37. Norræna Stærðfræðikeppnin

Meintar lausnir

Fimmtudagurinn 30. mars 2023

Dæmi 1 Alísa og Bína hafa eitthundrað glerkúlur. Í upphafi leiks skipta þær þessum hundrað kúlum í tvær hrúgur. Þar á eftir hefst leikurinn. Leikmaður sem á leik velur aðra af hrúgunum og fjarlægir svo úr henni jákvæðan heiltölufjölda kúlna úr þeirri hrúgu, en þó ekki fleiri en helming kúlanna í þeirri hrúgu. Fyrsti leikmaðurinn sem ekki getur fjarlægt neinar kúlur tapar leiknum. Leikmennirnir skiptast á að leika og Alísa leikur fyrsta leikinn. Finnið allar upphafstærðir á hrúgunum þannig að Bína hafi örugga vinningsleið.

Lausn Við köllum stöðu í leiknum tvenndina (a, b) þar sem a og b er fjöldi kúla í hrúgunum við upphaf þeirrar umferðar þess sem á leik. Við segjum að staða sé vinningstaða ef sá sem á leik getur þvingað fram sigur en annars að staðan sé tapstaða. Staðan $(1, 1)$ er tapstaða því sá ekki er unnt að fjarlægja neina kúlu úr hvorugri hrúgunni. Staða er vinningstaða ef með leik má skilja eftir tapstöðu. Eins er staða tapstaða ef allir leifilegir leikir leiða til vinningsstöðu.

Fyrir sérhver $a, b \in \mathbb{N}$ þá látum við 2^m og 2^n vera hæstu veldi af 2 sem ganga upp í $a+1$ og $b+1$ í þessari röð. Þá eru $\frac{a+1}{2^m}$ og $\frac{b+1}{2^n}$ oddatölur svo $\frac{a+1}{2^m} = 2s+1$ og $\frac{b+1}{2^n} = 2t+1$ þar sem $s, t \in \mathbb{N}$. Við getum því ritað $a = (2s+1) \cdot 2^m - 1$ og $b = (2t+1) \cdot 2^n - 1$ á ótvíræðan hátt þar sem $m, n, s, t \in \mathbb{N}$. Sýnum nú að staða $(a, b) = ((2s+1) \cdot 2^m - 1, (2t+1) \cdot 2^n - 1)$ sé tapstaða ef og aðeins ef $s = t$. Við sönnum þetta með þrepun á $a + b$.

Setjum sem svo að þetta gildi fyrir allar stöður (a, b), $a + b \leq N$ þar sem $N \in \mathbb{N}$. Setjum sem svo að $a + b = N + 1$. Látum $a = (2s+1) \cdot 2^m - 1$ og $b = (2t+1) \cdot 2^n - 1$. Skiptum í tilvik:

1. Gerum ráð fyrir að $s \neq t$. Án skerðingar á víðgildi má gera ráð fyrir að $s < t$ því annars mætti víxla á hrúgunum. Þá er $(2s+1) \cdot 2^0 = (2s+1) < (2t+1) \leq (2t+1) \cdot 2^n$. Látum k vera stærstu heiltöluna þannig að $(2s+1) \cdot 2^k \leq (2t+1) \cdot 2^n$. Þá er $(2s+1) \cdot 2^{k+1} > (2t+1) \cdot 2^n$. Þar sem $s \neq t$ þá er $(2s+1) \cdot 2^k < (2t+1) \cdot 2^n$. Því er

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (((2t+1) \cdot 2^n - 1) - ((2s+1) \cdot 2^k - 1)) \\ = & ((2t+1) \cdot 2^n - 1) - (((2s+1) \cdot 2^k - 1) - ((2t+1) \cdot 2^n - 1) - 1) \\ < & ((2t+1) \cdot 2^n - 1) \end{aligned}$$

   Þetta sýnir að sá sem á leik kemst í stöðuna $(a, c) = ((2s+1) \cdot 2^m - 1, (2s+1) \cdot 2^k - 1)$ og þar sem $a + c < a + b$ þá er fæst af þrepunarforsendu að (a, c) sé tapstaða. Þetta sýnir að (a, b) sé vinningsstaða.

2. Gerum ráð fyrir að $s = t$. Setjum sem svo að við tökum x kúlur úr fyrri hrúgunni. Þá er $2x \leq a$. Þá endar hann með $c = a - x$ kúlur. Þá er $2c \geq a$. Ef (c, b) væri tapstaða þá fengist af þrepunarforsendu að $c = (2s+1) \cdot 2^k - 1$ fyrir $k \in \mathbb{N}$. Nú er $c < a$ svo $k \leq m - 1$. Því er

$2c = (2s+1)\cdot 2^{k+1} - 2 < (2s+1)\cdot 2^m - 1 = a$ en það er mótsögn. Þetta sýnir að (c, b) vinningsstaða. Með sama hætti fengist vinningstaða ef tekið er úr seinni hrúgunni. Við ályktum að (a, b) sé tapstaða.

Með þrepun á $a + b = N$ að (a, b) sé tapstaða ef og aðeins ef $(a, b) = ((2s+1)\cdot 2^m - 1, (2s+1)\cdot 2^n - 1)$.

Nú á Bína örugga vinningsleið ef og aðeins ef Alísa byrjar í tapstöðu. Þetta sýnir að Bína á örugga vinningsleið ef og aðeins ef stærðir hrúganna a, b fullnægja $(a, b) = ((2s+1)\cdot 2^m - 1, (2s+1)\cdot 2^n - 1)$ og $a + b = 100$. Við erum því að leita að $s, m, n \in \mathbb{N}$ þannig að $((2s+1)\cdot 2^m - 1) + ((2t+1)\cdot 2^n - 1) = 100$. Það er $(2s+1)(2^m + 2^n) = 102$. Nú er $2s + 1$ oddatala. Frumþáttun 102 er $2 \cdot 3 \cdot 17$ svooddadeilar 102 eru 1, 3, 17 og 51.

Við skiptum því í fjögur tilvik:

1. Gerum ráð fyrir að $(2s + 1) = 1$. Þá er $s = 0$ og $2^m + 2^n = 102 = 2^1 + 2^2 + 2^5 + 2^6$ sem er summa fleiri en tveggja velda af 2 svo þessi jafna hefur enga heiltölurlausn.

2. Gerum ráð fyrir að $(2s+1) = 3$. þá er $s = 1$ og $2^m + 2^n = 34 = 2^1 + 2^5$ svo $(m, n) = (1, 5)$ eða $(m, n) = (5, 1)$. Þá er $(a, b) = (3\cdot 2 - 1, 3\cdot 32 - 1) = (5, 95)$ eða $(a, b) = (3 \cdot 32 - 1, 3 \cdot 2 - 1) = (95, 5)$.

3. Gerum ráð fyrir að $(2s+1) = 17$. Þá er $s = 8$ og $2^m + 2^n = 6 = 2^1 + 2^2$ svo $(m, n) = (1, 2)$ eða $(m, n) = (2, 1)$. Þá er $(a, b) = (17 \cdot 2 - 1, 17 \cdot 4 - 1) = (33, 67)$ eða $(a, b) = (17 \cdot 4 - 1, 17 \cdot 2 - 1) = (67, 33)$.

4. Gerum ráð fyrir að $(2s + 1) = 51$. Þá er $s = 25$ og $2^m + 2^n = 2 = 2^0 + 2^0$ svo $(m, n) = (0, 0)$. Þá er $(a, b) = (51 \cdot 1 - 1, 51 \cdot 1 - 1) = (50, 50)$.

Þær hrúgskiptingar (a, b) þar sem Bína hefur vinningsleið eru því $(5, 95)$, $(33, 67)$, $(50, 50)$, $(67, 33)$, $(95, 5)$.

Dæmi 2 Látum $\mathbb{N}_+$ tákna mengi jákvæðra heiltalna. Finnið öll föll $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ þannig að

$$\gcd(f(x), y) f(xy) = f(x) f(y) \tag{1}$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{N}_+$. (Ef a og b eru heiltölur þá stendur $\gcd(a, b)$ fyrir stærsta samdeili þeirra).

Lausn Setjum $x \mapsto y$ og $y \mapsto x$ í jöfnu (1). Þá fæst

$$\gcd(x, f(y)) f(xy) = f(x) f(y).$$

Með því að bera saman við jöfnu (1) þá fæst

$$\gcd(f(x), y) = \gcd(x, f(y)) \tag{2}$$

Setjum $y \mapsto f(x)$ í jöfnu (2) og fáum

$$f(x) = \gcd(f(x), f(x)) = \gcd(x, f(f(x))) \tag{3}$$

Nú gengur $\gcd(x, f(f(x)))$ upp í x svo $f(x)$ gengur upp í x fyrir öll $x \in \mathbb{N}_+$. Af þessu sést strax að $f(1) = 1$.

Ef p er frumtala þá eru 1 og p einu tölurnar sem ganga upp í p svo $f(p) = p$ eða $f(p) = 1$. Gerum ráð fyrir að $m \in \mathbb{N}_+$ sé náttúrleg tala. Skoðum nú tilvik:

1. Gerum ráð fyrir að $f(p) = 1$. Þá er $\gcd(f(p), m) = \gcd(1, m) = 1$. Því fæst af jöfnu (1) að $f(pm) = f(p)f(m) = f(m)$.

2. Gerum ráð fyrir að $f(p) = 1$. Skiptum í tilvik eftir því hvort p gangi upp í m eða ekki.

   (a) Gerum ráð fyrir að p gangi ekki upp í m. Þá er $\gcd(f(p), m) = \gcd(p, m) = 1$. Því fæst af jöfnu (1) að $f(pm) = f(p)f(m) = pf(m)$.

   (b) Gerum ráð fyrir að p gangi upp í m. Þá er $\gcd(f(p), m) = \gcd(p, m) = p$. Því fæst af jöfnu (1) að $pf(pm) = pf(m)$ svo $f(pm) = f(m)$.

Með þrepun á $k \in \mathbb{N}$ fæst að ef $m = p^k \cdot n$ þar sem p er ekki þáttur í n þá er $f(m) = f(p)^{\min(k,1)} \cdot f(n)$. Við fáum því að ef m hefur frumþáttun $m = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, þar sem $p_1, p_2, \ldots, p_k$ eru ólíkar frumtölur og $e_1, e_2, \ldots, e_k \in \mathbb{N}_+$ þá er $f(m) = f(p_1)f(p_2) \cdots f(p_k)$. Fryrir hverja frumtölu p getum valið á milli þess að setja $f(p) = 1$ eða $f(p) = p$.

Athugum nú hvort fall f sem er skilgreint með þessum hættin fullnægi falljöfnunni (1). Gerum ráð fyrir að $x, y \in \mathbb{N}_+$ nægilegt er að ganga úr skugga um að veldisvísir hverrar furmtölu p sé sá sami hvoru megin jafnarðarmerkisins. Gerum ráð fyrir að p sé frumtala og látum $\nu_p(n)$ vera veldisvísis hæsta veldis af p sem gengur upp í p. Sýnum nú að $\nu_p(\gcd(f(x), y)) = \min(\nu_p(f(x)), \nu_p(f(y)))$ og $\nu_p(f(xy)) = \max(\nu_p(f(x), f(y)))$. Skiptum í tilvik:

1. Gerum ráð fyrir að $f(p) = 1$. Þá er $\nu_p(f(x)) = \nu_p(f(y)) = \nu_p(f(xy)) = 0$. Því er

$$\begin{aligned}\nu_p(\gcd(f(x), y)) &= \min(\nu_p(f(x)), \nu_p(y)) = \min(0, \nu_p(y))\\ &= 0 = \min(\nu_p(x), \nu_p(y))\end{aligned}$$

   og

$$\nu_p(f(xy)) = 0 = \max(\nu_p(f(x)), \nu_p(f(y))).$$

2. Gerum ráð fyrir að $f(p) = 1$. Skiptum í tilvik:

   (a) Gerum ráð fyrir að p gangi hvorki upp í x né y. Þá er

$$\nu_p(f(x)) = \nu_p(f(y)) = \nu_p(f(xy)) = 0.$$

   Því er

$$\begin{aligned}\nu_p(\gcd(f(x), y)) &= \min(\nu_p(f(x)), \nu_p(y)) = \min(0, \nu_p(y))\\ &= 0 = \min(\nu_p(x), \nu_p(y))\end{aligned}$$

   og

$$\nu_p(f(xy)) = 0 = \max(\nu_p(f(x)), \nu_p(f(y))).$$

   (b) Gerum ráð fyrir að p gangi upp í x en ekki upp í y. Þá er

$$\nu_p(f(x)) = \nu_p(f(xy)) = 1$$

   og

$$\nu_p(y) = 0.$$

Því er

$$\begin{aligned}\nu_p(\gcd(f(x),y)) &= \min(\nu_p(f(x)),\nu_p(y)) = \min(1,0)\\ &= \min(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y)))\end{aligned}$$

og
$$\nu_p(f(xy)) = 1 = \max(1,0) = \max(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y))).$$

(c) Gerum ráð fyrir að p gangi ekki upp í x en gangi upp í y. Þá er

$$\nu_p(f(x)) = 0$$

og
$$\nu_p(f(y)) = \nu_p(f(xy)) = 1.$$

Því er

$$\begin{aligned}\nu_p(\gcd(f(x),y)) &= \min(\nu_p(f(x)),\nu_p(y)) = \min(0,\nu_p(y)) = 0\\ &= \min(0,1) = \min(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y)))\end{aligned}$$

og
$$\nu_p(f(xy)) = 1 = \max(1,1) = \max(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y))).$$

(d) Gerum ráð fyrir að p gangi upp í x og y. Þá er

$$\nu_p(f(x)) = \nu_p(f(y)) = \nu_p(f(xy)) = 1$$

og
$$\nu_p(y) \geq 1.$$

Því er

$$\begin{aligned}\nu_p(\gcd(f(x),y)) &= \min(\nu_p(f(x)),\nu_p(y)) = \min(1,\nu_p(y)) = 1\\ &= \min(1,1) = \min(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y)))\end{aligned}$$

og
$$\nu_p(f(xy)) = 1 = \max(1,1) = \max(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y))).$$

Nú fæst

$$\begin{aligned}\nu_p(\gcd(f(x),y)f(xy)) &= \nu_p(\gcd(f(x),y)) + \nu_p(f(xy))\\ &= \min(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y))) + \max(\nu_p(f(x)),\nu_p(f(y)))\\ &= \nu_p(f(x)) + \nu_p(f(y)).\end{aligned}$$

Þetta sýnir að föllin sem við fundum fullnægja fallajöfnunni. Við höfum því leyst fallajöfnuna. $\square$

Dæmi 3 Finnið allar heiltölurunur $a_0, a_1, a_2, \ldots$ þannig að fyrir allar heiltölur $k, \ell \geq 0$ gildi
$$a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2,$$

það er að fyrir allar heiltölur $k, \ell \geq 0$, sé til heiltala z þannig að $(a_k - a_\ell)z = k^2 - \ell^2$.

Lausn Ef $b_n = a_n + c$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ þar sem $c \in \mathbb{Z}$ er fasti þá er $b_k - b_\ell = a_k - a_\ell$ fyrir öll $k, \ell \geq 0$ svo $a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2$ ef og aðeins ef $b_k - b_\ell | k^2 - \ell^2$. Við getum því án skerðingar á víðgildi gert ráð fyrir að $a_0 = 0$. Ef $b_n = -a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ þá er $b_k - b_\ell = -(b_\ell - b_k)$ svo $a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2$ ef og aðeins ef $b_k - b_\ell | k^2 - \ell^2$. Við getum því gert ráð fyrir að $a_1 \geq 0$. Nú fæst að

$$a_k = a_k - a_0 | k^2 - 0^2 = k^2$$

svo $a_k | k^2$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Nú $a_1 | 1$ og þar sem $a_1 \geq 0$ þá er $a_1 = 1$.

Gerum ráð fyrir að $k \neq \ell$ þá er $k^2 - \ell^2 \neq 0$ og þar sem $a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2$ þá er $a_k - a_\ell \neq 0$, það er $a_k \neq a_\ell$.

Gerum ráð fyrir að p sé frumtala. Nú fæst $a_p | p^2$ svo $a_p \in \{-p^2, -p, -1, 1, p, p^2\}$ og $a_p \neq a_1 = 1$. Eins fæst að $a_p - 1 = a_p - a_1 | p^2 - 1^2 = p^2 - 1$. Ef $a_p = -p^2$ þá fæst $-p^2 - 1 | p^2 - 1$ og því $p^2 + 1 | p^2 - 1$ en það stenst ekki þar sem $0 < p^2 - 1 < p^2 + 1$. Þetta sýnir að $a_p \neq -p^2$. Því fæst að $a_2 \in \{-2, -1, 2, 4\}$. Nú gildir að $a_2 - 1 = a_2 - a_1 | 2^2 - 1^2 = 3$ svo $a_2 - 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, það er $a_2 \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Því er $a_2 \in \{-2, 2, 4\}$. Skiptum í tilvik:

1. Gerum ráð fyrir að $|a_2| = 2$. Nú er til í mesta lagi ein frumtala p þannig að $a_p = -1$. Gerum ráð fyrir að a_p sé frumtala þannig að $a_p \neq -1$. Ef $a_p = p^2$ þá er $p \geq 3$ og $p - a_2 = a_p - a_2 | p^2 - 2^2 = p^2 - 4$. Þar sem $p^2 - a_2 = a_p - a_2 | a_p{}^2 - 4 = p^2 - 4$ þá fæst að $p^2 - a_2 | a_2 + 4$. Nú er $2 \leq a_2 + 4 \leq 6$ en $7 \leq p^2 - a_2$ svo það stenst ekki að $a_p = p^2$. Við ályktum að $|a_p| = p$ fyrir allar nema hugsanlega eina frumtölu p.

   Setjum sem svo að $n \in \mathbb{N}$ og p sé frumtala þannig að $|a_p| = p$. Þá fæst að $a_n - a_p | (a_n - p)(a_n + p) = a_n{}^2 - p^2$. Nú gildir að $a_n - a_p | n^2 - p^2$ svo $a_n - a_p | n^2 - a_n{}^2$. Finnum frumtölu p þannig að $p > |n^2 - a_n{}^2| + |a_n|$ Þá er $|a_n - a_p| \geq ||a_p| - |a_n|| = |p - |a_n|| = p - |a_n| \geq |n^2 - a_n{}^2|$. Þar sem $a_n - a_p | n^2 - a_n{}^2$ þá er $n^2 - a_n{}^2 = 0$. Því er $|a_n| = n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

   Ef $|a_n| = n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ þá gildir að $a_k - a_\ell | (k - \ell)(k + \ell) = k^2 - \ell^2$ fyrir öll $k, \ell \in \mathbb{N}$.

2. Gerum ráð fyrir að $a_2 = 4$. Gerum ráð fyrir að p sé frumtala. Það er í mesta lagi ein slík þannig að $a_p = -1$. Setjum sem svo að $|a_p| = p$. Þá gildir að $a_p - 4 | (p-4)(p+4) = p^2 - 16$. Nú fæst að $a_p - 4 = a_p - a_2 | p^2 - 2^2 = p^2 - 4$ svo $a_p - 4 | 12$. Það eru því aðeins endanlega margar frumtölur þannig að $|a_p| = p$. Því er $a_p = p^2$ fyrir óendanlega margar frumtölur.

   Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{N}$. Gerum ráð fyrir að p sé frumtala þannig að $a_p = p^2$. Nú gildir að $a_n - p^2 = a_n - a_p | n^2 - p^2$. Því fæst að $p^2 - a_n | n^2 - a_n$. Við fundir frumtölu p þannig það stóra að $a_p = p^2$ og $p^2 - a_n > |n^2 - a_n|$. Þar sem $p^2 - a_n | n^2 - a_n$ þá er $n^2 - a_n = 0$, það er $a_n = n^2$. Þetta sýnir að $a_n = n^2$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

   Ef $a_n = n^2$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ þá fæst að $a_k - a_\ell = k^2 - \ell^2 | k^2 - \ell^2$.

Við höfum því sýnt að runan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ fullnægir deilanleikaskilyrðinu ef og aðeins ef $a_n = c + b_n$ þar sem $c \in \mathbb{Z}$ er fasti $|b_n| = n$ eða ef $a_n = c + sn^2$ þar sem $c \in \mathbb{Z}$ er fasti og $s = \pm 1$. $\square$

Dæmi 4 Látum ABC vera þríhyrning og M vera miðpunkt hliðarinnar BC. Látum E og F vera punktana á hliðunum AC og AB, í þessari röð, þannig að $ME = MF$. Látum D vera hinn skurðpunkt umhrings þríhyrningsins MEF við hliðina BC. Látum ℓ_D, ℓ_E og ℓ_F vera línurnar um D, E og F, í þessari röð, þannig að $\ell_D \perp BC$, $\ell_E \perp CA$ og $\ell_F \perp AB$. Sýnið að ℓ_D, ℓ_E og ℓ_F liggi allar um sama punkt.

Lausn Látum ω vera umhring MEF og O vera miðju hans. Látum N vera speglun M um O. Þar sem strengirnir ME og MF í ω eru jafnlangir þá er hálflínan MN helmingalína hornsins $\angle EMF$. Því er áttaða hornið um N frá línunni MN að línunni ME jafnstórt en í öfuga stefnu við áttaða hornið um N frá línunni MN að línunni MF.

Látum X og Y vera hina skurðpunkta (sömu ef snertlar) hrinsins ω við línurnar AC og AB, í þessari röð. Látum γ_1 og γ_2 vera umhringi þríhyrninganna MCX og MBY, í þessari röð. Látum Q vera hinn skurðpunkt γ_1 og γ_2. Af ferilhornssetninni í ω leiðir að áttaða hornið um X frá línuna XM að línunni $XE = XC$ er jafstórt og í sömu átt og áttaða hornið um N frá línunni NM að línunni ME. Eins fæst að áttaða hornið um Y frá línunni YM að línunni $YF = YB$ er jafnstórt og í sömu átt og áttaða hornið um N frá línunni NM að línunni NF. Því er áttaða hornið um X frá línunni XM að línunni XC jafnstór en í öfuga stefnu við áttaða hornið um Y frá línunni YM að línunni YB.

Nú eru áttuðu strikin BM og CM jafnlöng en í gangstæða stefnu svo af ferilhornasetningunni leiðir að hringirnir γ_1 og γ_2 eru jafnstórir og miðjur þeirra liggja sömu megin við línuna BC. Því fæst að Q liggur á þverli línunnar BC um M. Því eru strikn BQ og CQ miðstengir í γ_2 og γ_1, í þessari röð. Af setningu Þales leiðir að M, X og Y eru fótpunktar Q á línurnar BC, AC og AB, í þessari röð.

Látum P vera speglun Q um miðju ω, punktinn O. Hinir skurðpunktar ω við línurnar BC, AC og AB eru því fótpunktar P á þær línur, í sömu röð. Sér í lagi sést að P liggur á öllum þverlunum ℓ_D, ℓ_E og ℓ_F um punktana D, E og F á línurnar BC, AC og AB í þessari röð. $\square$