# Líkindafræðilega aðferðin

Notkun líkinda til að leysa IMO fléttufræðidæmi

Atli Fannar Franklín

Þessi texti mun fara mjög hratt yfir flest sem tengist líkindafræðigrunni. Mælt er með því að kynna sér líkindafræði annars staðar frá fyrst áður en lagt er í þetta efni. Í þessum texta munum við hins vegar aðeins skoða líkindarúm með teljanlega mörgum útkomum sem einfaldar sumt. Þurfum því ekki að heilda eða styðjast við mál. Skilgreiningarnar sem gefnar eru að neðan eru jafngildar almennari skilgreiningum þegar aðeins eru skoðuð teljanleg líkindarúm.

**Skilgreining.** Lát $\Omega$ vera teljanlegt mengi útkoma. Fyrir hverja útkomu $\omega \in \Omega$ úthlutum við líkindum $P(\omega) \geq 0$ þannig að $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.

**Skilgreining.** Atburður $A$ er hlutmengi $\Omega$. Líkindi atburðs $A$ eru gefin með $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

Klassískt dæmi er að skoða útkomu kasts sex-hliða tenings. Þá er $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og $P(\omega) = 1/6$ fyrir öll $\omega$. Við gætum þá til dæmis skilgreint atburðinn $A$ sem allar útkomur þar sem teningakastið gefur af sér oddatölu, þ.e. $A = \{1, 3, 5\}$. Þá er $P(A) = 1/2$. Við gætum líka skilgreint gallaðan tening sem lendir á 6 helming allra skipta og á öðrum hliðum hver með líkum $1/10$. Þá væri $P(A) = 3/10$.

**Setning** (Sammengisskorðan (*Union Bound*))**.** Fyrir atburði $A_1, \ldots, A_n$ gildir $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.

Sönnun þessa setningar er skilin eftir sem æfing fyrir lesandann og ætti hún vonandi ekki að vefjast mikið fyrir lesanda. Þrátt fyrir að þetta sé mjög einföld og gróf niðurstaða er hún samt oft nytsamleg. Í þessum texta mun ég svo ekki sanna allar niðurstöður sem ég set fram því margar þeirra eru nytsamlegar fyrir IMO-keppanda en sannanir þeirra margar afar tæknilegar og notast við fræði sem er utan við ætlað þekkingasvið IMO-keppanda.

Algengt bragð í líkindafræðilegu aðferðinni er að sýna að eitthvert fyrirbæri sé til með því að sýna að líkurnar á því að slíkt fyrirbæri sé valið af handahófi úr stærra úrtaki séu strangt stærri en núll. Til þess að fá slíka niðurstöðu er sammengisskorðan oft nytsamleg. Tökum dæmi um þetta. Skilgreinum $R(k, l)$ sem minnstu heiltöluna $n$ þannig að $K_n$ hafi rauða $k$-klíku eða bláa $l$-klíku sama hvering leggir $K_n$ eru litaðir rauðir eða bláir. $K_n$ táknar hér fullskipaða netið á $n$ hnútum og klíka er hlutnet sem er fullskipað. Þessar tölur eru þekktar sem Ramsey tölurnar. Við ætlum að sýna að $R(k, k) \geq 2^{k/2}$ með líkindafræðilegu aðferðinni. Látum $n = 2^{k/2}$ og köstum krónu fyrir hvern legg og litum legginn rauðan eða bláan eftir því hvað við fáum úr því. Fyrir hlutmengi hnúta $S$ af stærð $k$ skilgreinum við atburðinn $A_S$ sem allar útkomur þar sem $S$ er einlit klíka, s.s. allir leggir milli hnúta í $S$ eru í sama lit. Það eru $\binom{k}{2}$ leggir í $S$ svo líkurnar að þeir séu allir rauðir er þá $(1/2)^{\binom{k}{2}}$. Fáum sömu niðurstöðu fyrir bláan svo $P(A_S) = 2^{-\binom{k}{2}+1}$. Sammengisskorðan gefur okkur þá

$$P\left(\bigcup_S A_S\right) \leq \sum_S P(A_S) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}+1} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{1+k/2-k^2/2} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} \frac{n^k}{2^{k^2/2}}$$

þar sem summan og sammengið eru tekin yfir öll möguleg slík mengi $S$. Ef við stingum inn $n = 2^{k/2}$ fáum við að þetta sé strangt minna en 1 fyrir $k \geq 3$. Því eru líkurnar á að ekkert $A_S$-anna eigi sér stað strangt stærri en núll, svo til er einhver litun þar sem við höfum enga einlita $k$-klíku.

Skoðum annað dæmi. Ofurnet er net þar sem leggirnir eru hlutmengi hnúta, mögulega fleiri en tveggja hnúta. Ef sérhver leggur hefur sama fjölda $n$ hnúta köllum við netið $n$-ofurnet. Gerum nú ráð fyrir að $n \geq 4$ og að $H$ sé $n$-ofurnet með mest $4^{n-1}/3^n$ leggi. Við munum sýna að lita megi hnúta $H$ í fjórum litum þannig að sérhver leggur innihaldi hnút af hverjum lit. Við gerum eins og áður og veljum lit hvers hnúts slembið með jöfnum líkum. Fyrir legg $e$ lát $A_e$ vera atburðinn af öllum útkomum þar sem það vantar að minnsta kosti einn lit í hnútana í $e$. Það eru 4 litir sem gæti vantað og ef einn vantar má lita hnútana á $3^n$ vegu. Alls eru $4^n$ leiðir til að lita hnútana svo $P(A_e) < 4 \cdot 3^n/4^n$. Þessi ójafna er ströng því við tvíteljum tilfellin þar sem fleiri en einn lit vantar. Sammengisskorðan gefur okkur þá bara beint að $P(\bigcup_e A_e) < 1$ þar sem sammengið er yfir alla leggi netsins. Því fæst að til sé slík litun.

**Skilgreining.** Slembibreyta er fall $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Væntigildi slembibreytu $X$ er $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega)$.

**Setning** (Línuleiki væntigildis)**.** $\mathbb{E}$ er línulegt, þ.e.a.s. fyrir slembibreytur $X, Y$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ gildir $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ og $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$.

Þetta er mjög oft nytsamlegt, sérstaklega þegar þessu er beitt á kennibreytur. Kennibreyta er slembibreyta skilgreind útfrá atburði $A$ sem tekur gildið 1 á stökum $A$ og gildið 0 á stökum ekki í $A$. Þessi slembibreyta er yfirleitt táknuð $\mathbb{1}_A$. Athugum að samkvæmt skilgreiningu er þá $P(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A]$. Tökum dæmi þar sem þetta nýtist. Litum leggi $K_n$ slembið rauða eða bláa, báðir litir valdir með líkum $1/2$. Lát $X$ vera fjölda rauðra þríhyrninga í netinu, s.s. hlutmengi hnúta af stærð þremur þar sem allir þrír leggir milli hnútanna eru rauðir. Merkjum þríhyrninga netsins með tölunum $1, 2, \ldots, \binom{n}{3}$. Þá getum við skilgreint atburðinn $E_i$ sem mengi útkoma þar sem þríhyrningur $i$ er rauður. Þá er $P(E_i) = 1/8$ því hver leggur hefur líkur $1/2$ á að vera rauður. En við sjáum einnig að $X = \mathbb{1}_{E_1} + \mathbb{1}_{E_2} + \ldots$. Því gefur niðurstaðan að ofan okkur beint að $\mathbb{E} = \binom{n}{3}/8$.

Skoðum einnig annað dæmi. Þetta dæmi er nokkurn veginn skylda að taka fyrir þegar væntigildi eru skoðuð í fléttufræðilegu samhengi. Látum $\Omega$ vera mengi allra umraðana á $n$ stökum og látum allar útkomur vera jafn líklegar. Látum $X$ vera slembibreytuna sem telur fjöldra fastra punkta í umröðuninni. Hvað er $\mathbb{E}[X]$? Við skilgreinum $F_i$ sem atburðinn að $i$-ta stakið sé fastapunktur umraðanarinnar. Ein af hverjum $n$ umröðunum, þ.e. $(n-1)!/n!$, festir $i$-ta stakið svo $\mathbb{E}[F_i] = 1/n$. En þá er $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[F_1] + \cdots + \mathbb{E}[F_n] = 1$.

Skoðum eitt dæmi enn áður en áfram er haldið. Þetta dæmi liggur nær því sem mætti búast við að sjá í keppnisstærðfræði. Við munum sýna að til sé keppnisnet á $n$ hnútum með að minnsta kosti $n!/2^{n-1}$ Hamilton-vegi. Keppnisnet er stefnt fullskipað net og Hamiltonvegur er einfaldur vegur sem fer í hvern hnút nákvæmlega einu sinni. Til að gera þetta veljum við stefnu hvers leggs slembið, helmingslíkur á hvorri áttun fyrir sig. Fyrir umröðun $\sigma$ á $n$ stökum lát $X_\sigma$ vera kennibreytuna sem segir til um hvort $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ gefi Hamiltonveg í keppnisnetinu. Þá telur $X = \sum_\sigma X_\sigma$ fjölda Hamiltonvega. Til þess að $\sigma$ gefi veg þurfa allir $n-1$ leggir í veginum að snúa rétt, svo að líkurnar á að það gildi eru $(1/2)^{n-1}$. Þá er $\mathbb{E}[X] = \sum_\sigma 1/2^{n-1} = n!/2^{n-1}$ því við höfum $n!$ umraðanir. En væntigildi er ekkert annað en vigtað meðaltal. Því ef vigtaða meðaltalið er $n!/2^{n-1}$ verður eitthvað net að láta $X$ taka a.m.k. það gildi. Því er til eitthvert keppnisnet á $n$ hnútum með a.m.k. $n!/2^{n-1}$ Hamilton-vegi.

**Setning** (Ójafna Markovs)**.** Fyrir slembibreytu $X$ sem tekur ekki neikvæð gildi gildir fyrir öll $t > 0$ að $P(X \geq t) \leq \mathbb{E}[X]/t$.

*Sönnun.* $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)X(\omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega: X(\omega)\geq t} P(\omega)t = tP(X \geq t)$. $\square$

**Skilgreining.** Dreifni slembibreytu $X$ er skilgreind sem $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. Sanna má að þetta sé jafngilt $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

**Skilgreining.** Samdreifni tveggja slembibreyta $X, Y$ er skilgreint sem $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

**Setning** (Dreifni summu)**.** Fyrir slembibreytur $X_1, \ldots, X_k$ gildir $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_k) = \sum_{i=1}^k \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i,j=1, i\neq j}^k \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

**Skilgreining.** Við segjum að tveir atburðir $A, B$ eru óháðir ef $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Þessa skilgreiningu má einnig setja fram með skilyrtum líkum. Líkurnar á að $A$ gerist að því gefnu að $B$ gerist, táknað $P(A|B)$, eru gefnar með $P(A \cap B)/P(B)$. Því má segja að $A$ og $B$ eru óháð ef $P(A|B) = P(A)$, þ.e. það hvort $B$ gerist hefur ekki áhrif á hvort $B$ gerist. Fyrir slembibreytur $X, Y$ segjum við að þær séu óháðar ef fyrir öll $t, s \in \mathbb{R}$ gildi $P((X = t) \cap (Y = s)) = P(X = t)P(Y = s)$. Loks segjum við að slembibreytur $X_1, \ldots, X_k$ eru innbyrðis óháðar ef fyrir öll $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ sé $P((X_1 = t_1) \cap \cdots \cap (X_k = t_k)) = P(X_1 = t_1) \ldots P(X_k = t_k)$.

Athugum að innbyrðis óháðar slembibreytur eru óháðar tvær og tvær, en leiðingin gildir almennt ekki í hina áttina. Dæmi um atburði sem eru ekki óháðir væri til dæmis að sex hliða teningur gefi odda niðurstöðu og að sex hliða teningur gefi slétta niðurstöðu. Ef annað gerist þá gerist ekki hitt, svo það hefur áhrif á hvort annað. Hins vegar er það að fá odda niðurstöðu og að fá meira en 4 óháð á sex hliða teningi. Skoðum líka snöggt dæmi um muninn á því að slembibreytur séu innbyrðis óháðar og að þær séu óháðar tvær og tvær. Látum $\Omega$ vera punkta í plani með heiltöluhnit. Látum $X$ vera slembibreytuna sem gefur $x$-hnit punkts, $Y$ gefa $y$-hnit punkts og $S$ gefa summu $x$ og $y$-hnits. Þessar slembibreytur eru óháðar tvær og tvær því engin ein þeirra ákvarðar aðra. En ef við höfum tvær þeirra er sú síðasta þegar þekkt, svo þær eru ekki innbyrðis óháðar.

**Setning** (Væntigildi margfeldis)**.** Ef $X_1, \dots, X_k$ eru innbyrðis óháðar slembibreytur gildir $\mathbb{E}[X_1 \dots X_k] = \mathbb{E}[X_1] \dots \mathbb{E}[X_k]$. Þetta gefur okkur sem fylgisetningu að ef $X, Y$ eru óháðar slembibreytur er $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Eins fáum við að ef $X_i$-in eru óháðar tvær og tvær gildi $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_k) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_k)$.

**Setning** (Ójafna Chebyshevs)**.** Lát $X$ vera slembibreytu. Þá fyrir öll $t > 0$ gildir $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \mathrm{Var}(X)/t^2$.

*Sönnun.* Stingum bara $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$ inn í ójöfnu Markovs. □

Þessar skilgreiningar og niðurstöður geta verið nytsamlegar til að takmarka hversu langt burt frá væntigildinu niðurstöðurnar okkar dreifast. Fyrir IMO-dæmi er þetta yfirleitt nytsamlegt til þess að sýna að eitthvað visst hlutfall niðurstaðanna, t.d. helmingurinn, sé innan vissrar fjarlægðar frá væntigildinu. Næsta skref á eftir því er oft þá að nota skúffureglu eða eitthvað svipað. Við munum skoða summufrjáls mengi sem dæmi. Lát $A$ vera hlutmengi $\{1, 2, \dots, n\}$. Köllum það summufrjálst ef öll $2^{|A|}$ ólík hlutmengi $A$ hafa ólíkar summur. Við viljum athuga hversu stórt $A$ getur verið. Látum $f(n)$ vera stærð stærsta summufrjálsa hlutmengis $\{1, 2, \dots, n\}$. Við getum alltaf valið $A$ sem öll veldi af tveimur í $\{1, 2, \dots, n\}$ svo $f(n) \geq \lfloor \log_2(n) \rfloor$. Við getum hins vegar notað líkindafræðilegu aðferðina til að skorða $f$ að ofan. Munum sýna $f(n) < \log_2(n) + \log_2(\log_2(n))/2 + C$ fyrir einhvern fasta $C$. Lát $A$ vera summufrjálst mengi af stærð $f(n)$ og táknum stök þess með $a_1, \dots, a_k$ þar sem $k = f(n)$. Veljum $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ slembið sem annað hvort 0 eða 1. Lát $X = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Getum þá reiknað út að

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[\epsilon_i a_i] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}(\epsilon_i a_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \leq \frac{1}{4} k n^2$$

Þá gefur ójafna Chebyshevs okkur að

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq n\sqrt{k}) \leq \frac{1}{4}$$

Því er hlutfall summa sem er í fjarlægð $n\sqrt{k}$ eða minna frá $\mathbb{E}[X]$ a.m.k. $3/4$. Því erum a.m.k. $3/4 \cdot 2^k$ summur á þessu bili af lengd $2n\sqrt{k}$. Þar sem $A$ er summufrjálst eru þær allar ólíkar svo $3/4 \cdot 2^k \leq 2n\sqrt{k}$. Ef leyst er úr þessarri ójöfnu fæst umbeðin niðurstaða.

Þessi aðferð virkar oft vel samhliða breytingaraðferðinni. Breytingaraðferðin felst í því að nota líkindafræðilegu aðferðina til að fá lausn sem er næstum því nógu góð og breyta henni svo til þar til hún er nógu góð. Ég gat ekki fundið nein IMO-dæmi sem nota þessa aðferð svo ég fer ekki í hana hér. Þeir sem hafa áhuga geta lesið um hana í The Probablistic Method, sem er aðalheimild þessa texta.

**Setning** (Ójafna Chernoffs)**.** Lát $X_1, \ldots, X_n$ vera innbyrðis óháðar slembibreytur sem taka gildin $-1$ og $+1$ með líkum $1/2$ hvort. Lát $X = \sum_i X_i$, þá fæst fyrir öll $t > 0$ að

$$P(X \leq -t) = P(X \geq t) \leq e^{-t^2/2n}$$

Þegar $X_i$-in taka gildi 0 og 1 með líkum $1/2$ hvort fæst í staðinn eftirfarandi útgáfa setningarinnar

$$P\left(X \leq \frac{n}{2} - t\right) = P\left(X \geq \frac{n}{2} + t\right) \leq e^{-2t^2/n}$$

Þessi setning er yfirleitt nytsamleg í svipuðum aðstæðum og tólin sem kynnd voru að ofan. Þetta gefur bara betra og auðveldara mat þegar $X_i$-in eru nákvæmlega eins og í setningunni. Það vill svo til að það gerist sæmilega oft þrátt fyrir hvað setningin má virðast sértæk. Ég ætla samt ekki að leggja of mikla áherslu á þessa setningu því ég gat aðeins nýtt hana í staka IMO-dæmi.

**Setning** (Staðbundna hjálparsetning Lovász)**.** Gefum okkur atburði $A_1, \ldots, A_n$ sem hafa allar líkur í mesta lagi $p < 1$. Gerum ráð fyrir að hver atburður $A_i$ er innbyrðis óháður öllum öðrum atburðum nema í mesta lagi $d$ annarra atburða $A_j$. Þá ef $ep(d+1) \leq 1$ eru líkurnar á að enginn atburðanna gerist stærri en núll.

Þessi hjálparsetning er einstaklega öflug þegar hún á við. Tökum dæmi úr dæmalista Evan Chen. Lát $n$ vera jákvæða heiltölu. Röðum $11n$ punkta á hring og litum þá í $n$ litum svo hver litur er notaður 11 sinnu. Viljum sýna að velja megi einn punkt af hverjum lit svo engir tveir þeirra séu hlið við hlið. Við gerum þetta með því að velja einn punkt af hverjum lit með slembnum hætti. Númerum punktana á hringnum $1, 2, \ldots, 11n$. Látum $E_i$ vera atburðinn að við veljum punkt $i$ og nágranna þess á hægri hönd. Ef þeir eru í sama lit gerist þetta aldrei því við veljum aðeins einn punkt af hverjum lit. Ef þeir eru í ólíkum litum eru líkurnar á að við veljum punkt $i$ nákvæmlega $1/11$ og sama fyrir nágrannann. Þar sem þeir eru í ólíkum litum eru atburðirnir óháðir svo $P(E_i) = 1/121$ í þessu tilfelli. Því er $P(E_i) \leq 1/121$ sama hvað. Ef $E_i$ og $E_j$ hafa enga sameiginlega punkta eða liti eru þeir óháðir. $E_i$ hefur tvo atburði sem deila punktum til beggja hliða. Einnig eru 10 punktar í hverjum lit dreifðir um hringinn sem eru allir hluti af tveimur atburðum. Því eru $2 \cdot 2 \cdot 10 + 2$ atburðir sem $E_i$ er ekki endilega óháður, en hann er innbyrðis óháður öllum öðrum atburðum. Því setjum við $p = 1/121$ og $d = 42$. Þar sem $43e/121 \leq 1$ gefur þá staðbundna hjálparsetning Lovász að til sé val á punktum þannig að engir tveir þeirra séu aðlægir (því enginn atburðanna gerist). Loks set ég tvær niðurstöður í viðbót að neðan sem ég hef notað þegar ég nota líkindafræðilegu aðferðina en hef ekki nýtt mikið í IMO-legum dæmum. Meira efni um þessar niðurstöður eða almennt um líkindafræðilegu aðferðina má finna í The Probablistic Method eftir Alon og Spencer.

**Setning** (Ójafna Azuma-Hoeffding)**.** Gefum okkur að liða megi mengi útkoma upp sem karteskt margfeldi, $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$. Lát $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vera slembibreytu. Við segjum að $X$ sé $C$-Lipschitz ef það að breyta einu hniti í inntaki $X$ breytir gildi $X$ mest um $C$. Ef $X$ er $C$-Lipschitz og $\lambda \geq 0$ gildir

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2C^2 n}\right)$$

**Setning** (Fylgnisójafnan)**.** Lát $A, B \subseteq \{0,1\}^N$ vera atburði. Við segjum að $A$ sé vaxandi atburður ef það að taka stak úr $A$ og breyta hniti úr 0 í 1 gefur gildi sem er einnig í $A$. Skilgreinum lækkandi atburð með svipuðum hætti. Ef $A$ og $B$ eru bæði vaxandi eða bæði minnkandi er $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$. Ef annað þeirra er vaxandi og hitt minnkandi er $P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$.

Hér rétt í lokin ætla ég að henda inn nokkrum ójöfnum. Ég mun ekki fara í ójöfnur eins og ójöfnu Jensens hér, hana má finna í öðrum textum. Mæli hins vegar með því að lesendur kynni sér hana áður en þeir vaða í dæmin að neðan. Ójöfnurnar sem ég set hér eru ójöfnur sem nýtast við það að beita líkindafræðilegu aðferðinni en eru ekki mikið notaðar annars staðar.

$$\binom{n}{k} \leq n^k/k!, \quad \binom{n}{k} \leq (en/k)^k, \quad \binom{n}{k} \geq (n/k)^k, \quad \binom{n}{k} \geq (n-k+1)^k/k!$$

$$1 + x \leq e^x \text{ for } x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \geq e^{-2x} \text{ for } x \in [0, 1/2]$$

Bendum sérstaklega á að ójafnan $1 + x \leq e^x$ er mjög oft nytsamleg þegar við látum $x = -p$ fyrir einhverjar litlar líkur $p$ svo $1 - p \leq e^{-p}$. Þetta auðveldar okkur að vinna með stærðir á við $(1-p)^N$.

## Dæmi:

Dæmin eru gefin á þyngdarskala frá 1 og upp í 5. Dæmi í mörgum liðum eru gefin þyngdarstig þyngsta liðs. Þessi þyngdarstig eru bara mitt huglæga mat við það að leysa þau sjálfur en þær gefa lesanda vonandi einhverja hugmynd um þyngd dæmanna. Stjörnumerkt dæmi eru dæmi sem krefjast þekkingar utan þessa fyrirlesturs sem er ekki endilega ætlast til að meðal IMO keppandi þekki eða notar efni sem var bara farið mjög snöggt í. Uppruni dæmanna er gefinn á eftir þyngdinni. Ég reyndi að gefa upphaflegar heimildir eftir bestu getu. Mörg dæmanna má leysa með öðrum aðferðum en líkindafræðilegu aðferðinni en það má leysa þau öll með líkindafræðilegu aðferðinni. Ég hvet lesanda til þess að nota líkindafræðilegu aðferðina til að leysa dæmin.

- (1, HMMT 2006) Í leikskóla sitja 2006 smábörn í hring. Allt í einu potar hvert smábarn annað hvort smábarnið hægra eða vinstra megin við sig. Hver er væntur fjöldi ópotaðra barna?

- (1, Ójafna Kraft) Lát $S$ vera endanlegt mengi endanlegra bitastrengja þannig að enginn strengur í menginu sé forskeyti annars. Táknum fjölda bita í streng $s$ með $|s|$. Sýnið að $\sum_{s\in S} \frac{1}{2^{|s|}} \leq 1$.

- (2, Benny Sudakov) Lát $p$ vera frumtölu og $A \subset \mathbb{Z}_p$ vera mengi leifaflokka þannig að $|A| < p^{2/3}$. Sýnið að til séu $x, y \in \mathbb{Z}_p$ þannig að $A \cap (A + x) \cap (A + y) = \varnothing$.

- (2, Bay Area Math Olympiad 2004) Gefum okkur $n$ rauntölur sem eru ekki allar núll og hafa summuna núll. Sannið að tölusetja megi þessar tölur sem $a_1, \ldots, a_n$ þannig að $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 < 0$.

- (2, Russia 2006) Í vissu hópferðalagi hefur hver ferðalangur að minnsta kosti 50 og í mesta lagi 100 vini meðal hinna ferðalanganna. Sýnið að gefa megi öllum ferðalöngum bol í að mesta lagi 1331 ólíkum litum svo að sérhver manneskja hefur 20 vini sem eru allir í ólíkum bolalitum.

- (2, IMC for University Students 2002) Stærðfræðikeppni hefur sex dæmi og 200 keppendur. Hvert dæmi er leyst af að minnsta kosti 120 keppendum. Sýnið að til séu tveir keppendur sem á milli sín leystu öll dæmin.

- (2, Iran TST 2008) Höfum keppni með 799 liðum þar sem sérhvert lið keppir við sérhvert annað lið nákvæmlega einu sinni. Sýnið að til séu tveir sundurlægir hópar $A$ og $B$ af 7 liðum hvort þannig að öll liðin í $A$ unnu öll liðin í $B$.

- (2, The Probablistic Method) Lát $G$ vera einfalt net þar sem hverjum hnút $v$ er úthlutað lista $S(v)$ af litum af lengd að minnsta kosti $10d$ þar sem $d \geq 1$. Gerum einnig ráð fyrir að fyrir öll $v \in V$ og $c \in S(v)$ hefur $v$ í mesta lagi $d$ nágranna $u$ þannig að $c \in S(u)$. Sýnið að lita megi $G$ þannig að hver hnútur fái lit úr listanum sínum og enginn leggur liggur milli einslitaðra hnúta.

- (2, The Probablistic Method) Við segjum að keppnisnet sé $k$-yfirgnæft ef fyrir sérhvert hlutmengi $k$ hnúta sé til einhver hnútur sem sigrar þá alla. Lát $f(k)$ vera stærð minnsta $k$-yfirgnæfða keppnisnetsins. Sýnið að $f(k) \geq 2^{k+1} - 1$.

- (2, IMO Shortlist 1987) Sýnið að lita megi stök $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ með fjórum litum þannig að sérhver jafnmunaröð með tíu stök sé ekki öll í einum lit.

- (2, IMO 1987) Lát $p_n(k)$ vera fjölda umraðana mengisins $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 1)$ með nákvæmlega $k$ fastapunkta. Sýnið að $\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$.

- (2, MathLinks.ro 2008) Lát $A_1, \ldots, A_n$ og $B_1, \ldots, B_n$ vera ólík endanleg hlutmengi $\mathbb{N}$ þannig að fyrir öll $i$ gildi $A_i \cap B_i = \varnothing$ og fyrir öll $i \neq j$ gildi $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \varnothing$. Sýnið að fyrir sérhverja rauntölu $0 \leq p \leq 1$ gildi $\sum_i p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1$.

- (2*, Benny Sudakov) Lát $G$ vera net með $m$ leggjum og $S$ vera slembið hlutmengi hnútamengis $G$ þar sem við ákveðum að halda hverjum hnút með líkum $1/2$. Sýnið að líkurnar á að $S$ sé óháð mengi í $G$ sé að minnsta kosti $(3/4)^m$. Það að $S$ sé óháð mengi í $G$ þýðir að engir tveir hnútar í $S$ hafi legg á milli sín í $G$.

- (3, IMO shortlist 1999) Lát $A$ vera mengi $N$ leifaflokka í $\mathbb{Z}_{N^2}$. Sýnið að til sé mengi $B$ af $N$ leifaflokkum í $\mathbb{Z}_{N^2}$ þannig að $A+B$ innihaldi að minnsta kosti helming allra leifaflokka $\mathbb{Z}_{N^2}$.

- (3, IMO Shortlist 2006) Lát $S$ vera endanlegt mengi punkta í planinu þannig að engir þrír þeirra liggji á sömu línu. Fyrir sérhvern kúptan marghyrning $P$ með hornpunkta í $S$ lát $a(P)$ era fjöldi hornpunkta $P$ og $b(P)$ vera fjölda punkta í $S$ sem liggja utan við $P$. Sýnið að fyrir sérverja rauntölu $x$ sé $\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$ þar sem summan er tekin yfir alla kúpta marghyrninga með hornpunkta í $S$. Athugið að línustrok, punktur og tómamengið eru talin með sem kúptir marghyrningar með $2, 1$ og $0$ hornpunkta.

- (3, The Probablistic Method) Sýnið að til sé fasti $c > 0$ með eftirfarandi eiginleika. Lát $A$ vera $n \times n$ fylki með stök sem eru ólík tvö og tvö. Þá er til umröðun á röðum $A$ svo að enginn dálkur í $A$ sé með vaxandi hlutrunu af lengd að minnsta kosti $c\sqrt{n}$.

- (3, Benny Sudakov) Lát $G$ vera stefnt net á $n$ hnútum með að minnsta kosti $\lceil n \log_2(n) \rceil$ leggi. Sýnið að til sé keppnisnet á $n$ hnútum sem inniheldur ekkert hlutnet einsmóta $G$.

- (3, Russia 1996) Gerum ráð fyrir að við höfum 1600 nemendur sem eru búnir að stofna 16000 nefndir og hver nefnd inniheldur 80 nemendur. Sýnið að til séu tvær nefndir sem hafa í mesta lagi 4 nemendur sameiginlega.

- (3, MOP 2007) Gefið er $n \times n$ fylki þar sem búið er að koma tölunum $1, 2, \ldots, n$ fyrir, hver tala kemur fyrir $n$ sinnum. Sýnið að til sé röð eða dálkur í fylkinu með að minnsta kosti $\sqrt{n}$ ólíkar tölur.

- (3, Bollobás) Lát $A_1, \ldots, A_n$ og $B_1, \ldots, B_n$ vera ólík hlutmengi $\mathbb{N}$ þannig að fyrir öll $i$ gildi $|A_i| = r$, $|B_i| = s$ og $A_i \cap B_i = \varnothing$. Einnig gerum við ráð fyrir að fyrir öll $i \neq j$ gildi $A_i \cap B_j \neq \varnothing$. Sýnið að $n \leq \binom{r+s}{r}$.

- (3, The Probablistic Method) Lát $G$ vera tvíhlutanet á $2^n$ hnútum þar sem hverjum hnút $v$ er úthlutað lista $S(v)$ af meir en $n$ litum. Sýnið að lita megi $G$ þannig að hver hnútur fái lit úr lista sínum og enginn leggur liggji milli einslitra hnúta.

- (3, The Probablistic Method) Lát $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ vera vigra af lengd 1. Sýnið að til séu $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ þannig að $|\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n| \leq \sqrt{n}$.

- (3, Zarankiewicz) Sýnið að skipta megi mengi jákvæðra heiltalna í tvö mengi þannig að hvorugt mengið innihaldi þrjár aðlægar tölur né neina óendanlega jafnmunaröð.

- (3, The Probablistic Method) Lát $v_1 = (x_1, y_1), \ldots, v_n = (x_n, y_n)$ vera $n$ tvívíða vigra þannig að öll $x_i, y_i$ séu heiltölur með algildi sem er í mesta lagi $2^{n/2}/(100\sqrt{n})$. Sýnið að til séu ólík sundurlæg mengi $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ þannig að $\sum_{i \in I} v_i = \sum_{j \in J} v_j$.

- (3, IMO 1989) Umröðun $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ á $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ þar sem $n$ er jákvæð heiltala er sögð hafa eiginleikann $P$ ef $|x_i - x_{i+1}| = n$ fyrir að minnsta kosti eitt $i$ í $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Sýnið að fyrir hvert $n$ séu til fleiri umraðanir með eiginleikann $P$ en án.

- (3, Benny Sudakov) Lát $T$ vera keppnisnet þannig að hver hnútur hafi útstig að minnsta kosti 10. Sýnið að lita megi hnúta $T$ með tveimur litum þannig að sérhver hnútur í $T$ hafi að minnsta kosti einn útnágranna í hvorum lit.

- (3, Benny Sudakov) Lát $H$ vera $d$-ofurnet með $d \geq 6$. Sýnið að lita megi hnúta $H$ rauða eða bláa þannig að munurinn á fjölda rauðra og bláa hnúta í hverjum legg sé mest $\sqrt{6d\log(d)}$.

- (3, Benny Sudakov) Lát $G$ vera $d$-reglulegt net með $d \geq 2$. Það að net sé $d$-reglulegt þýðir að sérhver hnútur hafi stig $d$. Sýnið að til sé hlutmengi hnúta $U$ þannig að fyrir sérhvern hnút $v$ uppfylli nágrannamengið $N(v)$ skilyrðinu $1 \leq |N(v) \cap U| \leq 50\log(d)$.

- (3, IMO 1970) Í plani eru 100 punktar þar sem engir þrír þeirra liggja á sömu línunni. Skoðum alla mögulega þríhyrninga með hornpunkta í þessu mengi. Sýnið að í mesta lagi 70% þessara þríhyrninga séu hvasshyrndir.

- (3*, Chinese Olympiad 1986) Lát $z_1, \ldots, z_n$ vera tvinntölur. Sýnið að til sé mengi $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ þannig að $\pi \left|\sum_{j \in S} z_j\right| \geq \sum_{j=1}^{n} |z_j|$.

- (3*, The Probabilistic Method) Lát $G$ vera net með alla $7^n$ vigra af lengd $n$ með hnit í $\mathbb{Z}_7$ sem hnútamengi. Leggjum legg milli tveggja hnúta ef hnútarnir eru ólíkir í nákvæmlega einu hniti. Lát $U \subseteq V$ vera mengi $7^{n-1}$ hnúta í $G$ og lát $W$ vera mengi allra hnúta í $G$ sem eru í meir en $(c+2)\sqrt{n}$ fjarlæð frá $U$ þar sem $c > 0$ er einhver fasti. Sýnið að $|W| \leq 7^n e^{-c^2/2}$.

- (3*, The Probabilistic Method) Fjölskylda hlutmengja $\mathcal{G}$ is called skerandi ef $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ fyrir öll $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Lát $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k$ verea $k$ skerandi fjölskyldur hlutmengja $\{1, 2, \dots, n\}$. Sýnið að $|\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i| \leq 2^n - 2^{n-k}$.

- (4, The Probablistic Method) Lát $X$ vera mengi einingavigra í $\mathbb{R}^n$ sem eru hornréttir á hvorn annan tveir og tveir. Gerum einnig ráð fyrir að ofanvarp sérhvers vigurs á fyrstu $k$ hnit sín hafi lengd að minnsta kosti $\epsilon$. Sýnið að $|X| \leq k/\epsilon^2$ og að þetta mat sé þröngt þegar $\epsilon^2 = k/2^r < 1$ fyrir einhverja heiltölu $r$.

- (4, Erdös) Sýnið að í mengi $S$ af $n$ ólíkum jákvæðum heiltölum má alltaf finna hlutmengi $T$ með meir en $n/3$ stök þannig að $a + b \neq c$ fyrir öll $a, b, c \in T$ ($a, b, c$ þurfa ekki að vera ólík).

- (4, Benny Sudakov) Lát $G$ vera einfalt net á $n$ hnútum og með $m$ leggi. Lát $k$ vera jákvæða heiltölu. Sannið: a) Lita má $G$ á að minnsta kosti $k^n(1 - m/k)$ vegu með $k$ litum. b) Lita má $G$ á í mesta lagi $k^n(k-1)/m$ vegu með $k$ litum. c) Þrengið matið í (b) í $k^n(k-1)/(k+m-1)$.

- (4, Sperner) Lát $\mathcal{A}$ vera fjölskyldu hlutmengja $\{1, 2, \dots, n\}$ þannig að ekki séu til ólík $A, B \in \mathcal{A}$ þannig að $A \subseteq B$. Sýnið að $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

- (4, Benny Sudakov) Lát $S_1, \dots, S_k$ vera hlutmengi $\{1, 2, \dots, n\}$. Sýnið að ef $k < 1.99n/\log_2(n)$ séu til ólík hlutmengi $X, Y$ í $\{1, 2, \dots, n\}$ þannig að $|X \cap S_i| = |Y \cap S_i|$ fyrir öll $i$.

- (4, Benny Sudakov) Segjum að tveir vigrar séu $\epsilon$-næstum hornréttir ef innfeldi þeirra hefur algildi í mesta lagi $\epsilon$. Sýnið að: a) Fyrir öll $0 < \epsilon < 1$ er til $\epsilon$-næstum hornrétt mengi í $\mathbb{R}^n$ af stærð að minnsta kosti $\lfloor \exp\left(n\epsilon^2/4\right) \rfloor$. b) Fyrir öll $0 < \epsilon < 1$ er til $\epsilon$-næstum hornrétt mengi í $\mathbb{R}^n$ af stærð að minnsta kosti $\exp\left(n\epsilon^2/2\right)/4$. c) Til er $2\sqrt{\log(n)/n}$-næstum hornrétt mengi í $\mathbb{R}^n$ af stærð að minnsta kosti $n^2/4$.

- (4, Benny Sudakov) Gefin er $n \times n$ grind af reitum þar sem hver reitur er annað hvort hvítur eða svartur. Svissa má lit allra reita í einum dálki eða í einni röð. Sýnið að til sé upphafsástand lita þannig að ekki sé hægt að lita meir en hlutfallið $1/2 + \sqrt{\ln(2)/n}$ þeirra svarta.

- (4, Ravi Boppana) Lát $p_n(k)$ vera fjölda umraðana á menginu $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$) me nákvæmlega $k$ fastapunkta. Ákvarðið $\sum_{k=0}^{n} k^2 p_n(k)$.

- (4, IMO 1998) Í keppni eru $a$ keppendur og $b$ dómarar þar sem $b \geq 3$ er oddatala. Hver dómari gefur hverjum keppanda annað hvort staðið eða fallið sem einkunn. Gerum ráð fyrir að $k$ sé tala þannig að fyrir sérhverja tvo dómar séu einkunnir þeirra eins fyrir í mesta lagi $k$ keppendur. Sýnið að $k/a \geq (b-1)/(2b)$.

- (4, IMO 1989) Lát $n$ og $k$ vera jákvæðar heiltölur og lát $S$ vera mengi $n$ punkta í planinu þannig að engir þrír þeirra liggji á sömu línu. Gerum einnig ráð fyrir að sérhver punktir $P \in S$ hafi að minnsta kosti $k$ punkta í $S$ sem eru jafn langt frá $P$. Sýnið að $k \leq 1/2 + \sqrt{2n}$.

- (4*, The Probablistic Method) Lát $G$ vera net með litatölu 1000 og $U$ vera slembið hlutmengi hnútamengis $G$ (öll hlutmengi jafn líkleg). Lát $H$ vera hlutnetið sem $U$ spannar í $G$. Sannið að það séu minni en 1% líkur á að litatala $H$ sé $\leq 400$.
- (4*, MOP Test 2008) Gerum ráð fyrir að $a, b, c$ séu jákvæðar rauntölur þannig að fyrir allar heiltölur $n$ gildi $\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor$. Sannið að að minnsta kosti ein talnanna $a, b, c$ sé heiltala.
- (5, The Probablistic Method) Við segjum að keppnisnet sé $k$-yfirgnæft ef fyrir sérhvert hlutmengi $k$ hnúta sé til einhver hnútur sem sigrar þá alla. Lát $f(k)$ vera stærð minnsta $k$-yfirgnæfða keppnisnetsins. Sannið að $f(k) \geq Ck2^k$ fyrir einhvern fasta $C$.
- (5, The Probabilistic Method) Lát $X$ vera mengi $m$ ólíkra leifaflokka í $\mathbb{Z}_p$ fyrir einhverja frumtölu $p$. Bil af lengd $l$ í $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ er mengi á forminu $\{i, i+1, \ldots, i+l-1\}$ fyrir eitthvað $i$ og þar sem við mátum öll gildi við $p$. Sýnið að ef $m \geq 4k^2$ er til heiltala $a$ þannig að mengið $aX$ skeri sérhvert bil af lengd að minnsta kosti $p/k$ í $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.
- (5*, The Probablistic Method) Sýnið að til er endanleg tala $n_0$ þannig að sérhvert stefnt net á $n > n_0$ hnútum þar sem allir hnútar hafa útstig að minnsta kosti $\log_2(n) - \log_2(\log_2(n))/10$ innihaldi stefnda rás af sléttri lengd.
- (5*, The Probabilistic Method) Lát $G$ vera net á $n \geq 10$ hnútum og gerum ráð fyrir að það að bæta einhverjum legg í $G$ sem var ekki þegar til staðar fjölgi fjölda 10-klíka í $G$. Sýnið að $G$ hafi að minnsta kosti $8n - 36$ leggi.

## Heimildir:


- *The Probablistic Method* eftir Alon og Spencer.
- Kennsluefni Benny Sudakovs í áfanganum hans við ETH Zürich.
- Dæmasafn Ravi Boppana.
  `https://artofproblemsolving.com/community/c6h23507p1943887`
- Kennsluefni Po-Shen Loh um líkindafræðilegu aðferðina.
  `https://www.math.cmu.edu/ ploh/olympiad.shtml`
- Efni Evan Chen um líkindi.
  `https://web.evanchen.cc/handouts/ProbabilisticMethod/ProbabilisticMethod.pdf`