Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2021-2022
Úrslitakeppni
Lausnir

Dæmi 1
Eru til þrjár þriggja stafa jákvæðar heiltölur sem hafa alla tölustafina níu ólíka og gefa samanlagt 2022?

Lausn
Táknum tölustafi fyrstu tölunnar með d_1, d_2, d_3 þannig að d_1 sé hundraðssætið, d_2 tugasætið og d_3 einingarsætið. Táknum eins tölustafi annarar tölunnar með d_4, d_5, d_6 og síðustu tölunnar með d_7, d_8, d_9. Látum $c(x, y, z) \coloneqq 100x + 10y + z$. Við viljum þá leysa

$$c(d_1, d_2, d_3) + c(d_4, d_5, d_6) + c(d_7, d_8, d_9) = 2022$$

Tökum þessa jöfnu mátað við 9 og fáum

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_9 \equiv 6 \pmod 9$$

Vitum að $d_1, \ldots, d_9$ eru ólík og taka gildi í $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Við sleppum því nákvæmlega einu gildi í $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Summa þessara talna mátað við 9 er 0. Því verðum við að sleppa tölu sem gefur 6 þegar hún er dregin frá 9, þ.e.a.s. við sleppum 3. Mátum nú næst við 10 og fáum

$$d_3 + d_6 + d_9 \equiv 2 \pmod{10}$$

Ef við veljum d_3, d_6, d_9 sem minnst eru þau a.m.k. $0, 1, 2$ sem hafa summu 3, svo $d_3 + d_6 + d_9 \geq 0 + 1 + 2 = 3 > 2$. Eins getum við stærst valið $7, 8, 9$ svo $d_3 + d_6 + d_9 \leq 7 + 8 + 9 = 24 < 32$. Því er $d_3 + d_6 + d_9$ annað hvort 12 eða 22. Mátum næst við 100 og fáum

$$10(d_2 + d_5 + d_8) + d_3 + d_6 + d_9 \equiv 22 \pmod{100}$$

Því er $10(d_2 + d_5 + d_8)$ jafnt 10 eða 20 mátað við 100, þ.e. $d_2 + d_5 + d_8$ er 0 eða 1 mátað við 10. $d_2 + d_5 + d_8$ er minnst 3 og mest 24 svo nú fæst að það sé eitt af gildunum $10, 11, 20, 21$. Fáum þá

$$\begin{aligned}
& 10 \leq d_2 + d_5 + d_8 \leq 21 && \text{og} \quad 12 \leq d_3 + d_6 + d_9 \leq 22 \\
\implies & 100 \leq 10(d_2 + d_5 + d_8) \leq 210 && \text{og} \quad 12 \leq d_3 + d_6 + d_9 \leq 22 \\
\implies & 112 \leq 10(d_2 + d_5 + d_8) + d_3 + d_6 + d_9 \leq 232 && \\
\implies & 2022 - 232 \leq 100(d_1 + d_4 + d_7) \leq 2022 - 112 && \\
\implies & 1790 \leq 100(d_1 + d_4 + d_7) \leq 1910 && \\
\implies & 18 \leq d_1 + d_4 + d_7 \leq 19 &&
\end{aligned}$$

Skoðum nú mögulegu gildi $d_1 + d_3 + d_4 + d_6 + d_7 + d_9$. Útfrá niðurstöðum að ofan getur þetta bara tekið gildin $30, 31, 40$ eða 41. Til þess að dæmið gangi upp þarf þetta gildi að summunni $d_2 + d_5 + d_8$ samanlagðri að vera 42. Þar sem $d_2 + d_5 + d_8$ er eitt gildanna $10, 11, 20, 21$ sjáum við að eina leiðin til að það gangi upp er

$$\begin{cases} d_1 + d_4 + d_7 = 19 \\ d_2 + d_5 + d_8 = 11 \\ d_3 + d_6 + d_9 = 12 \end{cases}$$

Reynum þá að byrja á að ákvarða $d_2 + d_5 + d_8$. Ef við förum í gegnum allar leiðir til að velja þrjá tölustafi meðal $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ fæst að mögulegar lausnir eru

$$\{d_1, d_4, d_7\} = \begin{cases} \{2,8,9\} \\ \{4,6,9\} \\ \{4,7,8\} \\ \{5,6,8\} \end{cases}, \{d_2, d_5, d_8\} = \begin{cases} \{0,2,9\} \\ \{0,4,7\} \\ \{0,5,6\} \\ \{1,2,8\} \\ \{1,4,6\} \\ \{2,4,5\} \end{cases}, \{d_3, d_6, d_9\} = \begin{cases} \{0,4,8\} \\ \{0,5,7\} \\ \{1,2,9\} \\ \{1,4,7\} \\ \{1,5,6\} \\ \{2,4,6\} \end{cases}$$

Ef við prófum þá fáum við að ein lausn er

$$\begin{aligned} \{d_1, d_4, d_7\} &= \{2,8,9\} \\ \{d_2, d_5, d_8\} &= \{0,4,7\} \\ \{d_3, d_6, d_9\} &= \{1,5,6\} \end{aligned}$$

Svarið við spurningunni er því já. Dæmi um lausn er þrjár slíkar tölur er því til dæmis $201, 845, 976$.

$\square$

Dæmi 2

Finnið *ólíkar* jákvæðar heiltölur a, b, c þannig að

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

og þannig að stærðin $a + b^2 + c^3$ verði sem minnst.

Lausn 1

Ef $c = 1$ þá fæst jafnan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Þá má hvoki a né b vera 1, því spurt er um ólíkar tölur. Ef annaðhvort a eða b er 2 þyrfti hin líka að vera 2, og þá ekki ólíkar. Því eru bæði $a \geq 3$ og $b \geq 3$, sem gefur $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{3} < 1$. Svo tilvilkið $c = 1$ gefur engar lausnir á jöfnunni.

Ef $c = 2$ þá fæst jafnan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, sem jafngildir að $2(a + b) = ab$, svo annaðhvort a eða b er slétt tala.

Segjum sem svo að a sé slétt.

- Ef $a = 2$ þá fæst $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, en $\frac{1}{b}$ getur ekki orðið 0.
- Ef $a = 4$ þá fæst $\frac{1}{4} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, og þá þarf b líka að vera 4, og a og b eru ekki ólík.
- Ef $a = 6$ þá fæst $\frac{1}{6} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, og þá fæst $b = 3$.

Athugum að fyrir þrenndina $(a, b, c) = (6, 3, 2)$ er $a + b^2 + c^3 = 23$.

Athugum að $(a, b, c) = (6, 3, 2)$ uppfyllir að $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$. Þá er $a + b^2 + c^3 = 6 + 3^2 + 2^3 = 23$.

Athugum að ef $c \geq 3$ þá er $a + b^2 + c^3 > c^3 \geq 3^3 = 27$. Svo lágmarkinu er náð þegar $c = 2$.

Ef $b > 4$ er $a + b^2 + c^3 = a + 16 + 8 > 23$, svo það kemur ekki til greina, og heldur ekki $b = 1$ eða $b = 2$.

Því er lausnin $(a, b, c) = (6, 3, 2)$ á jöfnunni $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$ sú sem gefur minnsta gildið á stærðinni $a + b^2 + c^3$. $\square$

Lausn 2

Athugum að $(a, b, c) = (6, 3, 2)$ uppfyllir að $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Þá er $a + b^2 + c^3 = 6 + 3^2 + 2^3 = 23$.

Athugum að ef $c \geq 3$ þá er $a + b^2 + c^3 > c^3 \geq 3^3 = 27$. Svo lágmarkinu er náð þegar $c = 1$ eða $c = 2$.

1. Ef $c = 1$ þá fæst jafnan $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = 1$ sem jafngildir að $a+b = ab$, sem jafngildir að $(a-1)(b-1) = 1$. Nú eru $a - 1$ og $b - 1$ heiltölur og þær eru báðar deilar í 1. Svo $a - 1 = \pm 1$ og $b - 1 = \pm 1$. En því $a, b \neq 0$ er $a = 2$ og $b = 2$. En a og b eru þá sama talan.

2. Ef $c = 2$ þá fæst jafnan $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$, sem jafngildir að $2a + 2b = ab$, sem aftur jafngildir að $(a - 2)(b - 2) = 4$. Þar sem $a - 2$ og $b - 2$ eru heiltölur er

   $$(a - 2, b - 2) \in \{(-4, -1), (-2, -2), (-1, -4), (1, 4), (2, 2), (4, 1)\}$$

   Svo

   $$(a, b) \in \{(-2, 1), (0, 0), (1, -2), (3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$$

   Því a og b eru ólíkar jákvæðar heiltölur koma aðeins tvær lausnir til greina; $(a, b, c) = (3, 6, 2)$ og $(a, b, c) = (6, 3, 2)$. Ef $(a, b, c) = (3, 6, 2)$ þá er $a + b^2 + c^3 = 3 + 6^2 + 2^3 = 47$, og ef $(a, b, c) = (6, 3, 2)$ þá er $a + b^2 + c^3 = 6 + 3^2 + 2^3 = 23$.

Minnsta gildið á stærðinni $a+b^2+c^3$ fæst því fyrir lausnina $(a, b, c) = (6, 3, 2)$ á jöfnunni $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. $\square$

Lausn 3

Sjáum að $a = 6, b = 3, c = 2$ er lausn. Sýnum að hún lágmarki $a + b^2 + c^3$. Fyrir þessa lausn er þetta gildi 23. Ef $c \geq 3$ er $c^3 \geq 27$ svo við verðum að hafa $c \leq 2$ til að ná ≤ 23. Ef $c = 1$ eru $a, b \geq 2$ svo $a^{-1}, b^{-1} \leq 2^{-1}$. Því yrðum við að hafa $a = b = 2$ sem gengur ekki. Fáum því að $c = 2$. Viljum því hafa $a + b^2 \leq 15$, svo $b \leq 3$. Ef $b < 3$ er vinstri hliðin stærri en hægri sem gengur ekki. Verðum því að hafa $b = 3$, en þá fæst upphaflega lausnin. $\square$

Dæmi 3

Hver er mesti fjöldi búta sem fæst þegar hringskífu er skipt með 6 beinum línum?

Lausn 1

Þegar við teiknum línu inni í hringskífunni skiptum við hverju einasta svæði sem við förum í gegnum í tvennt. Tökum líka eftir því að þegar við förum eftir línunni frá öðrum jaðrinum að hinum skiptum um svæði sem við ferðumst um ef og aðeins ef við skerum línu sem fyrir er. Ef við skerum fleiri en eina línu samtímis skiptum við samt bara einu sinni um svæði. Fjöldi svæða sem við skiptum í tvennt er því svæðið sem við byrjum í auk eins svæðis fyrir hvern skurðpunkt lína sem myndast. Svo þegar við teiknum n-tu línuna getur því svæðunum í mesta lagi fjölgað um n ef við skerum allar línurnar sem fyrir eru.

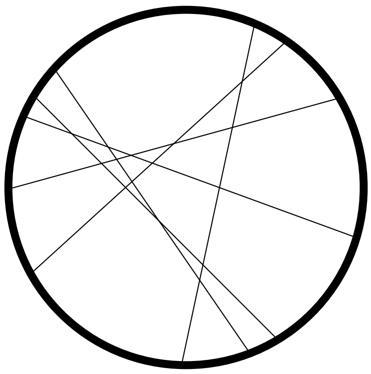
Áður en fyrsta línan er teiknuð er eitt svæði í hringskífunni. Hámark fjölda svæða eftir að sex línur hafa verið teiknaðar er því

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 22$$

.

Nú eigum við bara eftir að sýna hægt sé að skipta hringskífunni í 22 svæði. Það eina sem við þurfum að sýna er að hægt sé að teikna 6 línur þannig sérhverjar tvær skerist og engar þrjár skerist í sama punkti. Það auðvelt að gera í ótakmörkuðu plani ef við bætum við línu þannig að allir skurðpunktarnir sem komnir eru lendi sömu megin við línuna og ef hún er ekki samsíða neinni af línunum sem fyrir eru. Þegar við erum búin að teikna sex línur í planinu sem uppfylla skilyrðin teiknum við svo hringskífuna eftir á þannig að allir skurðpunktarnir lenda innan hringskífunnar.

Önnur leið til að sýna að hægt er að skipta hringskífunni í 22 svæði er að sýna það á mynd:



Mesti fjölda búta sem hægt er að fá þegar hringskífu er skipt með 6 beinum línum er því 22. □

Lausn 2

Við byrjum á því að gera eftirfarandi athugun. Tveir punktar eru á sama bút ef og aðeins ef þeir liggja sömu megin við sérhverja línanna.

Gerum ráð fyrir að hringskífunni hafi verið skipt með einhverjum fjölda lína. Gerum ráð fyrir að P og Q séu einhverjir tveir punktar á sama búti (svæði). Þá liggur línustrikið PQ innan í hringskífunni. Ef P og Q liggja sömu megin við sérhverja línu þá sker PQ enga línanna og það sýnir að P og Q liggja innan sama búts. Setjum næst sem svo að P og Q liggi sitthvoru megin við einhverja línanna. Þá skera allir ferlar milli P og Q þá línu sem sýnir að þá liggja P og Q ekki innan sama svæðisins.

Sýnum nú með þrepun á $n \in \mathbb{N}$ að mesti fjöldi svæða fæst þegar sérhver lína sker sérhverja aðra línu og að allir skurðpunktarnir eru ólíkir. Við sýnum enn fremur að ef við höfum s svæði þegar við höfum dregið n línur þá höfum við í mesta lagi $s + n + 2$ svæði þegar við bætum $n + 1$-stu línunni við.

1. Fyrir $n = 0$ er staðhæfing augljóslega rétt því það er er aðeins ein leið til að teikna eina línu og sé engin lína dregin þá er hringskífunni skipt í nákvæmlega einn hluta. Svo er ljóst að ef við drögum línu um hringskífuna þá verða hlutarnir tveir.

2. Gerum ráð fyrir að staðhæfingin hafi verið sönnuð fyrir $n \in \mathbb{N}$. Gerum ráð fyrir að hringskífunni hafi verið skipt í n svæði með n línum. Ef við drögum $n+1$-stu línuna þá sker sú lína sérhverja hina línanna í mesta lagi einum punkti (ólíkar línur geta ekki haft fleiri en einn skurðpunkt) og því sést að fjöldi slíkra skurðpunkta k er minni eða jafn n. k skurðpunktar á nýju línunni skipta

henni í $k+1$ hluta og sérhverjir tveir hlutar liggja sitthvoru megin við einhverja hinna línanna. Þetta sýnir að nýja línan liggur um $k+1$ af gömlu svæðunum. Þegar við drögum $n+1$-stu línuna þá höldum við þeim svæðum sem nýja línan liggur ekki um óbreyttum en sérhvert svæði sem nýja línan liggur um verður að tveimur svæðum, sitt hvoru megin við nýju línuna. Fjöldi svæða þegar nýja línan hefur verið dregin er því $s-(k+1)+2(k+1)=s+k+1$. Þar sem $k \leq n$ þá fæst að fjöldi svæða verður í mesta lagi $x+n+1$ eftir að nýja línan hefur verið dregin og slíkt gerist ef og aðeins ef nýja línan sker sérhverja gömlu línanna í ólíkum skurðpunktum.

Gerum ráð fyrir að við getum fundið n línur þannig að sérhver þeirra sker sérhverja aðra þeirra og allir skurðpunktarnir eru ólíkir. Merkjum skurðpunkta línanna við jaðar hringskífunnar. Þannig fást $2n$ skurðpunktar því þar sem sérhverjar tvær línanna skerast og hafa því ólíka skurðpunkta við jaðarinn. Látum A og B vera skurðpunkt einhverrar línanna ℓ við jaðarinn. Þá skipta A og B jaðri hringskífunnar í tvo boga. Þar sem sérhver hinna línanna sker ℓ þá fæst að endapunktar hinna línanna liggja sitthvoru megin við ℓ, það er endapunktar hinna línanna liggja á sitthvorum boganum sem A og B skipta jaðrinum í. Þetta sýnir að það liggja jafnmargir skurðpunktar hinna línanna við jaðar hringskífunnar á hvorum boganum sem A og B skipta jaðrinum í. Þetta sýnir að hvor boganna sem A og B skipta jaðrinum í jafnmarga hluta. Þar sem $2n$ punktar skipta jaðrinum í $2n$ hluta þá ályktum við að gagnstæðir hringbogar (það eru hringbogar sem hafa jafnmarga hringboga á milli sín í báðar áttir) liggja sitthvoru megin við sérhverja línanna. Veljum punkt C í einhverjum hringboganna. Ef D er einhver punktur í mótlægum hringboga þá sker línan CD sérhverja hinna n-línnanna. Þar sem á sérhverjum boga liggja óendanlega margir punktar þá getum við valið D þannig að línan CD liggi ekki um neinn gömlu skurðpunktanna. Þar af leiðir að skurðpunktar CD við hinar n-línurnar eru allir ólíkir. Þetta sýnir að við getum fundið $n+1$ línu sem allar skerast og allir skurðpunktarnir eru ólíkir.

Látum nú S_n vera mesta fjölda svæða sem n-línur geta skipt hringskífunni í. Við höfum að $S_0=1$ og við höfum sannað að $S_{n+1}=S_n+n+1$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Með þrepun á $n \in \mathbb{N}$ fæst því að $S_n=\frac{n^2+n+2}{2}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

1. Fyrir $n=0$ þá er $S_0=1$ og $\frac{n^2+n+2}{2}=\frac{0^2+0+2}{2}=1$ svo þetta gildir fyrir $n=0$.

2. Setjum nú sem svo að $S_n=\frac{n^2+n+2}{2}$ fyrir eitthvert $n \in \mathbb{N}$. Þá fæst:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n+n+1 \\ &= \frac{n^2+n+2}{2}+n+1 \\ &= \frac{n^2+3n+4}{2} \\ &= \frac{n^2+2n+1+n+1+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} \end{aligned}$$

Sem sýnir að $S_n=\frac{n^2+n+2}{2}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

Við vorum beðin um að reikna $S_6=\frac{6^2+6+2}{2}=22$.

Við höfum því sýnt að skipta má hringskífu í mesta lagi 22 hluta með 6 línum.

Í lausninni hér að ofan er dæmi um skiptingu á hringskífu í 22 hluta með 6 línum. $\square$

Dæmi 4

Atli og Fanney spila leik á rétthyrndu borði. Þau byrja með autt borð og leika til skiptis. Umferð fer svo fram að leikmaður litar einn eða fleiri reiti sem allir eru úr sömu línu eða sama dálki. Aðeins má lita hvern reit einu sinni. Sá vinnur sem litar síðasta reitinn. Atli byrjar.

(a) Hvort þeirra hefur örugga siguraðferð á 4×6 reita borði?

(b) Hvort þeirra hefur örugga siguraðferð á 5×6 reita borði?

Lausn

Skoðum borð af stærð $n \times m$. Sýnum að ef n og m eru slétt sigri ávallt seinni leikmaður. Við gerum það með því að spegla alltaf leik fyrri leikmanns. Í byrjun er borðið samhverft um miðju, því allir reitir eru auðir. Ef fyrri leikmaður leikur í reiti (i, j) leikum við þá í reiti $(n + 1 - i, m + 1 - j)$. Athugum að ef fyrri leikmaður leikur í línu i verður okkar leikur í línu $n + 1 - i$. Til þess að þetta sé sama línan þyrfti $i = n + 1 - i$, þ.e. $2i = n + 1$. En n er slétt, svo þetta getur ekki gerst. Því erum við að leika í aðra línu. Sama röksemdafærsla gildir ef fyrri leikmaðurinn leikur í dálk j. Því skarast okkar leikur ekki við leik andstæðingsins. Enn fremur er okkar leikur ávallt löglegur ef leikur andstæðingsins er það því borðið verður samhverft um miðju eftir hvern leik okkar. Þar með höfum við svar við sérhverjum leik andstæðingsins, svo við getum ekki tapað.

Sýnum nú næst að ef nákvæmlega annað hvort n eða m er slétt vinnur fyrri leikmaður alltaf. Sá leikmaður getur þá byrjað á að fylla út dálk eða línu í heild sinni svo borðið sem er eftir mun hafa n og m bæði slétt. Þá er hann seinni leikmaður í leiknum á þessu smærra borði og mun því vinna samkvæmt niðurstöðum að ofan. $\square$

Dæmi 5

Gefinn er hringur Ω og punktur A á Ω. Annar punktur B liggur á hringnum Ω og hringurinn Γ_1 með miðju B og geisla $|AB|$ sker Ω aftur í C. Hringurinn Γ_2 með miðju A og geisla $|AC|$ sker Γ_1 aftur í D. Sýnið að línan AD sé snertill við Ω.

Lausn 1

Þar sem C og D liggja á hring með miðju A er $|AC| = |DA|$. Þar sem A,B, C liggja á hring með miðju B eru $|BC| = |BA|$ og $|AB| = |CB|$. Samkvæmt þríhyrningareglu eru þríhyrningarnir $\triangle ABC$ og $\triangle DBA$ einslaga. Sér í lagi er $\angle ACB \cong \angle BAD$. Þar sem C og D liggja sitthvoru megin við línuna AB þá fæst að hornin $\angle ACB$ og $\angle BAD$ hafa sömu stefnu.

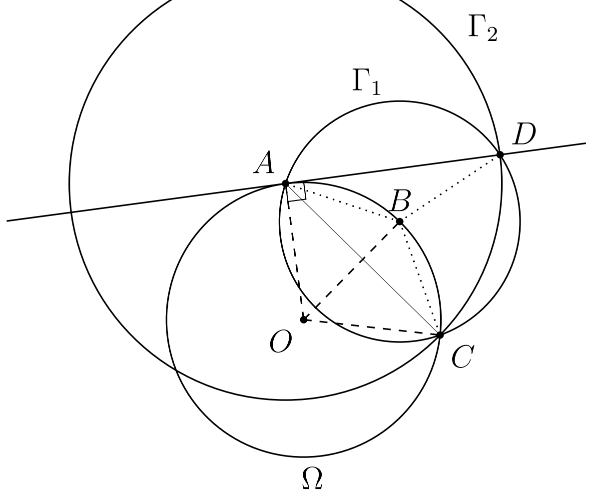
Þar með er $\angle BAD$ strengsnertilshorn við hringinn Ω, svo að línan AD er snertill við Ω, eins og sanna átti.

$\square$

Lausn 2

Gefinn er hringur Ω og punktur A á Ω. Annar punktur B liggur á hringnum Ω og hringurinn Γ_1 með miðju B og geisla $|AB|$ sker Ω aftur í C. Hringurinn Γ_2 með miðju A og geisla $|AC|$ sker Γ_1 aftur í D. Látum O vera miðju Ω.

Fyrir hálflínur ℓ og m með sama endapunkt P þá látum við $\rho_P(\ell, m)$ vera snúninginn sem tekur ℓ í m. Við notum $\equiv$ til að tákna að tveir snúningar séu jafstórir í sömu stefnu án þess þó að þeir þurfi að hafa sömu miðju.



Þar sem A og C eru skurðpunktar Ω og Γ_1 með miðjur O og B, í þessari röð, þá fæst að C er speglun A um línuna OB. Því fæst að $\rho_O\left([O,A\rangle,[O,B\rangle\right)=\rho_O\left([O,B\rangle,[O,C\rangle\right)$. Þar sem C og D eru skurðpunktar Γ_1 og Γ_2 með miðjur B og A, í þessari röð þá fæst að D er speglun C um línuna AB. Þar með fæst að $\rho_A(([A,B\rangle,[A,C\rangle)=\rho_A\left([A,D\rangle,[A,B\rangle\right)$. Þetta sýnir að

$$\rho_O\left([O,A\rangle,[O,C\rangle\right)=\rho_O\left([O,B\rangle,[O,C\rangle\right)^2$$

og

$$\rho_A\left([A,D\rangle,[A,C\rangle\right)=\rho_A\left([A,B\rangle,[A,C\rangle\right)^2$$

Þar sem O er miðja Ω og A, B og C liggja á Ω þá leiðir af setningu um ferilhorn við hring að

$$\rho_A\left([A,B\rangle,[A,C\rangle\right)^2\equiv\rho_O\left([O,B\rangle,[O,C\rangle\right)$$

Við höfum því

$$\rho_A\left([A,D\rangle,[A,C\rangle\right)\equiv\rho_O\left([O,B\rangle,[O,C\rangle\right)$$

Af setningu um hornamummu þríhyrninga leiðir að

$$\rho_O\left([O,A\rangle,[O,C\rangle\right)\circ\rho_C\left([C,O\rangle,[C,A\rangle\right)\circ\rho_A\left([A,C\rangle,[A,O\rangle\right)\equiv\sigma$$

þar sem σ er hálfur snúningur.
Þar sem $\triangle AOC$ er jafnarma með topppunkt O þá fæst að

$$\rho_C\left([C,O\rangle,[C,A\rangle\right)\equiv\rho_A\left([A,C\rangle,[A,O\rangle\right)$$

Þar sem $\rho_O\left([O,A\rangle,[O,C\rangle\right)=\rho_O\left([O,B\rangle,[O,C\rangle\right)^2\equiv\rho_A\left([A,D\rangle,[A,C\rangle\right)^2$ þá fæst

$$\begin{aligned}
\left(\rho_O\left([A,O\rangle,[A,D\rangle\right)\right)^2 &\equiv \left(\rho_A\left([A,D\rangle,[A,C\rangle\right)\circ\rho_A\left([A,C\rangle,[A,O\rangle\right)\right)^2\\
&\equiv \left(\rho_A\left([A,D\rangle,[A,C\rangle\right)\right)^2\circ\left(\rho_A\left([A,C\rangle,[A,O\rangle\right)\right)^2\\
&\equiv \rho_O\left([O,A\rangle,[O,C\rangle\right)\circ\rho_C\left([C,O\rangle,[C,A\rangle\right)\circ\rho_A\left([A,C\rangle,[A,O\rangle\right)\\
&\equiv \sigma
\end{aligned}$$

Það er ef við beitum snúningunum

$$\rho_O\left([A,O\rangle,[A,D\rangle\right)$$

tvisar þá fáum við hálfan snúing. Þetta snýnir að $\rho_O([A,O\rangle, [A,D\rangle)$ er snúningur um rétt horn. Sér í lagi er $\angle OAD$ rétt. Þar sem O er miðja Ω þýðir þetta að línan AD er snertill við Ω í A. $\square$

Dæmi 6

Gefin er $a \in \mathbb{Q}_+$. Ákvarða skal öll föll $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ þannig að fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}_+$ gildi að

$$f\left(\frac{x}{y} + y\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + ax$$

Mengið $\mathbb{Q}_+$ er mengi allra jákvæðra ræðra talna.

Lausn

Setjum $x \mapsto x$, $y \mapsto x$ inn í jöfnuna og fáum

$$f(x+1) = f\left(\frac{x}{x} + x\right) = \frac{f(x)}{f(x)} + f(x) + ax = f(x) + ax + 1$$

Ef við beitum þessari jöfnu ítrekað fæst fyrir $x \in \mathbb{Q}_+$ og $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x+n) - f(x) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(f(x+m+1) - f(x+m)\right) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} a(x+m) + 1 \\ &= (ax+1) \cdot \left(\sum_{m=0}^{n-1} 1\right) + a\left(\sum_{m=0}^{n-1} m\right) \\ &= (ax+1) \cdot n + a \cdot \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

það er

$$f(x+n) = f(x) + anx + \frac{an(n-1)}{2} + n \tag{1}$$

Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{N}_{>0}$ og setjum $x \mapsto nx$ og $y \mapsto x$ og fáum

$$f(x+n) = f\left(\frac{nx}{x} + x\right) = \frac{f(nx)}{f(x)} + f(x) + anx$$

ásamt (1) gefur þetta

$$\frac{f(nx)}{f(x)} = \frac{an(n-1)}{2} + n \tag{2}$$

því liðirnir $f(x)$ og anx styttast út.

Við þurfum bara að nota (1) og (2) fyrir $n \leq 4$ til að ákvarða hvað a þarf að vera og til að ákvarða gildi $f(1)$ en jöfnuar koma að góðum notum í síðustu skrefum lausnarinnar.

Setjum nú ($x \mapsto x$, $n \mapsto 4$), ($x \mapsto 2x$, $n \mapsto 2$) og ($x \mapsto x$, $n \mapsto 2$) inn í (2) og fáum

$$6a + 4 = \frac{f(4x)}{f(x)} = \frac{f(2(2x))}{f(2x)} \cdot \frac{f(2x)}{f(x)} = (a+2)^2 = a^2 + 4a + 4$$

svo $a(a-2) = a^2 - 2a = 0$.
Þar sem a er jákvæð ræð tala er hefur fallajafnan enga lausn nema ef gefna talan $a = 2$.
Við getum héðan í frá gert ráð fyrir að $a = 2$. Þá fæst að (1) jafngildir

$$f(n+n) = f(x) + 2nx + n^2 \tag{3}$$

og (2) jafngildir

$$\frac{f(nx)}{f(x)} = n^2 \tag{4}$$

Setjum nú $x \mapsto 1$ og $n \mapsto 1$ inn í (3) þá fæst

$$f(2) = f(1) + 3$$

Setjum svo $x \mapsto 1$ og $n \mapsto 2$ inn í (4) og fáum

$$4 = \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{f(1)+3}{f(1)} = 1 + \frac{3}{f(1)}$$

svo $f(1) = 1$.
Setjum næst $x \mapsto 1$, $n \mapsto n$ inn í (4) þá fæst

$$f(n) = \frac{f(n)}{f(1)} = n^2.$$

Látu nú x og y vera heiltölur þá gefur upphaflega fallajafnan

$$f\left(\frac{x}{y} + y\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + 2x = \frac{x^2}{y^2} + y^2 + 2x = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + y^2 + 2x.$$

Þá gefur (3) að vinstri hliðin verður

$$f\left(\frac{x}{y} + y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + 2y\frac{x}{y} + y(y-1) + y = f\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 + 2x.$$

Saman gefa síðustu tvær jöfnur að

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Sannreynum nú að $f(x) = x^2$ sé lausn á upprunalegu fallajöfnunni ef $a = 2$.

$$f\left(\frac{x}{y} + y\right) = \left(\frac{x}{y} + y\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2 = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + 2x$$

svo fallajöfnunni er fullnægt.
Ef $a \neq 2$ þá uppfyllir ekkert fall fallajöfnuna en ef $a = 2$ þá er $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+,\ x \mapsto x^2$ eina fallið sem leysir fallajöfnuna. $\square$