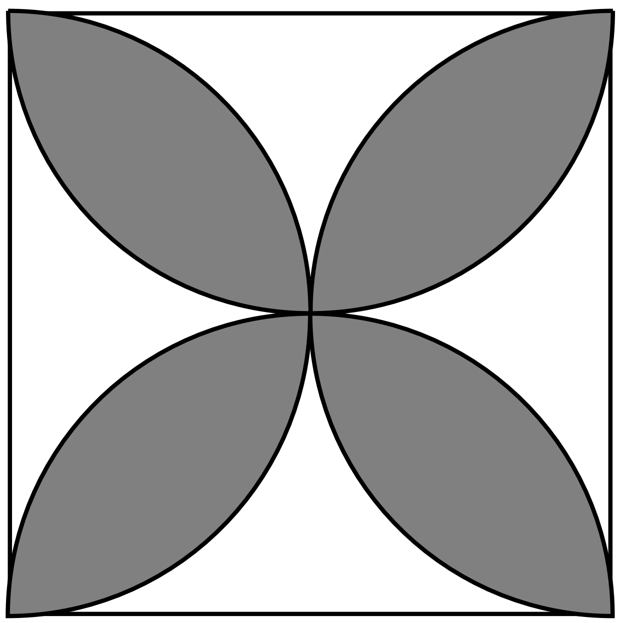
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2010-2011

Svör og lausnir

Efra stig



Íslandsbanki styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Fyrsti hluti

1. Ef $a = 2^{x+2}$ þá er 8^x jafnt og

☐ $4a$ ☐ $a^2/4$ ☐ $2a^3$ ☒ $a^3/64$

Skýring: $a = 2^x \cdot 2^2$ svo $a/4 = 2^x$. Þá er $8^x = (2^3)^x = (2^x)^3 = (a/4)^3 = a^3/64$.

2. Um rauntölu k gildir að $0 < k < 1$. Rauntölurætur jöfnunnar $kx^2 - 3x + k = 0$ eru

☐ báðar núll ☐ báðar neikvæðar ☒ báðar jákvæðar ☐ með ólíkum formerkjum

Skýring: Lausnir jöfnunnar eru

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4k^2}}{2k}.$$

Þar sem $0 < k < 1$ er $5 < 9 - 4k^2 < 9$ og því $\sqrt{5} < \sqrt{9 - 4k^2} < 3$. Lausnir jöfnunnar eru því tvær ólíkar jákvæðar tölur.

3. Jón bjó á hinum ýmsu stöðum meðan hann lifði. Í þessari röð þá bjó Jón 1/3 æfi sinnar á Íslandi, 1/6 á Indlandi, tólf ár í Egyptalandi og helming tímans sem hann átti þá ólifað bjó Jón í Ástralíu. Jón dó í Kanada en þar bjó hann jafn lengi og á Indlandi. Í hvaða landi hélt Jón upp á 40 ára afmælið?

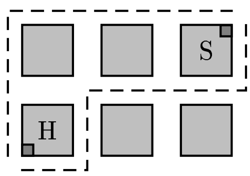
☐ Indlandi ☒ Egyptalandi ☐ Ástalíu ☐ Kanada

Skýring: Fyrri helming æfi sinnar bjó Jón á Íslandi og Indlandi. Seinni helminginn, x ár, bjó Jón í þremur öðrum löndum, þar sem

$$12 + \frac{1}{2}(x - 12) + \frac{1}{6}(2x) = x, \quad \text{og því} \quad x = 36.$$

Svo að hann flutti til Egyptalands þegar hann varð 36 ára og hélt þar upp á 40 ára afmælið.

4. Stysta leið Jónu í skólann (S) heiman frá sér (H) liggur meðfram fimm húsaröðum. Tvær slíkar leiðir eru sýndar á mynd. Á hve marga mismunandi vegu getur Jóna farið stystu leið í skólann að heiman?



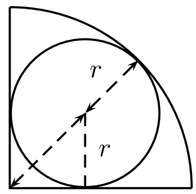
☐ 6 ☐ 8 ☒ 10 ☐ 12

Skýring: Til að komast stystu leið í skólann fer Jóna tvær húsaraðir í norður, n, og þrjár í austur, a. Á myndinni eru leiðir (n, n, a, a, a) og (a, n, a, a, n) sýndar.

Heildarfjöldi stystu leiða er því jafn fjölda möguleika á að raða í röð þremur a og tveimur n, en sá fjöldi er

$$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10 \quad \text{eða} \quad \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10.$$

5. Hver er geisli (radíus) stærsta hrings sem hægt er að innrita í fjórðung úr hring sem hefur geisla (radíus) 1?



☒ $\sqrt{2}-1$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ☐ $\frac{1}{\pi}$ ☐ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Skýring: Táknum geisla innritaða hringsins með r. Þá má rita geisla stærri hringsins sem summu

$$1 = \sqrt{r^2+r^2} + r = \sqrt{2}\,r + r.$$

Þá er $r = 1/(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}-1$.

6. Í 100 manna úrtaki segjast 60 fylgjast með fréttum með því að horfa á sjónvarpsfréttir og 70 segjast lesa fréttir í dagblöðum. Af þeim sem lesa fréttir í dagblöðum segjast 70% horfa á sjónvarpsfréttir. Hve margir í úrtakinu fylgjast hvorki með fréttum í sjónvarpi né dagblöðum?

☐ 15 ☒ 19 ☐ 23 ☐ 27

Skýring: 70% þeirra 70 sem lesa dagblöð, eða 49, horfa einnig á sjónvarp og því $(70-49)=21$ sem eingöngu lesa blöð. Eins horfa $(60-49)=11$ eingöngu á sjónvarp. Alls $11+49+21=81$ fylgjast því með fréttum í sjónvarpi eða dagblöðum. Hinir $100-81=19$ lesa hvorki blöðin né horfa á sjónvarp til að fylgjast með fréttum.

7. Hver er summa allra rauntölulausna jöfnunnar

$$|x-5|^2 + 2|x-5| = 3$$

☐ -2 ☐ 3 ☐ 5 ☒ 10

Skýring: Jöfnuna má umrita og þátta

$$|x-5|^2 + 2|x-5| - 3 = 0 \quad \text{og því} \quad (|x-5|+3)(|x-5|-1) = 0.$$

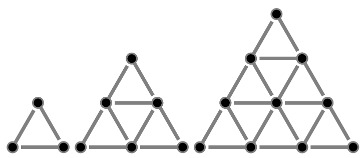
Þar sem útilokað er að $|x-5|$ sé neikvæð, þá er $|x-5|=1$ og þar með $x=5\pm 1$. Summa lausna jöfnunnar er því $(5+1)+(5-1)=10$.

8. Á hringlaga hlaupabraut hleypur Jón hringinn á 40 sekúndum. Siggi hleypur í gagnstæða átt og mætir Jóni á 15 sekúndna fresti. Ef báðir hlaupa á jöfnum hraða, hversu margar sekúndur er Siggi að hlaupa hringinn?

☒ 24 ☐ 25 ☐ 27 ☐ 32

Skýring: Á 15 sekúndum hleypur Jón 15/40 úr hring en Siggi 25/40 (því samanlagt hafa þeir hlaupið einn hring í fyrsta skiptið sem þeir mætast). Siggi hleypur því einn hring (eða 40/40 úr hring) á $15 \cdot (40/25) = 24$ sekúndum.

9. Á myndinni sést hvernig raða má eldspýtum og mynda þríhyrningslaga mynstur með hliðarlengdir 1, 2 og 3 eldspýtur. Hversu margar eldspýtur þarf ef mynda á samskonar mynstur með hliðarlengd sem samanstendur af 6 eldspýtum?

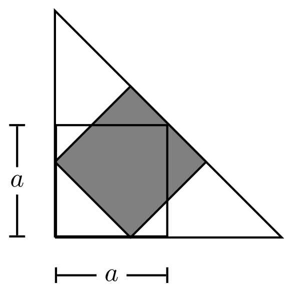


☐ 57 ☐ 60 ☒ 63 ☐ 69

Skýring: Ef fjöldi eldspýtna í hliðarlengd er aukinn úr n í $(n+1)$ þá eykst heildarfjöldi eldspýtna um $3(n+1)$. Til að ná hliðarlengd með sex eldspýtum er byrjað með hliðarlengd eina eldspýtu og svo aukið um eina eldspýtu í einu þar til sex eldspýtum er náð. Heildarfjöldi eldspýtna er því

$$3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 63.$$

10. Í rétthyrndan jafnarma þríhyrning er innritaður ferningur með hliðarlengd a eins og sýnt er á mynd. Skyggði ferningurinn hefur eina hlið á langhlið þríhyrningsins og hornpunkta á skammhliðum þríhyrningsins. Hvert er flatarmál skyggða ferningsins?

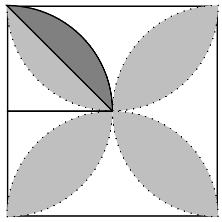


☐ $7a^2/9$ ☐ a^2 ☐ $6a^2/7$ ☒ $8a^2/9$

Skýring: Skammhliðar þríhyrningsins eru $2a$ og langhliðin því $2\sqrt{2}\,a$. Hlið skyggða ferningsins skiptir langhliðinni í þrjá jafna hluta, hver af lengd $2\sqrt{2}\,a/3$. (Allir litlu þríhyrningarnir á myndinni eru jafnarma og rétthyrndir.) Því er flatarmál skyggða ferningsins $(2\sqrt{2}\,a/3)^2 = 8a^2/9$.

Annar hluti

11. Í ferning með hliðarlengd 8 eru innritaðir fjórir hálfhringar með miðjur á hliðum ferningsins. Hvert er flatarmál fjögurra blaða smárans sem hálfhringarnir fjórir mynda?



Svar: $32\pi - 64$

Skýring: Laufum smárans má skipta í átta hálflauf (þar sem hverju laufi er skipt langsum í tvo jafna hluta). Flatamál hvers hálflaufs er jafnt mismun á flatarmáli fjórðungs úr disk með geisla (radíus) 4 og flatarmáli rétthyrnds jafnarma þríhyrnings með skammhliðar 4. Hálflaufið hefur því flatarmálið

$$\frac{1}{4}\pi 4^2 - \frac{1}{2}4^2 = 4\pi - 8$$

og flatarmál fjögurra blaða smárans er þá $8 \cdot (4\pi - 8) = 32\pi - 64$.

12. Fall f uppfyllir $2f(x) + f(1-x) = x^2$ fyrir allar rauntölur x. Finnið $f(5)$.

Svar: $34/3$

Skýring: Ef $x = 5$ fæst jafnan $2f(5) + f(-4) = 25$ og ef $x = -4$ fæst jafnan $2f(-4) + f(5) = 16$. Séu jöfnurnar leystar saman fæst $f(5) = 34/3$

Ath: Það er reyndar hægt að leysa fallajöfnuna almennt með því að setja inn $1-x$ fyrir x og fá $2f(1-x)+f(x) = (1-x)^2$. Með því að margfalda upphaflegu jöfnuna með 2 og draga þessa frá fæst $3f(x) = 2x^2 - (1-x)^2 = x^2 + 2x - 1$. Svo að $f(x) = (x^2 + 2x - 1)/3$ og $f(5) = (5^2 + 2 \cdot 5 - 1)/3 = 34/3$.

13. Hópur málara, sem allir afkasta jafn miklu, vann við að mála tvo veggi. Annar veggurinn er tvöfalt stærri en hinn. Málararnir unnu allir við að mála stærri vegginn í hálfan dag en þá hóf helmingur málaranna að mála minni vegginn meðan hinn helmingur málaranna hélt áfram að mála stóra vegginn. Í lok dags hafði tekist að mála allan stærri vegginn en einn málari var allan næsta dag að ljúka við að mála minni vegginn. Hvað voru málararnir margir?

Svar: 8

Skýring: Táknum dagsverk eins málara með a og fjölda málara með x. Þá er gefið að stærri veggurinn er $\frac{a}{2} \cdot x + \frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2}$ dagsverk og minni veggurinn er $\frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2} + a$ dagsverk. Þar sem stærri veggurinn er tvöfalt stærri en hinn þá gildir að

$$\frac{a}{2} \cdot x + \frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2} = 2(\frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2} + a)$$

sem gefur að $x = 8$.

14. Hver er minnsta heiltalan n, stærri en 1, þannig að $n^2 - 1$ sé deilanleg með 2010?

Svar: 269

Skýring: Talan 2010 þáttast í frumþætti sem $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ og þessi tala verður að ganga upp í $(n-1)(n+1)$. Til að 2 gangi upp í margfeldinu þarf n að vera oddatala, sem þá má skrifa sem $n = 2k+1$ þar sem k er heiltala (stærri en 1) og þá verður $(n-1)(n+1) = 4k(k+1)$. Hinir frumþættirnir þrír þurfa að ganga upp í $k(k+1)$ og sér í lagi þarf 67 að ganga upp í k eða $k+1$. Prófum nú lægstu mögulegu k: Ef $k(k+1) = 66 \cdot 67$ þá gengur 5 ekki upp í margfeldið og ekki heldur ef $k(k+1) = 67 \cdot 68$. Næsti möguleiki er $k(k+1) = 133 \cdot 134$ sem gengur ekki af sömu ástæðu, en þar næst kemur $k(k+1) = 134 \cdot 135$ sem er bæði deilanlegt með 3 og 5. Svo $n = 2 \cdot 134 + 1 = 269$.

15. Hver er tölustafurinn x ef $(3(a+134))^2 = 1x8921$, þar sem a er heiltala?

Svar: 6

Skýring: Ef jafnan gildir verður talan $1x8921$ að vera margfeldi af 9 og það er vel þekkt regla að þá gengur 9 upp í þversummunni $1+x+8+9+2+1 = 21+x$. Eini möguleikinn er að $x = 6$.

Ath: Þó $x = 6$ sé eini möguleikinn er ekki sjálfgefið að hann virki; dæmið gæti verið plat. En svo er ekki því ef $a = 3$ fæst

$$(3(a+134))^2 = (3 \cdot 137)^2 = 411^2 = 168921.$$

Þriðji hluti

16. Ef a, b, c og d eru fjórir mismunandi jákvæðir tölustafir, enginn þeirra núll, þá má mynda 24 mismunandi fjögurra stafa tölur úr þeim. Er hægt að velja a, b, c og d þannig að allar þessar 24 tölur séu frumtölur (prímtölur)?

Lausn: Nei, það er ekki hægt. Ef tölustafirnir fjórir eiga að mynda 24 frumtölur þá eru tölustafirnir 2, 4, 5, 6 og 8 útilokaðir vegna þess að fjögurra stafa tölur sem enda á þessum tölustöfum eru ekki frumtölur (eru deilanlegar með 2 eða 5). Eftir eru þá tölustafirnir 1, 3, 7 og 9 til að mynda tölurnar 24.

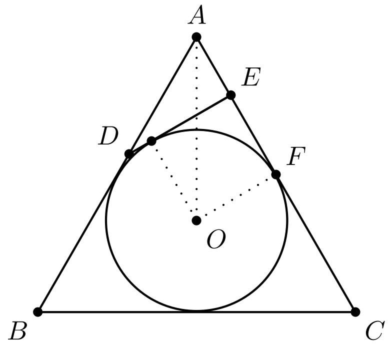
Þar sem tala er deilanleg með 11 ef víxlsumma hennar er deilanleg með 11, þ.e. summan af tölustöfum í oddatölusætum (aftanfrá) að frádreginni summu hinna tölustafanna, þá eru allar sex tölurnar

$$1397, \quad 1793, \quad 3179, \quad 3971, \quad 7139 \quad \text{og} \quad 7931$$

deilanlegar með 11 þar sem þessar tölur hafa víxlsummu 0.

Önnur leið er að skoða lægstu töluna 1379, en hún er deilanleg með 7.

17. Í jafnhliða þríhyrningi ABC er innritaður hringur með miðju í O. Strikið DE er snertill við hringinn og sker hliðina AB í D og hliðina AC í E undir réttu horni. Strikið AE er 1 að lengd. Hver er lengd AC?



Lausn: Táknum geisla hringsins með r og látum F vera snertipunkt hringsins og hliðarinnar AC. Þá er $EF = OF = r$ vegna þess að þetta eru tvær hliðar í sama ferningi. Þríhyrningurinn OFA hefur $30°$ horn í A, $60°$ horn í O og $90°$ horn í F. Því er $OA = 2r$ og $AF = \sqrt{3}\,r$. En við vitum líka að $AF = AE + EF = 1 + r$ svo að $\sqrt{3}\,r = 1 + r$. Þetta gefur að

$$r = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

og þar með að $AC = 2 \cdot AF = 2(1 + r) = 2 + 2r = 2 + (\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$.

18. Hverjar eru allar lausnir jöfnunnar

$$p^n + 144 = m^2$$

þar sem m og n eru jákvæðar heiltölur og p er frumtala (prímtala)?

Lausn: Ef $p^n + 144 = m^2$ þá er

$$p^n = m^2 - 144 = (m - 12)(m + 12).$$

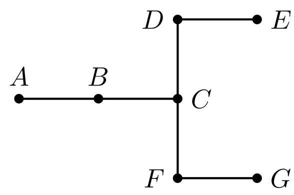
Þar sem vinstri hliðin er veldi af frumtölunni p þá eru þættirnir hægra megin það líka, svo skrifa má $m - 12 = p^r$ og $m + 12 = p^s$ þar sem $0 \leq r < s$ og $r + s = n$. Þá er ljóst að $m - 12$ gengur upp í $m + 12$ og þar sem

$$\frac{m + 12}{m - 12} = 1 + \frac{24}{m - 12}$$

þá gengur $m - 12$ upp í 24, svo $m - 12$ getur verið 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 eða 24. En $m - 12$ er veldi af frumtölu (eða jafnt 1) svo möguleikum fækkar í 1, 2, 3, 4 og 8. Enn fækkar möguleikum því $m - 12$ og $m + 12 = (m - 12) + 24$ eru veldi af sömu frumtölu. Möguleg gildi $m - 12$ eru þá orðin 1, 3 og 8:

- Ef $m - 12 = 1$ þá er $m + 12 = 25 = 5^2$ svo $(p, n, m) = (5, 2, 13)$ er lausn.
- Ef $m - 12 = 3$ þá er $m + 12 = 27 = 3^3$, svo $(p, n, m) = (3, 4, 15)$ er lausn.
- Ef $m - 12 = 8$ þá er $m + 12 = 32 = 2^5$, svo $(p, n, m) = (2, 8, 20)$ er lausn.

19. Myndin sýnir sjö hús, táknuð með punktum, sem tengd eru með sex götum sem táknaðar eru með strikum. Hver gata er einn kílómetri að lengd. Þú býrð í húsi sem merkt er B. Á hve marga mismunandi vegu getur þú hlaupið n kílómetra ($n \in \mathbb{N}$) ef þú byrjar í B, hleypur eftir götunum sem sýndar eru, hleypur aldrei hluta úr götu og snýrð aldrei við milli húsa? Þú mátt nota götu oftar en einu sinni og þarft ekki að enda hlaupið í B. Ef til dæmis $n = 4$ þá eru þrír möguleikanna B til C til F til G til F; B til A til C til B og B til C til B til A til B.



Lausn: Við höfum 2 möguleika fyrir $n = 1$, það er frá B til A eða frá B til C. Ef $n = 2$ höfum við 4 möguleika: frá B til A til B; frá B til C til B; frá B til C til D og frá B til C til F. Við sjáum að svarið er það sama ef við byrjum í D eða F. Ágiskun gefur okkur nú reglu um að leiðirnar fyrir n séu 2^n. Við notum þrepasönnum á k, það er að möguleikarnir séu 2^{2k-1} fyrir $n = 2k - 1$ og 2^{2k} fyrir $n = 2k$. Við höfum séð að reglan er rétt fyrir $k = 1$. Gerum nú ráð fyrir að reglan gildi fyrir eitthvert k. Eftir 2^{2k} kílómetra ert þú á B, D eða F eftir einhverri af leiðunum 2^{2k}. Nú eru tveir möguleikar að fara einn viðbótar kílómetra frá B, D eða F og þá verður fjöldi leiða 2^{2k+1} fyrir $n = 2k + 1$. Svo eru einnig 4 möguleikar á að fara 2 kílómetra frá B, D eða F. Því er fjöldi möguleika 2^{2k+2} fyrir $n = 2k + 2$.

Alls tóku þátt 399 nemendur frá 19 skólum, 248 á neðra stigi og 151 á efra stigi. Við þökkum þeim fyrir þátttökuna og einnig öllum þeim aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson	Gunnar Freyr Stefánsson
Friðrik Diego	Jóhanna Eggertsdóttir
Guðbjörn Freyr Jónsson	Marteinn Þór Harðarson