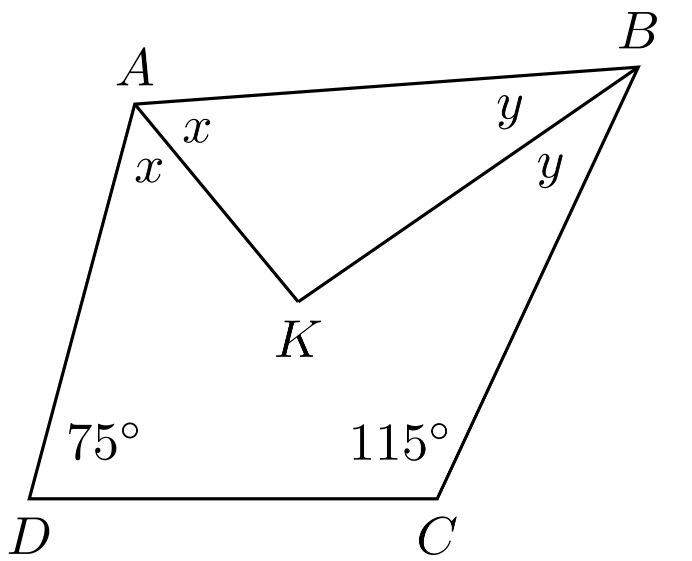
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2015–2016

Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

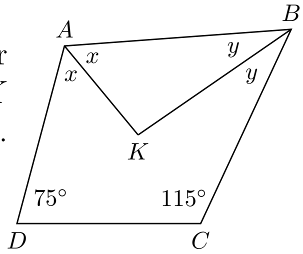
Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. $3+3$ er ekki jafnt og

☐ 6 ☒ 3^2-3+1 ☐ $\dfrac{3^3}{3}-3$ ☐ $3\cdot 2+\dfrac{0}{3}$

Skýring: $3^2-3+1=9-3+1=7\neq 6=3+3$.

2. Í ferhyrningi $ABCD$ er $\angle D=75^\circ$ og $\angle C=115^\circ$. Punktur K er staðsettur innan ferhyrningsins þannig að strikið AK helmingar hornið $\angle A$ og strikið BK helmingar hornið $\angle B$. Hversu stórt er hornið $\angle AKB$?



☐ 75° ☐ 85° ☒ 95° ☐ 105°

Skýring: Annars vegar er hornasumma ferhyrnings $2x+2y+75^\circ+115^\circ=360^\circ$. Hins vegar er tvöföld hornasumma þríhyrningsins ABK jöfn $2x+2y+2\angle AKB=360^\circ$. Því er $2\angle AKB=75^\circ+115^\circ=190^\circ$ svo $\angle AKB=95^\circ$.

3. Talan mitt á milli $\dfrac{1}{6}$ og $\dfrac{1}{4}$ er

☐ $\dfrac{1}{24}$ ☐ $\dfrac{1}{5}$ ☐ $\dfrac{2}{9}$ ☒ $\dfrac{5}{24}$

Skýring: Meðaltal talnanna: $\dfrac{1/6+1/4}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4+6}{24}=\dfrac{5}{24}$

4. Reiknivélin hans Gutta er biluð. Ef Gutti slær inn töluna x og smellir svo á $=$ þá breytist talan í

$|x|$ ef $x<-2$ -5 ef $-2\leq x\leq 3$ $\dfrac{1}{x}$ ef $x>3$.

Gutti slær inn töluna -3 og svo fjórum sinnum í röð á $=$. Hvaða tölu sýnir reiknivélin þá?

☐ -5 ☒ $\dfrac{1}{5}$ ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ 3

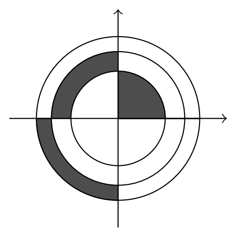
Skýring: $(-3)\longrightarrow|-3|=3\longrightarrow(-5)\longrightarrow|-5|=5\longrightarrow\dfrac{1}{5}$

5. Í jafnhliða þríhyrningi er fjöldi fermetra í flatarmáli þríhyrningsins jafn fjölda metra í ummáli hans. Hver er hliðarlengd þríhyrningsins í metrum?

☐ $\sqrt{3}$ ☐ $2\sqrt{3}$ ☒ $4\sqrt{3}$ ☐ $6\sqrt{3}$

Skýring: Ef hliðarlengd er l þá er ummálið $3l$. Hæð í jafnarma þríhyrningi skiptir hlið í tvo jafna helminga, svo samkvæmt reglu Pyþagórasar gildir að $(\frac{1}{2}l)^2 + h^2 = l^2$. Hæðin er því $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ og þar með er flatarmál þríhyrningsins $\frac{1}{2}hl = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$. Þar sem tölugildi ummáls er jafnt tölugildi flatarmál er $3l = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, svo $l = 4\sqrt{3}$.

6. Á myndinni eru þrír hringar með miðju í (0,0). Ef skyggðu svæðin hafa öll sama flatarmálið og geisli (radíus) innsta hringsins er 1, hvert er þá margfeldi geisla hringanna þriggja?



☒ $\sqrt{6}$ ☐ 3 ☐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ☐ 6

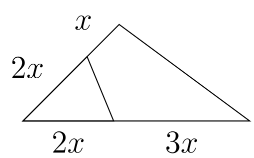
Skýring: Táknum geisla miðhringsins með r og geisla ysta hringsins með R. Þar sem skyggðu svæðin eru öll jafn að flatarmáli fæst að $\pi r^2/4 = 2 \cdot \pi/4$ svo $r = \sqrt{2}$. Eins er $\pi R^2/4 = 3 \cdot \pi/4$ svo $R = \sqrt{3}$. Margfeldi geislanna þriggja er þá $1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

7. Teningur er málaður rauður. Teningnum er skipt í 125 smærri jafnstóra teninga. Hversu margir smærri teninganna hafa aðeins eina málaða hlið?

☐ 9 ☐ 25 ☒ 54 ☐ 96

Skýring: Við skiptinguna verður hver hlið stóra teningsins að 25 hliðum smærri teninga. Af þessum 25 eru einungis þeir sem ekki eru á jaðrinum, $3 \times 3 = 9$ alls, sem eru rauðir á aðeins einni hlið. Þetta gildir um allar sex hliðar teningsins, svo heildarfjöldi smærri teninga með aðeins eina rauða hlið er $6 \cdot 9 = 54$.

8. Flatarmál minni þríhyrningsins er 12 m^2. Hversu margir fermetrar er stærri þríhyrningurinn?



☐ 30 ☐ 35 ☐ 40 ☒ 45

Skýring: Táknum lóðrétta hæð smærri þríhyrnings með h og lóðrétta hæð stærri þríhyrnings með H. Nú er $2x \cdot h = 24$ svo $xh = 12$. Hlutfall hæða þríhyrninganna uppfyllir jöfnuna $\dfrac{H}{h} = \dfrac{2x + x}{2x} = \dfrac{3}{2}$, svo $H = \dfrac{3}{2}h$. Þá má reikna flatarmál stærri þríhyrnings: $\dfrac{1}{2} \cdot 5x \cdot H = \dfrac{1}{2} \cdot 5x \cdot \dfrac{3}{2}h = \dfrac{15}{4} \cdot xh = \dfrac{15}{4} \cdot 12 = 45$

9. Á lítilli eyju eru 99% eyjarskeggja frumbyggjar. Hluti frumbyggja flyst í burtu og þá eru frumbyggjar 98% eyjarskeggja. Ef eyjarskeggjar voru alls 1000, hversu margir frumbyggjar fluttu burt?

☐ 10 ☐ 100 ☐ 350 ☒ 500

Skýring: Táknum heildarfjölda eyjarskeggja eftir brottflutning frumbyggja með x. Fjöldi eyjarskeggja sem ekki flyst burt helst óbreyttur: 1% af 1000 er því jafnt 2% af x: $1000 \cdot 0{,}01 = x \cdot 0{,}02$ svo $x = 500$. Það hafa því 500 frumbyggjar sem fluttu í burtu.

10. Ef $x - y = 2$ og $x^2 - y^2 = 8$ þá er $2x - 6y$ jafnt

☐ -14 ☒ 0 ☐ 8 ☐ 14

Skýring: Þar sem $8 = (x-y)(x+y) = 2(x+y)$ þá er $x + y = 4$. Þá fæst að $2x = 6$ og því er $x = 3$ og þar með $y = 1$. Þá má reikna: $2x - 6y = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$.

Annar hluti

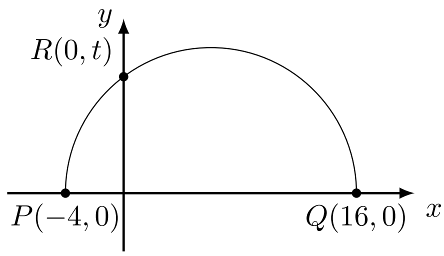
Í þessum hluta eru fimm spurningar. Hver spurning er fjögurra stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

11. Leggjum saman 31 heiltölu frá 2001 til 2031 og deilum með 31 í útkomuna. Hvað fæst þá út?

☐ 2012 ☐ 2013 ☐ 2015 ☒ 2016 ☐ 2496

Skýring: Fyrir oddatölufjölda talna með jöfnu millibili er meðaltalið jafnt miðgildinu. Einnig má reikna $2 \cdot (2001 + \cdots + 2031) = (2001 + 2031) + \cdots + (2031 + 2001) = 31 \cdot 4032$ svo $(2001 + \cdots + 2031)/31 = 4032/2 = 2016$.

12. Á myndinni er strikið með endapunkta $P(-4, 0)$ og $Q(16, 0)$ miðstrengur hálfhrings. Ef punkturinn $R(0, t)$ er á hálfhringnum þá er gildið á t jafnt



☐ 6 ☐ 7 ☒ 8 ☐ 9

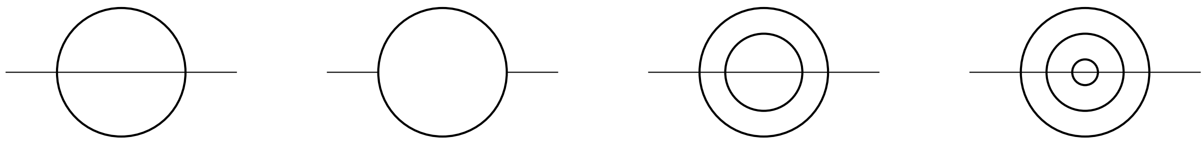
Skýring: Látum O tákna miðju hnitakerfisins, $O = (0, 0)$. Miðja hrings sem fellur í hálfhringinn er í miðpunkti striksins PQ og hefur því hnitin $M = (6, 0)$. Geisli hringsins er hálf lengd striksins PQ og er því 10. Þríhyrningurinn ORM er rétthyrndur með skammhliðar 6 og t og langhlið 10. Samkvæmt reglu Pýþagórasar er $t = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

13. Ef a og b eru tvær ólíkar tölur þar sem $\dfrac{a+b}{a-b} = 3$, þá er $\dfrac{a}{b}$ jafnt og

☐ -1 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 5

Skýring: Ef $\dfrac{a+b}{a-b} = 3$ þá er $a+b = 3a-3b$, svo $\dfrac{a}{b}+1 = 3\dfrac{a}{b}-3$. Þá er $4 = 2\dfrac{a}{b}$ og því $\dfrac{a}{b} = 2$.

14. Hversu margar eftirfarandi mynda er mögulegt að teikna án þess að lyfta penna af blaði og án þess að teikna ofan í neina línu sem komin er?



☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4

Skýring: Allar nema mynd 2 frá vinstri.

15. Siggi á þrjá hunda; Glúm, Plútó og Láka. Plútó étur ef Glúmur er úti. Plútó étur ekki ef Láki er ekki úti. Glúmur og Láki eru aldrei samtímis úti. Aron ályktar að Glúmur sé aldrei úti. Sigfús ályktar að Láki sé aldrei úti og Páll ályktar að Plútó sé alltaf étandi. Hver félaganna þriggja ályktar rétt?

☒ Aðeins Aron
☐ Aðeins Páll og Sigfús
☐ Aðeins Páll
☐ Aðeins Aron og Sigfús
☐ Aron, Sigfús og Páll

Skýring: Þrjár fullyrðingar eru settar fram um hundana þrjá: 1) Ef Glúmur er úti þá étur Plúto. 2) Ef Láki er ekki úti þá étur Plúto ekki. Þessa fullyrðingu má setja fram á eftirfarandi jafngildan hátt: 2a) Ef Plúto étur þá er Láki úti. 3) Glúmur og Láki eru aldrei samtímis úti.
Ef Glúmur er úti þá étur Plútó (skv.1) og þá er Láki úti (skv. 2a) og þá er Glúmur ekki úti (skv. 3). Því má álykta að Glúmur sé aldrei úti og Aron ályktar rétt. Ef Páll ályktar rétt þá er Láki alltaf úti svo Sigfús ályktar þá rangt. Sigfús getur aðeins ályktað að Láki sé aldrei útfrá þeirri forsendu að Glúmur sé alltaf úti, en sú forsenda er röng. Sömuleiðis getur Páll aðeins ályktað að Plútó sé alltaf étandi útfrá þeirri forsendu að Glúmur sé alltaf úti.

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

16. a og b eru jákvæðar heilar tölur. Hvert er minnsta mögulega gildið á summunni $a+b$ ef

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-b}$$

Svar: 14

Skýring: Jöfnuna má umrita á formið

$$\frac{11}{6a}=\frac{1}{b(b-1)} \quad \text{svo} \quad 6a=11b(b-1) \quad \text{eða} \quad 2\cdot 3\cdot a=11\cdot b(b-1).$$

Þá verður a að vera margfeldi af 11, $a=k\cdot 11$ og því $2\cdot 3\cdot k=b(b-1)$. Lægstu mögulegu gildin á a og b sem uppfylla skilyrðin eru $a=11$ og $b=3$.

17. Krákustígur milli tveggja punkta $A(a_1,a_2)$ og $B(b_1,b_2)$ í hnitakerfinu er hver sú leið milli A og B sem samanstendur alfarið af láréttum og lóðréttum línustrikum. Hver er stysti krákustígurinn frá $(0,0)$ til $(5,7)$ og þaðan til $(10,0)$?

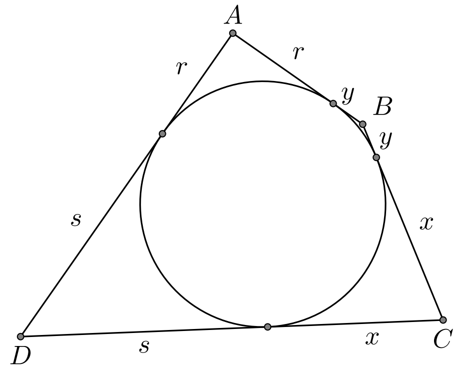
Svar: 24

Skýring: Frá $(0,0)$ til $(5,7)$ er lárétt tilfærsla 5 og lóðrétt tilfærsla 7. Frá $(5,7)$ til $(10,0)$ er lóðrétt tilfærsla 7 og lárétt tilfærsla 5. Samanlagt er heildartilfærslan því $5+7+7+5=24$.

18. Ferhyrningur $ABCD$ með innritaðan hring hefur hliðarlengdir $AB=3$, $CD=8$ og $AD=7$. Hver er lengd hliðar BC?

Svar: 4

Skýring: Táknum fjarlægðir milli hornpunkta ferhyrningsins og snertipunkta innritaðs hringsins með x, y, r og s eins og sýnt er á mynd. (Það er vel þekkt og auðsannað að þær fjarlægðir sem merktar eru eins séu jafnar.) Þá er $BC=x+y$. En $x+y+r+s=AB+CD=3+8=11$, svo $11=BC+r+s=BC+7$ og þá er $BC=4$.



19. Láki velur 150 tölur úr menginu $\{\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\}$ svo sérhver talnanna er því annaðhvort $\sqrt{2}-1$ eða $\sqrt{2}+1$. Láki útbýr summuna S þannig að

$$S=x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6+\ldots+x_{149}x_{150}$$

þar sem $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{149}, x_{150}$ tákna tölurnar 150 sem Láki velur. Láki gætir þess að velja tölurnar þannig að S sé heiltala. Hver er stærsta mögulega heiltalan sem Láki getur fengið fyrir S?

Svar: 223

Skýring: Summan samanstendur af 75 margfeldum, en hver tala x_i kemur fyrir í aðeins einu þeirra, svo hvert margfeldi $x_i x_{i+1}$ má velja óháð hinum, en það getur haft eitt af þremur gildum:

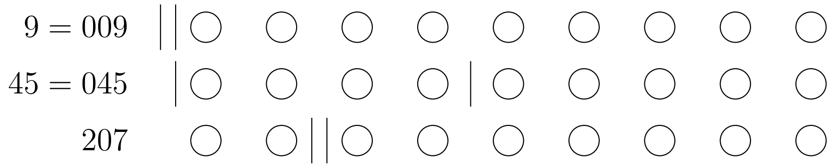
$$
\begin{aligned}
A &= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2} \\
B &= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2 - 1 = 1 \\
C &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1) = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Til að S verði heiltala þurfa ræturnar að styttast út, svo Láki þarf að velja A og C jafnoft. Nú er $A + C = 6$ stærra en $2B = 2$, svo það borgar sig fyrir Láka að velja A og C eins oft og hann getur. Því fæst hæsta heiltalan fyrir S með $37A + B + 37C = 37 \cdot 6 + 1 = 223$.

20. Hversu margar jákvæðar heiltölur minni en 1000 hafa þversummuna 9? (**Þversumma** tölu er summa tölustafa tölunnar; talan 234 hefur þversummu $2 + 3 + 4 = 9$.)

Svar: 55

Skýring: Sérhverja jákvæða heiltölu með þversummuna 9 má hugsa sér sem níu kúlna streng sem skipt hefur verið upp með tveimur þilum.



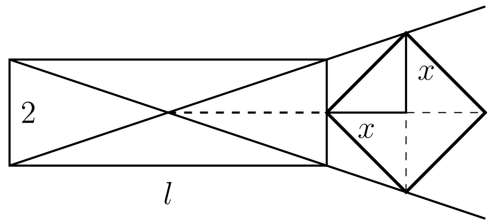
Á hve marga vegu má staðsetja þilin tvö eins og hér að ofan? Fyrsta þilið má staðsetja á 10 mismunandi vegu. Kúlurnar níu ásamt fyrsta þili gefa 11 möguleika á staðsetningu annars þils; alls $10 \cdot 11$ vegu. En þar sem það skiptir ekki máli í hvaða röð þilin tvö eru staðsett þá er heildarfjöldi ólíkra staðsetninga alls $10 \cdot 11/2 = 55$. Það eru því 55 jákvæðar heiltölur minni en 1000 með þversummuna 9.

Önnur leið til að sjá þetta er að hugsa tölurnar sem þriggja stafa strengi xyz þar sem x, y, z eru heiltölur á bilinu 0 til 9. Talan 9 samsvarar þá strengnum 009. Ef $x = 0$ eru 10 möguleikar: $009, 018, 027, \ldots, 081, 090$. Ef $x = 1$ eru 9 möguleikar: $108, 117, 126, \ldots, 180$. Getum haldið þannig áfram þar til á endanum fyrir $x = 9$ fæst bara ein tala: 900. Alls gerir þetta $10 + 9 + \cdots + 1 = 55$ tölur.

Fjórði hluti

Í þessum hluta er hvort dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

21. Myndin sýnir ferning þar sem eitt horn hans snertir rétthyrning af stærðinni $2 \times l$. Önnur tvö horn ferningsins snerta framlengdar hornalínur rétthyrningsins og fjórða horn ferningsins er á framlengdri línu sem liggur um miðju rétthyrningsins og andstætt horn ferningsins.



Finnið lengdina l þegar flatarmál rétthyrningsins og ferningsins eru jöfn.

Lausn: Táknum hálfa lengd hornalínu fernings með x. Þá er flatarmál fernings jafnt flatarmáli ferhyrnings þegar $2x^2 = 2l$; þegar $x = \sqrt{l}$. Með samanburði hliða i einslaga þríhyrningum fæst eftirfarandi:

$$\frac{\frac{1}{2}l}{1} = \frac{\frac{1}{2}l + x}{x} \quad \text{svo} \quad l = \frac{l + 2x}{x} \quad \text{eða} \quad l = \frac{l}{x} + 2 \quad \text{svo} \quad l = \sqrt{l} + 2$$

Jöfnuna $l = \sqrt{l} + 2$ má umrita á formið $(\sqrt{l} - 2)(\sqrt{l} + 1) = 0$. Þá er $\sqrt{l} = 2$ og því $l = 4$.

22. Sannið að ekki séu til neinar jákvæðar heilar tölur a og b sem eru þannig að $4a^2 + 4a = b^2 + b$.

Lausn: Væru slíkar heiltölur a og b til þá væri

$$4a^2 + 4a + 1 = b^2 + b + 1 \quad \text{svo} \quad (2a+1)^2 = b^2 + b + 1.$$

Þá yrði $b^2 + b + 1$ að vera ferningstala. En þar sem $b^2 < b^2 + b + 1 < (b+1)^2$ þá er engin slík jákvæð heiltala b til. Jákvæðu heiltölurnar a og b finnast því ekki.