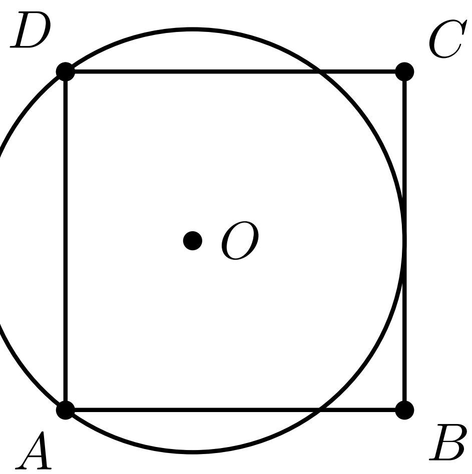
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2012–2013

Svör og lausnir

Efra stig



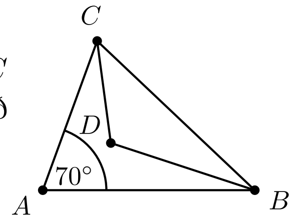
Fyrsti hluti

1. Þegar brotið $\dfrac{2^{n+3} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+2}}$ er fullstytt fæst

☐ $\frac{5}{8}$ ☒ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☐ 1

Skýring: $\dfrac{2^{n+3} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+2}} = \dfrac{2 \cdot 2^n(2^2 - 1)}{2 \cdot 2^n \cdot 2^2} = \dfrac{2^2 - 1}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

2. Í þríhyrningi ABC skerast helmingalínur hornanna $\angle ABC$ og $\angle BCA$ í punkti D. Hve stórt er hornið $\angle CDB$ ef hornið $\angle CAB = 70°$?



☐ 55° ☐ 105° ☒ 125° ☐ 145°

Skýring: Látum $x = \angle ACD = \angle DCB$ og $y = \angle ABD = \angle DBC$. Þá gildir að $70 + 2x + 2y = 180$ svo $35 + x + y = 90$, en þá er $125 + x + y = 180$. Hornið $\angle CDB$ er því 125°

3. Meðaltal fimmtíu talna er 76. Fjörtíu af þessum tölum hafa meðaltalið 80. Hvert er meðaltal hinna tíu?

Skýring: Tölurnar fimmtíu eru með summu $50 \cdot 76$ og þær fjörtíu sem tilteknar eru hafa summu $40 \cdot 80$. Þær tíu sem afgangs eru hafa þá summuna $50 \cdot 76 - 40 \cdot 80$ og því meðaltalið $(50 \cdot 76 - 40 \cdot 80)/10 = 60$.

☐ 28 ☐ 38 ☐ 40 ☒ 60

4. Punktar P og Q liggja báðir á sama helmingi línustriksins AB. Punkturinn P skiptir AB í hlutföllunum $2 : 3$ og Q skiptir AB í hlutföllunum $3 : 4$. Hve langt er strikið AB ef lengd PQ er 4?

☒ 140 ☐ 130 ☐ 120 ☐ 110

Skýring: Gefum okkur að punktarnir tveir séu nær A en B. P skiptir AB í 5 jafna hluta og liggur $(2/5)AB$ frá A. Sömuleiðis skiptir Q strikinu AB í 7 jafna hluta og liggur $(3/7)AB$ frá A. En staðsetningu P og Q má gefa á sameiginlegum kvarða, P er $(14/35)AB$ frá A og Q er $(15/35)AB$ frá A. Fjarlægðin milli P og Q er því $(1/35)AB$. Þar sem $PQ = 4$ þá er $AB = 35 \cdot 4 = 140$

5. Á hve marga vegu er hægt að fylla upp í 3×3 töflu með tölunum 1, 2 og 3 þannig að hver þessara talna birtist aðeins einu sinni í hverri línu og hverjum dálki? (Eitt slíkt dæmi er sýnt hér til hliðar.)

2	1	3
1	3	2
3	2	1

☐ 6 ☐ 8 ☒ 12 ☐ 24

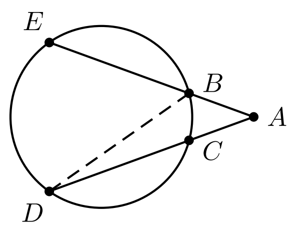
Skýring: Athugið að skilyrðið tryggir að taflan ákvarðast algjörlega af einni röð (einum dálki) og svo tölu til viðbótar. Röð (dálk) má fylla á $3 \cdot 2 \cdot 1$ mismunandi vegu og ef bæta á við einni tölu í eitthvert hólfanna sem eftir er þá er aðeins hægt að gera það á 2 mismunandi vegu. Töfluna má því fylla á alls $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ mismunandi vegu.

6. Ef m er ferningstala (annað veldi heillar tölu) er næsta ferningstala stærri en m jöfn

☒ $m + 2\sqrt{m} + 1$ ☐ $m^2 + 2m + 1$ ☐ $m + 1$ ☐ $\sqrt{m} + 1$

Skýring: Ef m er ferningstala þá er $\sqrt{m}$ heiltala. Næsta ferningstala stærri en m er því $(\sqrt{m} + 1)^2 = m + 2\sqrt{m} + 1$.

7. Á mynd er hornið $A = 40°$ og bogarnir BE, DE og CD allir jafnir. Hve stórt er hornið $\angle DBE$?



☐ 50° ☒ 55° ☐ 60° ☐ 65°

Skýring: Táknum gráðumál bogans BC með y og boganna BE, DE og CD með x. Þá gildir að $3x + y = 360°$ og $x - y = 80°$. Þá fæst að $x = 110°$, svo $\angle DBE = 55°$

8. Hver er síðasti tölustafur tölunnar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 2013$ (margfeldi allra oddatalna frá 1 til 2013)?

☐ 1 ☐ 3 ☒ 5 ☐ 7

Skýring: Talan er margfeldi af 5 og endar því á 0 eða 5; líkt og öll margfeldi af 5. Talan er einnig margfeldi oddatalna og því oddatala sjálf. Þar með verður hún að enda á 5.

9. Fall f er þannig að $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ fyrir allar jákvæðar heiltölur x og y. Hvert er gildið á $f(25)$ ef gefið er að $f(10) = 6$ og $f(20) = 10$?

☒ 4 ☐ 8 ☐ 12 ☐ 18

Skýring: Reglan gefur að $10 = f(20) = f(2) + f(10) = f(2) + 6$ svo að $f(2) = 4$. En þá fæst $6 = f(10) = f(2) + f(5) = 4 + f(5)$ svo að $f(5) = 2$. Þá er $f(25) = f(5 \cdot 5) = f(5) + f(5) = 4$.

10. Rétthyrningur hefur flatarmál a og lengd hornalínu er d. Hvert er ummál rétthyrningsins?

☐ $2\sqrt{d^2 + a}$ ☐ $2a\sqrt{d}$ ☐ $2\sqrt{2d^2 + a}$ ☒ $2\sqrt{d^2 + 2a}$

Skýring: Táknum hliðar rétthyrningsins með x og y. Þá er $a = xy$ og $d^2 = x^2 + y^2$. Því fæst að $(x + y)^2 = d^2 + 2a$ og því $x + y = \sqrt{d^2 + 2a}$. Þá reiknast ummál rétthyrningsins $2(x + y) = 2\sqrt{d^2 + 2a}$

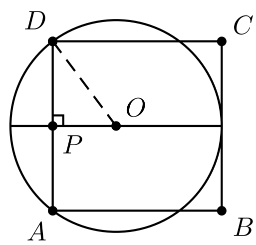
Annar hluti

11. Gefið er fallið $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 2$ og að $f(3) = 5$. Finnið $f(-3)$.

Svar: $f(-3) = -1$.

Skýring: Ferill f hefur punkt-samhverfu um $(0, 2)$. Fyrst $(3, 5)$ er á ferli f þá er $(-3, -1)$ einnig á ferli f. Svo $f(-3) = -1$.

12. Myndin sýnir ferning og hring með miðju O. Hringurinn fer í gengum hornpunktana A og D og hefur hliðina BC sem snertil. Hver er geisli (radíus) hringsins ef hliðarlengd ferningsins er 8?



Svar: 5.

Skýring: Teiknum miðstreng hringsins, hornrétt á hliðina AD. Miðstrengurinn, sem sker AD í punkti P er þá miðþverill AD, svo $PD = 4$. Nú er $OP = 8 - r$ svo sé reglu Pýþagórasar beitt á þríhyrninginn OPD fæst jafnan

$$4^2 + (8 - r)^2 = r^2$$

Þá er $80 - 16r = 0$ og því $r = 80/16 = 5$

13. Fljótabátur siglir með jöfnum hraða. Þegar báturinn siglir með straumnum er hann 5 klst frá A til B, en 7 klst til baka. Hve langan tíma tekur það vélarvana pramma að fljóta með straumnum frá A til B?

Svar: 35 klst.

Skýring: Táknum vegalengdina frá A til B með d, hraða fljótabátsins á lygnu vatni með b og straumhraða fljótsins með f. Þá gildir að $5(b + f) = d$ og $7(b - f) = d$. Séu jöfnurnar leystar saman fæst: $70f = 2d$ eða $35f = d$. Það tekur því vélarvana pramma 35 klst að fljóta með straumnum frá A til B.

14. Anna, Birna, Diljá, Erna og Fjóla hugsa sér fimm ólíkar frumtölur.

Anna segir:	„Mín tala er hvorki stærst né minnst.“
Birna segir:	„Mín tala er hvorki stærst né minnst.“
Diljá segir:	„Mín tala er stærst.“
Erna segir:	„Mín tala er minnst.“
Fjóla segir:	„Mín tala er ekki minnst.“

Nákvæmlega ein þeirra skrökvar. Hver hugsaði sér stærstu frumtöluna?

Svar: Fjóla.

Skýring: Ef Diljá og Erna segja báðar satt þá segja allar satt, en þar sem nákvæmlega ein þeirra skrökvar þá geta Diljá og Erna ekki báðar sagt satt. Ef Erna skrökvar þá hefur einhver hinna fjögurra hugsað sér minnstu frumtöluna og er einnig að skrökva. Erna segir því satt. Dilja er því að skrökva og hinar fjórar segja satt. Fjóla hefur því hugsað sér stærstu frumtöluna.

15. Ég þarf að gera upp við mig hvort ég á að fara til Lundúna eða Parísar. Því kasta ég teningi og skrái hjá mér hvort upp kemur oddatala (o) eða slétt tala (s). Ég kasta teningnum svo oft sem þarf:

Ef fyrr kemur upp röðin $s - s - o$ vel ég Lundúnir.
Hinsvegar, ef fyrr kemur upp röðin $o - s - s$, þá vel ég París.

Hve líklegt er að París verði fyrir valinu?

Svar: 3/4.

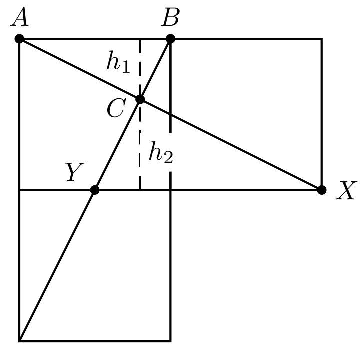
Skýring: Ef á einhverju stigi leiksins, ég skrifa stafinn o þá mun ég fara til Parísar, sama hvað síðar kemur upp. Líkurnar ráðast því í fyrstu tveimur köstunum. Þar eru mögulegar útkomur

$$o - o \qquad o - s \qquad s - o \qquad s - s$$

Þrír af þessum fjórum möguleikum leiða til Parísar. Líkur á Parísarferð eru því 3/4.

Þriðji hluti

16. Myndin sýnir þrjá jafnstóra ferninga með hliðarlengd 1. Hornpunktar ferninganna eru tengdir línustrikum eins og sýnt er. Línustrikin skerast í punkti C. Hvert er flatarmál þríhyrningsins ABC?



Lausn: Teiknum punktana X og Y inn á mynd eins og sýnt er. Þar sem AB er samsíða XY þá eru þríhyrningarnir ABC og XYC einslaga. Þar sem $XY = \frac{3}{2}AB$ þá er $h_2 = \frac{3}{2}h_1$ og þar sem $1 = h_1 + h_2 = h_1 + \frac{3}{2}h_1$ þá er $h_1 = \frac{2}{5}$. Þá má reikna flatarmál þríhyrnings ABC:

$$\text{Flatarmál}(ABC) = \frac{AB \cdot h_1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{2}{5}}{2} = \frac{1}{5}.$$

17. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að talan $n^2 + 1$ gangi upp í töluna $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 11$.

Lausn: Ef $n^2 + 1$ er deilt í $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 11$ fæst kvóti $n^2 + 2n + 1$ og afgangur 10. Því má rita

$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 11 = (n^2 + 1)(n^2 + 2n + 1) + 10.$$

Til að deilingin gangi upp þarf $n^2 + 1$ að ganga upp í 10. Þar sem n er jákvæð tala getur $n^2 + 1$ því tekið gildið 2, 5 og 10, en það gerist ef $n = 1$, $n = 2$ eða $n = 3$.

18. Finnið margliðu $P(x)$, af sem lægstu stigi, sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

(a) Allir stuðlar P eru heiltölur;

(b) allar rætur P eru heiltölur;

(c) $P(0) = -1$ og

(d) $P(3) = 128$.

Lausn: Gerum ráð fyrir að margliðan sé af stigi n og táknum ræturnar með $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Þá má rita margliðuna á forminu

$$P(x) = a(x - r_1)^{n_1}(x - r_2)^{n_2} \cdots (x - r_m)^{n_m}$$

Þar sem $n_1, n_2, \ldots, n_m \geq 1$ og a er heiltala. Þar sem $P(0) = -1$ þá verður $ar_1^{n_1} r_2^{n_2} \cdots r_m^{n_m}(-1)^n = -1$, svo $|a| = 1$ og $|r_k| = 1$ fyrir öll $k = 1, 2, \ldots, m$. Því er

$$P(x) = a(x-1)^p(x+1)^{n-p}$$

Nú er $P(3) = 128$, svo $a2^p4^{n-p} = a2^{2n-p} = 128 = 2^7$. Því er $2n - p = 7$. Þar sem $p \geq 0$ og n eru heiltölur er minnsta mögulega gildi á n jafnt 4. Þá er $p = 1$ og $a = 1$. Margliðan $P(x) = (x-1)(x+1)^3$ uppfyllir öll sett skilyrði.

Ath: Þó að enginn hafi skilað slíkri lausn voru vangaveltur um hvort margliða eins og $P(x) = (x-1)(7x^2+1)$ teldist uppfylla skilyrði dæmisins. Hún hefur rótina 1 sem er heiltala, en enga aðra rauntölurót. Hins vegar hefur hún tvær aðrar rætur sem eru tvinntölur ($\pm i/\sqrt{7}$) og teljast því ekki vera heiltölur.

19. Sýnið að fyrir sérhverja heiltölu $k \geq 2$ megi finna k jákvæðar heiltölur (ekki endilega ólíkar) þannig að summa talnanna sé jöfn margfeldi þeirra.

Lausn: Með því að prófa sig áfram fæst:

$k = 2$	$2 \cdot 2 = 2 + 2$
$k = 3$	$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$
$k = 4$	$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 1 + 2 + 4$
$k = 5$	$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 1 + 1 + 1 + 2 + 5$
$k = 6$	$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6$

Almennt, ef $k \geq 2$ er jákvæð heiltala, þá veljum við k tölur á eftirfarandi hátt:

$(k-2)$ talnanna eru allar 1, ein talan er 2 og síðasta talan er k.

Þá fæst:

$$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{n-2 \text{ þættir}} \cdot 2 \cdot k = 2k = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-2 \text{ liðir}} + 2 + k$$

margfeldi talnanna er jafnt summu talnanna.

Ath: Hægt er að leysa dæmi á marga aðra vegu, t.d. virka bæði $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 1 + 1 + 1 + 3 + 3$ og $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2$ fyrir $k = 5$. En nóg er að finna einhverja kerfisbundna leið sem dugir fyrir öll $k \geq 2$ (og sýna að hún virki).

Við þökkum öllum þeim sem tóku þátt og aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson
Bjarni Vilhjálmur Halldórsson
Friðrik Diego
Gunnar Freyr Stefánsson
Jóhanna Eggertsdóttir
Marteinn Þór Harðarson