Félag raungreinakennara
Íslenska stærðfræðafélagið

Laugardagur 7. mars 2015
kl. 10:00–14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2014–2015
Lausnir á dæmum í úrslitakeppni

Dæmi 1
Finnið öll pör jákvæðra heiltalna (a, b) með $a \leq b$ þannig að

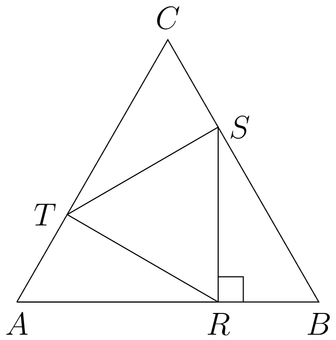
$$\left(a + \frac{6}{b}\right)\left(b + \frac{6}{a}\right) = 25$$

Lausn: Margföldum beggja vegna jafnaðarmerkis með ab. Umrituð jafna verður þá 2. stigs jafna í stærðinni ab:

$$\begin{aligned} ab\left(a + \frac{6}{b}\right)\left(b + \frac{6}{a}\right) &= 25ab \\ (ab+6)(ab+6) &= 25ab \\ \text{svo} \quad (ab)^2 - 13(ab) + 26 &= 0 \\ \text{og því} \quad (ab-4)(ab-9) &= 0 \end{aligned}$$

Svo $ab = 4$ eða $ab = 9$. Ef $ab = 4$ þá verður parið $(a, b) = (1, 4)$ eða $(a, b) = (2, 2)$. Ef $ab = 9$ þá verður parið $(a, b) = (1, 9)$ eða $(a, b) = (3, 3)$. Aðrir eru möguleikarnir ekki.

Dæmi 2
Jafnhliða þríhyrningur RST er innritaður í jafnhliða þríhyrning ABC þannig að RS er hornrétt á AB. Finnið flatarmál RST með tilliti til flatarmáls ABC.



Lausn: Þar sem þríhyrningur ABC er jafnhliða þá eru öll horn hans $60°$ og þar sem RS er hornrétt á AB þá er þríhyrningurinn SBR $30° - 60° - 90°$ þríhyrningur og því er $SB = 2RB$. Nú er þríhyrningur RST jafnhliða, svo öll horn hans eru $60°$ og því eru þríhyrningar TCS og RAT einnig $30° - 60° - 90°$ og þar sem $RS = ST = TR$ eru þeir einnig jafn stórir SBR. Punktarnir R, S og T skipta því hliðum þríhyrningsins ABC í hlutföllum $1 : 2$. Ef $AB = 3x$ þá er $SB = 2x$, $RB = x$ og því $SR = \sqrt{3}x$. Hliðarlengdir þríhyrninganna ABC og RST eru því í hlutföllum $1 : \sqrt{3}$ og flatarmál þríhyrninganna því í hlutföllum $1 : 3$. Svo flatarmál RST er $1/3$ flatarmáls ABC.

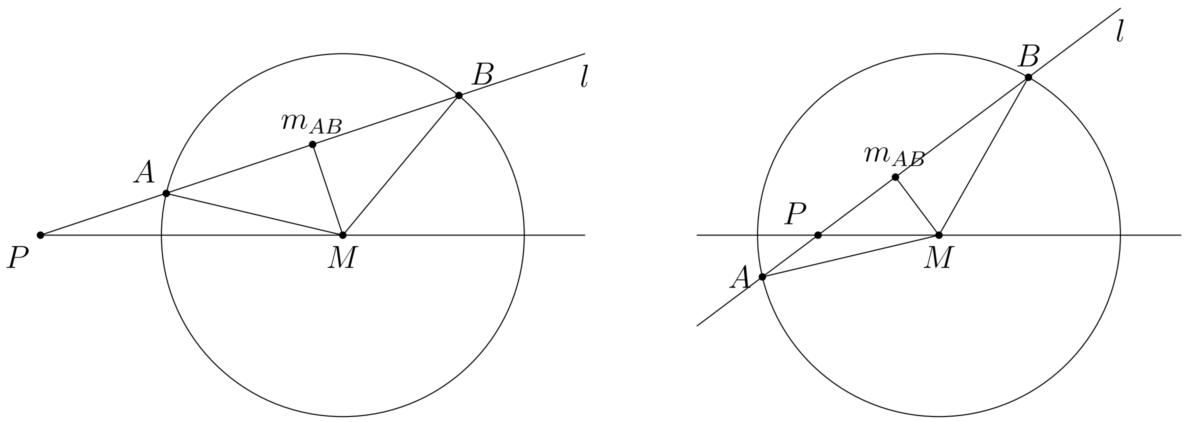
Dæmi 3
Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að

$$n = d_2^2 + d_3^3$$

þar sem $1 = d_1 < d_2 < d_3$ eru minnstu deilar n.

Lausn: Jákvætt heiltöluveldi oddatölu er oddatala og jákvætt heiltöluveldi sléttrar tölu er slétt tala. Þá er ljóst að n getur ekki verið oddatala, því þá yrði önnur talnanna d_2^2 eða d_3^3 að vera slétt tala; deilanleg með 2 og þar með væri n deilanleg með 2. Svo að n er slétt tala og $d_2 = 2$. Þá verður d_3^3 einnig að vera slétt tala, svo d_3 er því slétt tala. Þar sem $d_3 > d_2$ þá verður $d_3 = 4$. (Ef d_3 væri stærri slétt tala, $d_3 = 2k$, þá væri k deilir stærri en 2 og minni en d_3.) Þá er sýnt að $n = 2^2 + 4^3 = 68$.

Dæmi 4
Látum C vera hring með miðju M og $P \neq M$ vera punkt í sléttunni (í sama tvívíða fleti). Sérhver lína sem liggur í gegnum P og sker hringinn C, ákvarðar streng í hringnum. Sýnið að miðpunktar allra þessara strengja liggi á einum og sama hringnum.



Lausn: Lína gegnum P og M ákvarðar miðstreng í hringnum C svo miðja gefna hringsins C er einn þessara miðpunkta. Ef nú l er einhver lína gegnum P sem sker C í tveimur punktum A og B og m_{AB} er miðpunktur tilsvarandi strengs AB þá er Mm_{AB} hornrétt á l. Þetta sést á því að þríhyrningurinn MAB er jafnarma og þar sem m_{AB} er miðpunktur AB þá eru þríhyrningarnir MAm_{AB} og MBm_{AB} nákvæmlega jafnir svo hornin $\angle Mm_{AB}A$ og $\angle Mm_{AB}B$ eru jafn stór. Til samans eru hornin $180°$ og hvort um sig því $90°$.

Þríhyrningurinn $Mm_{AB}P$ er því alltaf rétthyrndur þríhyrningur sama hvar línan l sker C í A og B. Punktarnir m_{AB} liggja því á hring með miðstreng MP.

Athugið að ekki skiptir máli hvort P liggur utan við hringinn C eða innan í honum, þessi lausn gildir óháð legu P, eins og myndirnar sýna.

Dæmi 5
Finnið allar runur jákvæðra heiltalna $a_1, a_2, a_3, \ldots$ þannig að eftirfarandi gildir:

1) $a_{m+n} - 1$ gengur upp í $a_m + a_n$ fyrir öll m og n.

2) $n^2 - a_n$ er 2. veldi heillar tölu fyrir öll n.

Lausn: Tökum eftir að samkvæmt skilyrði 2) er $1^2 - a_1$ annað veldi heillar tölu og því ≥ 0. Þar sem a_1 er jákvæð heiltala þá verður $a_1 = 1$. Samkvæmt skilyrði 1) gengur $a_2 - 1$ upp í $a_1 + a_1 = 2$, svo $a_2 - 1$ er annað hvort 1 eða 2 og því er a_2 annað hvort 2 eða 3. En samkvæmt skilyrði 2) þá er $2^2 - a_2 = 4 - a_2$ annað veldi heillar tölu, svo $a_2 \neq 2$. Því er $a_2 = 3$.

Á svipaðan hátt má sýna að $a_3 = 5$. Svo lítur út sem runan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sé runa oddatalna.

$$P(n): \quad a_n = 2n - 1$$

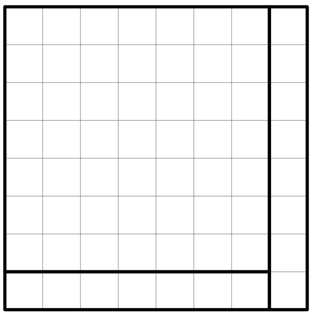
Við höfum þegar sýnt að $P(1)$ er sönn fullyrðing, $a_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$.

Gerum nú ráð fyrir að $P(n)$ sé sönn fullyrðing; $a_n = 2n-1$. Við viljum sýna að þá sé $P(n+1)$ einnig sönn fullyrðing, að $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$. Skv. skilyrði 1) þá gengur $a_{n+1} - 1$ upp í $a_n + a_1 = (2n-1) + 1 = 2n$ svo $a_{n+1} - 1 \leq 2n$ og því er $a_{n+1} \leq 2n + 1$. Skv. skilyrði 2) þá er $(n+1)^2 - a_{n+1}$ annað veldi heillar tölu og því er $(n+1)^2 - a_{n+1} \leq n^2$, næsta annað veldi heillar tölu fyrir neðan $(n+1)^2$. Það er að segja $n^2 + 2n + 1 - a_{n+1} \leq n^2$ og því er $2n + 1 \leq a_{n+1}$. Þá er sýnt að $2n + 1 \leq a_{n+1} \leq 2n + 1$ svo $a_{n+1} = 2n + 1$.

Við höfum þá sýnt að fullyrðing $P(n)$ er sönn fyrir $n = 1$ og að $P(n+1)$ er sönn hvenær sem $P(n)$ er sönn. Samkvæmt reglu um þrepasönnun þá er fullrðing $P(n)$ sönn fyrir allar jákvæðar heiltölur.

Dæmi 6 Við höfum 8×8 reita skákborð og nóg af peðum. Á hve marga mismunandi vegu má velja reiti á borðinu og setja eitt peð á hvern valinn reit, þannig að fjöldi peða í sérhverri línu og sérhverjum dálki verði oddatala?

Lausn: Á þá 49 reiti sem samanstanda af fyrstu 7 röðum og fyrstu 7 dálkum skákborðsins má stilla peðunum upp á 2^{49} mismunandi vegu. Þetta sést af því að fyrir hvern reit eru möguleikarnir tveir; annaðhvort er peði stillt á reitinn eða ekki. Fyrir 49 slíka reiti er því heildarfjöldi möguleika 2^{49}. Notum nú fyrstu sjö reiti 8. raðar til að tryggja að fjölda peða í fyrstu 7 dálkum verði oddatala. Þetta er hægt að gera á **aðeins einn** veg. Notum svo 8. dálkinn til að tryggja að fjöldi peða í öllum röðum sé oddatala. Þetta er einnig hægt að gera á **aðeins einn** veg.



Nú er tryggt að fjöldi peða í öllum röðum er oddatala og fjöldi peða í fyrstu sjö dálkum er oddatala. Hvað með 8. dálk? Ef heildarfjöldi peða á borðinu er talin röð fyrir röð þá er fjöldin summa átta oddatalna og því slétt tala. Heildarfjöldi fyrstu sjö dálka er summa sjö oddatalna sem er oddatala svo til að heildarfjöldi peða á borðinu sé slétt tala þá verður fjöldi peða í 8. dálki að vera oddatala.

Fyrir hverja af þeim 2^{49} uppstillingum á 7×7 borð fyrstu sjö raða og dálka þá má, á aðeins einn veg, fylla borðið þannig að allar raðir og allir dálka hafi oddatölufjölda peða. Heildarfjöldi uppstillinga er því 2^{49}.