Félag raungreinakennara
Íslenska stærðfræðafélagið

Laugardagur, 7. mars 2020
kl. 10:00–14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2019-2020
Úrslitakeppni: Lausnir

Dæmi 1

Blær þurfti þrjár tilraunir til að leysa jöfnuna 41 x2+bx+c=0. 44 Í fyrstu tilraun notaði Blær rangt gildi á b og fékk lausnarmengið 45 2,3. Í annarri tilraun notaði Blær rangt gildi á c og fékk lausnarmengið 2,5. Í þriðju tilraun leysti Blær jöfnuna rétt. Hvert er lausnarmengi jöfnunnar?

Lausn: Blær þáttar fyrst og fær $0 = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ með $b = -5$ rangt en $c = 6$ rétt. Næst þáttar Blær og fær $0 = (x-2)(x-5) = x^2 - 7x + 10$ með $b = -7$ rétt og $c = 10$ rangt. Að lokum þáttar Blær $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$ og rétt lausnamengi er því $\{1, 6\}$.

Dæmi 2

Finnið öll möguleg gildi jákvæðra heiltalna a og b þannig að $a^2 = b(b+7)$.

Lausn: $a^2 = b(b+7)$ þýðir að $b(b+7)$ er ferningstala. Tala p, sem gengur bæði upp í b og $b+7$, verður að ganga upp í 7 og þá kemur aðeins til greina $p = 1$ eða $p = 7$. Ef b er deilanleg með 7 er til heil tala k þannig að $b = 7k$ og $b + 7 = 7(k+1)$ og þá er $b(b+7) = 7k \cdot 7(k+1) = 49k(k+1)$ sem er ferningstala þegar $k(k+1)$ er ferningstala, en það gerist aldrei. Eftir stendur að b og $b+7$ verða að vera ósamþátta. Þá er $b(b+7)$ ferningstala þegar bæði b og $b+7$ eru ferningstölur. Því eru til heilar tölur x og y þannig að $b = x^2$ og $b + 7 = y^2$, en það gefur að $y^2 - x^2 = 7$ ellegar $(y-x)(y+x) = 7$. Á þessu er aðeins ein lausn, $(y-x) = 1$ og $(y+x) = 7$ sem þýðir $y = 4$ og $x = 3$. Nú fæst $b = 9$ og síðan $a = 12$, sem er eina lausnin í jákvæðum heiltölum á upphaflegu jöfnunni.

Önnur aðferð: Þar sem $b^2 < b(b+7) < (b+7)^2$ má ljóst vera að a verður að vera einhver talnanna $b+1, b+2, b+3, b+4, b+5$ eða $b+6$. Síðan má prófa hverjir þessara möguleika gefa heiltölulausn á $a^2 = b(b+7)$.

Dæmi 3

Ef n er jákvæð heiltala þá táknar $v(n)$ heiltöluna sem fæst með því að setja síðasta tölustaf tölunnar n fremst. Til dæmis er $v(731) = 173$. Hver er minnsta jákvæða heiltalan n, með síðasta tölustaf 6, sem er þannig að $v(n) = 4n$?

Lausn: Táknum töluna með k. Við vitum ekki hve marga tölustafi k hefur en táknum óþekktu tölustafina með x_i og ritum $k = x_n x_{n-1} \cdots x_3 x_2 x_1 6$. Gefið er að

$$6x_n x_{n-1} \cdots x_3 x_2 x_1 = 4 \cdot \left(x_n x_{n-1} \cdots x_3 x_2 x_1 6\right)$$

en margfeldið hægra megin jafnaðarmerkis endar á 4 og því er $x_1 = 4$. Þar sem $64 \neq 4 \cdot 46$ þá er fjöldi tölustafa í k meiri en tveir. Gefið er að

$$6x_n x_{n-1} \cdots x_3 x_2 4 = 4 \cdot \left(x_n x_{n-1} \cdots x_3 x_2 46\right)$$

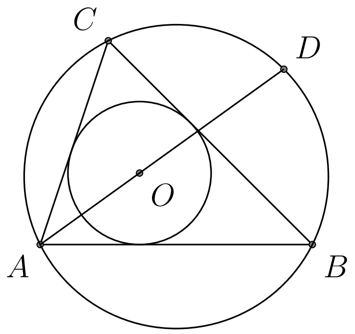
en margfeldið hægra megin jafnaðarmerkis endar á 84 og því er $x_2 = 8$. Þar sem $684 \neq 4 \cdot 846$.á er fjöldi tölustafa í k meiri en þrír.

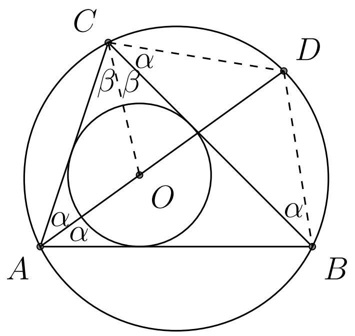
Á hiðstæðan hátt finnst að $x_3 = 3$, $x_4 = 5$ og $x_5 = 1$ og þá loks fæst að

$$615384 = 4 \cdot 153846$$

Dæmi 4

Þríhyrningur ABC er innritaður í hring. Hringur með miðju O er innritaður í þríhyrninginn ABC. Strikið AO er framlengt yfir í punkt D sem liggur á stærri hringnum. Sannið að $CD = OD = BD$.





Lausn: Athugum fyrst að þar sem strikið AD fer um miðju innritaða hringsins, þá helmingar það hornið $\angle CAB$, svo $\angle CAD = \alpha = \angle BAD$. Ferilhornin $\angle CAD$ og $\angle CBD$ spanna sama boga, svo $\angle CBD = \alpha = \angle CAD$. Eins fæst að $\angle DCB = \alpha = \angle DAB$. Þríhyrningurinn BCD er því jafnarma og $CD = BD$. Strikið CO helmingar hornið $\angle ACB$, svo $\angle ACO = \beta = \angle OCB$. Í þríhyrningi ACO er hornið $\angle AOC = 180° - (\alpha + \beta)$ og því er hornið $\angle COD = \alpha + \beta$. Þá er ljóst að CDO er jafnarma þríhyrningur og því er $CD = OD$

Dæmi 5

Í Undralandi eru 6 ernir, 17 snákar og 55 mýs. Örn getur etið snák eða mús en ekki annan örn; snákur getur etið mús en hvorki örn né annan snák; mús getur hvorki etið örn né snák og heldur ekki aðra mús. Í hvert skipti sem örn etur snák þá breytist hann í mús og þegar örn etur mús þá breytist hann í snák. Ef snákur étur mús þá breytist hann í örn. Að nokkrum tíma liðnum er sú staða komin upp að ekkert dýr getur etið annað dýr. Hver er mestur mögulegur fjöldi lifandi dýra í þeirri stöðu?

Lausn: Til að ekkert dýr geti étið annað dýr verður bara að vera eftir dýr af einni tegund. Tökum eftir því að óháð aðgerð verður fjöldi dýra af tegund sem var oddatala að fjölda sem er slétt tala og einnig verður fjöldi dýra af tegund sem var slétt tala að oddatölu. Einu dýrin sem getur orðið ein eftir eru ernir því fjöldi arna getur ekki verið núll á sama tíma og fjöldi snáka eða fjöldi músa er núll. Einnig er augljóst að fjöldi dýra á hverjum tímapunkti er bara háður því hversu oft hver aðgerð (eitthvert dýr étur annað dýr) hefur verið framkæmd en er óháð röð aðgerða. Að endingu verða eftir E ernir, engir snákar og engar mýs. Látum fjölda skipta sem örn étur snák vera X, fjölda skipta sem örn étur mús vera Y og fjölda skipta sem snákur étur mús vera Z þá fást jöfnur fyrir E erni, enga snáka og engar mýs:

$$\begin{aligned} E &= 6 - X - Y + Z \\ 0 &= 17 - X - Z + Y \\ 0 &= 55 - Y - Z + X \end{aligned}$$

Seinni tvær jöfnunar gefa saman að $X - Y = 19$ og $Z = 36$ og þá verður fyrsta jafnan að: $E = 6 - (Y + 19) - Y + 36 = 23 - 2Y$

sem er stærst þegar $Y = 0$ og þá er fjöldi lifandi dýra 23. Nú þarf bara að sjá hvort sá fjöldi geti komið upp.

Við byrjum með $(E, S, M) = (6, 17, 55)$ og látum fyrst snáka éta mýs 17 sinnum þá höfum við $(E, S, M) = (23, 0, 38)$. Næst éta ernir mýs 19 sinnum þá fæst $(E, S, M) = (4, 19, 19)$ og loks éta snákar mýs 19 sinnum þá fæst $(E, S, M) = (23, 0, 0)$ og við endum mestan mögulegan fjölda lifandi dýra þannig ekkert dýr getur étið annað dýr.

Dæmi 6

Finnið öll pör jákvæðra heiltalna (m, n) þannig að $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

Athugið: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$ og $0! = 1$.

Lausn: Jöfnuna $n! + 1 = (m! - 1)^2$ má umrita í $n! + 1 = (m!)^2 - 2m! + 1$ sem einnig má skrifa $n! = m!(m! - 2)$. Athugum að tilfellin $m = 1$ og $m = 2$ gefa ekki lausn. Fyrir $m \geq 3$ er ljóst að $m!(m! - 2) > m!$ svo $n > m$. Fyrir $m \geq 3$ er einnig ljóst að talan $m! - 2$ er ekki deilanleg með 3, svo þátturinn 3 kemur ekki oftar fyrir í $m!(m! - 2)$ heldur en í $m!$ og því getur n ekki verið $m + 3$ eða stærra. Möguleikarnir eru $n = m + 1$ og $n = m + 2$.

Ef $n = m + 1$ fæst $(m + 1)! = m!(m! - 2)$ svo $m + 1 = m! - 2$ og þá $m + 3 = m!$. Við vitum þegar að $m < 3$ gefur enga lausn, en hér er $m = 3$ lausn sem svarar til $n = 4$. Ef $m \geq 4$ verður $m!$ stærra en $m + 3$ eins og sjá má af eftirfarandi: $m! > (m - 1)m = m^2 - m = m^2 - 2m - 3 + (m + 3) = (m - 3)(m + 1) + (m + 3) > (m + 3)$.

Ef $n = m + 2$ þá fæst $(m + 2)! = m!(m! - 2)$ svo $(m + 1)(m + 2) = m! - 2$ og þá $m^2 + 3m + 4 = m!$. Prófun leiðir strax í ljós að $m = 3$ og $m = 4$ gefa ekki lausn. Fyrir $m \geq 5$ verður $m!$ stærra en $m^2 + 3m + 4$ enda er þá $m! > m(m - 1)(m - 2) \geq 5(m - 1)(m - 2)$.

Ójafnan $5(m - 1)(m - 2) > m^2 + 3m + 4$ jafngildir $5m^2 - 15m + 10 > m^2 + 3m + 4$ svo að $4m^2 - 18m + 6 > 0$ og þá $4m^2 - 20m + 2m + 6 > 0$ sem gefur $4m(m - 5) + 2m + 6 > 0$, sem er klárlega rétt fyrst $m \geq 5$. Eina lausnin er því $(m, n) = (3, 4)$.

Eða:

Ef $n = m + 1$ og $m \geq 3$ þá er $m! \geq m(m - 1) \geq 2m \geq m + 3$. Jafnaðarmekið gildir þá og því aðeins að $m = 3$ og þá er fæst lausnin $(m, n) = (3, 4)$.

Ef $n = m+2$ og $m \geq 5$ þá er $m! > m(m-1)(m-2) \geq 3m(m-1) = m(m-1)+2m(m-1) \geq m(m - 1) + 8m = m(m - 1) + 4m + 4m \geq m(m - 1) + 4m + 20 > m(m - 1) + 4m + 4 = m^2 + 3m + 4$ svo engin lausn er til fyrir $n \geq 5$.