismunandi frumtölum (prímtölum). Finnið fjórar þeirra.

Lausn: Athugum að

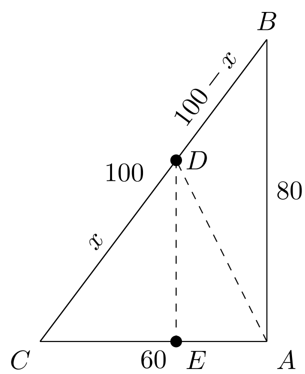
$$\begin{aligned} 101^4 - 1 &= (101^2 - 1)(101^2 + 1) = (101 - 1)(101 + 1)(101^2 + 1) \\ &= 100 \cdot 102 \cdot (101^2 + 1) \end{aligned}$$

Nú er $100 = 2^2 \cdot 5^2$ og $102 = 2 \cdot 51 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ svo að

$$101^4 - 1 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot (101^2 + 1)$$

sem sýnir að talan $101^4 - 1$ er deilanleg með frumtölunum 2,3,5 og 17.

17. Þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur með $\angle A = 90°$, hliðar $b = 60$, $c = 80$ og $a = 100$. D er staðsettur á hliðinni a þannig að þríhyrningarnir ABD og ADC hafa sama ummál. Finnið lengd hliðarinnar AD.



Lausn: Látum $|CD| = x$. Gefið er að

$$\begin{aligned} x + |AD| + 60 &= |AD| + (100 - x) + 80 \\ \text{svo} \quad 2x &= 120 \\ \text{og því} \quad x &= 60 \end{aligned}$$

I: Beitum kósínusreglu í þríhyrningi ADC með það í huga að $\cos(\angle C) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= 60^2 + 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \cos(\angle C) \\ &= 60^2 \left(1 + 1 - \frac{6}{5}\right) = 60^2 \cdot \frac{4}{5} \\ \text{Svo} \qquad |AD| &= 60 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 24\sqrt{5} \end{aligned}$$

II: Í stað þess að nota kósínusreglu má staðsetja punkt E á hlið AC þannig að þríhyrningarnir ABC og EDC eru einslaga. Þá fæst:

$$\begin{aligned} \frac{|CE|}{x} &= \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \\ |CE| &= x \cdot \frac{3}{5} = 60 \cdot \frac{3}{5} = 36 \end{aligned}$$

Nú er AD langhlið í rétthyrndum þríhyrningi EAD svo

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |ED|^2 + |EA|^2 = (60^2 - |CE|^2) + (60 - |CE|)^2 \\ &= 2 \cdot 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot |CE| = 2 \cdot 60(60 - |CE|) = 2 \cdot 60 \cdot 24 \\ \text{Svo} \quad |AD| &= \sqrt{2 \cdot 60 \cdot 24} = \sqrt{5 \cdot 24^2} = 24\sqrt{5} \end{aligned}$$

18. Í tveimur kössum eru döðlur, jafnmargar í hvorum. Úr öðrum kassanum eru gerðir eins margir pokar og mögulegt er með 17 döðlum í hverjum poka. Úr seinni kassanum og því sem eftir varð af döðlunum úr fyrri kassanum eru gerðir eins margir pokar og mögulegt er með 13 döðlum í hverjum poka. Alls urðu úr þessu 40 pokar og engin daðla varð eftir. Hve margar voru döðlurnar í upphafi?

Lausn: Látum n tákna fjölda daðla í hvorum kassa og r tákna afganginn úr fyrri kassanum. Þá fæst:

$$\text{(i)}\ n = 17q + r, \quad \text{(ii)}\ n + r = 13p, \quad \text{(iii)}\ p + q = 40$$

þar sem $r, p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ og $r < 17$. Ef jöfnur (i) og (ii) eru lagðar saman fæst:

$$\begin{aligned} n + (n + r) &= (17q + r) + 13p \\ \text{svo} \qquad 2n &= 4q + 13(p + q) = 4q + 13 \cdot 40 \\ \text{og því} \qquad n &= 2q + 13 \cdot 20 = 2q + 260 \end{aligned}$$

Þá má umrita jöfnu (i): $2q + 260 = 17q + r$ svo $260 - r = 15q$ og $260 - r$ því margfeldi af 15. Næstu margfeldi af 15 eru $255 = 15 \cdot 17$ og $240 = 15 \cdot 16$, en þar sem $0 \le r < 17$ þá kemur $260 - r = 255$ aðeins til greina. Þá er $r = 5$, $q = 17$ og $2n = 2(17q + r) = 2(17^2 + 5) = 588$ sem er heildarfjöldi daðla

19. Hér má líta 6×6 stafablokk, sex línur og sex dálka sex ólíkra stafa. Með því að rekja sig í gegnum stafablokkina má stafa orð gerð úr stöfunum sex. Leyfilegt er að rekja sig lárétt, lóðrétt eða eftir hornalínu frá staf yfir í næsta staf (ekki er leyfilegt að taka stökk yfir stafi).

Á hve marga vegu má stafa nafnið EVKLÍÐ?

(1)E	(2)E	(2)E	Ð	Ð	Ð
(2)E	V	V	Í	Í	Ð
(3)E	V	K	L	Í	Ð
(2)E	V	K	L	Í	Ð
(1)E	V	V	Í	Í	Ð
E	E	E	Ð	Ð	Ð

Lausn: Ef talin er fjöldi leiða til að stafa E $\to$ V $\to$ K, má velja E og V á skyggða svæðinu og tölurnar í sviga sýna hve margar leiðir E $\to$ V $\to$ K byrja í tilteknu E. Alls eru leiðirnar $2 + 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 13$. Vegna samhverfu eru aðrar 13 leiðir sem stafa E $\to$ V $\to$ K og því alls 26 mismunandi leiðir til að stafa EVK.
Við athugum að uppsetningin er samhverf og fjöldi leiða til að stafa LÍÐ er jafn fjölda leiða til að stafa EVK, alls 13 frá hvoru L og samanlagt 26. Því má stafa EVKLÍÐ á alls $26 \times 26 = 676$ mismunandi vegu.