

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2010-2011 Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Ef $a = 2^{x+2}$ þá er 8^x jafnt og

$4a$

$a^2/4$

$2a^3$

$a^3/64$

2. Um rauntölu k gildir að $0 < k < 1$. Rauntölurætur jöfnunnar $kx^2 - 3x + k = 0$ eru

báðar núll

báðar neikvæðar

báðar jákvæðar

með ólíkum formerkjum

3. Jón bjó á hinum ýmsu stöðum meðan hann lifði. Í þessari röð þá bjó Jón $1/3$ æfi sinnar á Íslandi, $1/6$ á Indlandi, tólf ár í Egyptalandi og helming tímans sem hann átti þá ólifað bjó Jón í Ástralíu. Jón dó í Kanada en þar bjó hann jafn lengi og á Indlandi. Í hvaða landi hélt Jón upp á 40 ára afmælið?

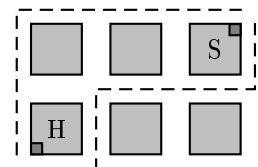
Indlandi

Egyptalandi

Ástralíu

Kanada

4. Stysta leið Jónu í skólann (S) heiman frá sér (H) liggur meðfram fimm húsaröðum. Tvær slíkar leiðir eru sýndar á mynd. Á hve marga mismunandi vegu getur Jóna farið stystu leið í skólann að heiman?



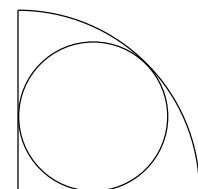
6

8

10

12

5. Hver er radíus stærsta hrings sem hægt er að innrita í fjórðung úr hring sem hefur geisla (radíus) 1?



$\sqrt{2} - 1$

$\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\frac{1}{\pi}$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

6. Í 100 manna úrtaki segjast 60 fylgjast með fréttum með því að horfa á sjónvarpsfréttir og 70 segjast lesa fréttir í dagblöðum. Af þeim sem lesa fréttir í dagblöðum segjast 70% horfa á sjónvarpsfréttir. Hve margir í úrtakinu fylgjast hvorki með fréttum í sjónvarpi né dagblöðum?

15 19 23 27

7. Hver er summa allra rauntölulausna jöfnunnar

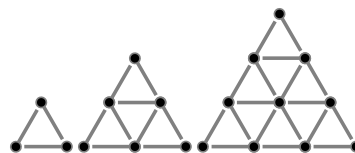
$$|x - 5|^2 + 2|x - 5| = 3$$

-2 3 5 10

8. Á hringlaga hlaupabraut hleypur Jón hringinn á 40 sekúndum. Siggí hleypur í gagnstæða átt og mætir Jóni á 15 sekúndna fresti. Ef báðir hlaupa á jöfnum hraða, hversu margar sekúndur er Siggí að hlaupa hringinn?

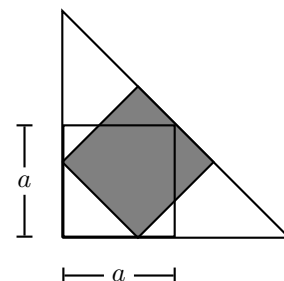
24 25 27 32

9. Á myndinni sést hvernig raða má eldspýtum og mynda þríhyrningslaga mynstur með hliðarlengdir 1, 2 og 3 eldspýtur. Hversu margar eldspýtur þarf ef mynda á samskonar mynstur með hliðarlengd sem samanstendur af 6 eldspýtum?



57 60 63 69

10. Í rétthyrndan jafnarma þríhyrning er innritaður ferningur með hliðarlengd a eins og sýnt er á mynd. Skyggði ferningurinn hefur eina hlið á langhlið þríhyrningsins og hornpunkta á skammhliðum þríhyrningsins. Hvert er flatarmál skyggða ferningsins?

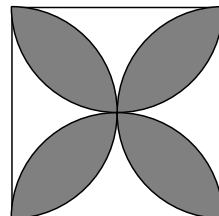


$7a^2/9$ a^2 $6a^2/7$ $8a^2/9$

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Í fering með hliðarlengd 8 eru innritaðir fjórir hálfhringar með miðjur á hliðum ferningsins. Hvert er flatarmál fjögurra blaða smárans sem hálfhringarnir fjórir mynda?



Svar: _____

12. Fall f uppfyllir $2f(x) + f(1 - x) = x^2$ fyrir allar rauntölur x . Finnið $f(5)$.

Svar: _____

13. Hópur málara, sem allir afkasta jafn miklu, vann við að mála tvo veggi. Annar veggurinn er tvöfalt stærri en hinn. Málarnir unnu allir við að mála stærri vegginn í hálfan dag en þá hóf helmingur málara að mála minni vegginn meðan hinn helmingur málara hélt áfram að mála stóra vegginn. Í lok dags hafði tekist að mála allan stærri vegginn en einn málari var allan næsta dag að ljúka við að mála minni vegginn. Hvað voru málarnir margir?

Svar: _____

14. Hver er minnsta heiltalan n , stærri en 1, þannig að $n^2 - 1$ sé deilanleg með 2010?

Svar: _____

15. Hver er tölustafurinn x ef $(3(a + 134))^2 = 1x8921$, þar sem a er heiltala?

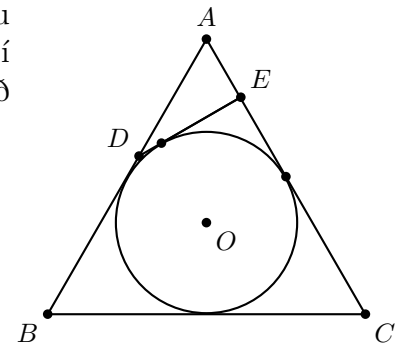
Svar: _____

Fjórði hluti

Í þessum hluta er hvort dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

- 16.** Ef a , b , c og d eru fjórir mismunandi jákvæðir tölustafir, enginn þeirra núll, þá má mynda 24 mismunandi fjögurra stafa tölur úr þeim. Er hægt að velja a , b , c og d þannig að allar þessar 24 tölur séu framtölur (prímtölur)?

17. Í jafnhliða þríhyrningi ABC er innritaður hringur með miðju í O . Strikið DE er snertill við hringinn og sker hliðina AB í D og hliðina AC í E undir réttu horni. Strikið AE er 1 að lengd. Hver er lengd AC ?



18. Hverjar eru allar lausnir jöfnunnar

$$p^n + 144 = m^2$$

þar sem m og n eru jákvæðar heiltölur og p er frumtala (prímtala)?

19. Myndin sýnir sjö hús, táknud með punktum, sem tengd eru með sex götum sem táknadar eru með strikum. Hver gata er einn kílómetri að lengd. Þú býrð í húsi sem merkt er B . Á hve marga mismunandi vegu getur þú hlaupið n kílómetra ($n \in \mathbb{N}$) ef þú byrjar í B , hleypur eftir götunum sem sýndar eru, hleypur aldrei hluta úr götu og snýrð aldrei við milli húsa? Þú mátt nota götu oftár en einu sinni og þarft ekki að enda hlaupið í B . Ef til dæmis $n = 4$ þá eru þrjár möguleikanna B til C til F til G til F ; B til A til C til B og B til C til B til A til B .

