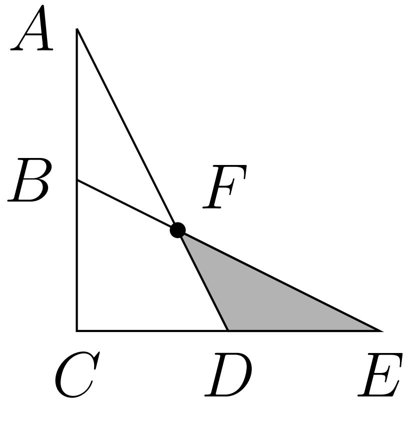
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2013–2014

Svör og lausnir

Efra stig



Fyrsti hluti

1. Hvert er gildið á 3^{x-2} ef $3^x = 15$?

☐ 1 ☒ $\frac{5}{3}$ ☐ 5 ☐ $\frac{15}{2}$

Lausn: $3^{x-2} = 3^x \cdot 3^{-2} = \frac{3^x}{3^2} = \frac{15}{3^2} = \frac{5}{3}$.

2. Nokkrir félagar halda veislu og skipta kostnaði jafnt með sér. Heildarkostnaður er 60 þúsund krónur. Einn félagi til viðbótar slæst í hópinn. Þá eykst heildarkostnaður um 10 þúsund krónur en hlutur hvers lækkar um 1 þúsund. Hversu margir voru félagarnir upphaflega?

☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6

Lausn: Látum n tákna upphaflegan fjölda félaga. Þá borgar hver $60/n$ þúsund krónur. Þegar einn bætist í hópinn er heildarkostaðurinn 70 þúsund og hver borgar $(60/n - 1)$ þúsund; m.ö.o. $(n + 1)(60/n - 1) = 70$. Þessa jöfnu má umrita á formið $(n+1)(60-n) = 70n$. Þá fæst að $60 + 59n - n^2 = 70n$ og því er $n^2 + 11n - 60 = 0$. Þá er $(n + 15)(n - 4) = 0$ og markverð lausn er $n = 4$.

3. Rauntölurnar x og y fullnægja jöfnunni $x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34$. Hvert er gildið á $x + y$?

☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4

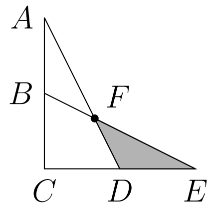
Lausn: Ef fyllt er í ferninginn fæst $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = -34 + 25 + 9 = 0$. Því er $x = 5$ og $y = -3$. Þá er $x + y = 2$.

4. Ragna, Sigrún, Tinna, Una og Vera hittast á kaffihúsi. Ragna heilsar nákvæmlega einni hinna með handabandi og Sigrún heilsar líka nákvæmlega einni hinna með handabandi. Tinna, Una og Vera heilsa hins vegar nákvæmlega tveimur hinna með handabandi hver um sig. Það er alveg víst að Ragna og Vera heilsuðust með handabandi. Hverjar eftirtalinna hafa án nokkurs vafa EKKI heilsast með handabandi?

☐ Vera og Una ☐ Vera og Tinna ☐ Sigrún og Tinna ☒ Sigrún og Vera

Lausn: Gefið er að Ragna og Vera heilsast og Vera heilsar einni hinna þriggja. Ef Vera heilsar Sigrúnu þá hafa Ragna, Sigrún og Vera lokið sínum handarböndum. Una og Tinna geta því einungis heilsað hvorri annarri. Sigrún og Vera geta því ekki hafa heilsast.

5. Strikin AC og CE eru bæði 30 cm og mynda rétt horn. D er miðpunktur CE og B er miðpunktur AC. Strikin AD og BE skerast í punkti F. Hvert er flatarmál þríhyrnings DEF í cm^2?



☐ 50 ☐ $50\sqrt{2}$ ☒ 75 ☐ $\frac{15}{2}\sqrt{105}$

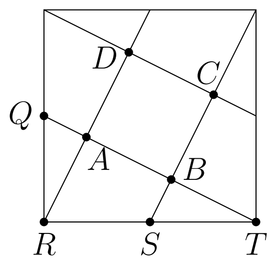
Lausn: Þar sem D er miðpunktur striksins CE þá hafa þríhyrningar DEF og CDF sama flatarmál. Vegna samhverfu eru þríhyrningar CFD og CFB eins. Því er flatarmál DEF þriðjungur af flatarmáli þríhyrnings CEB sem er $30 \cdot 15/2 = 15^2$. Flatarmál DEF er því $15^2/3 = 75$.

6. Skilgreinum aðgerð $a * b = \dfrac{a}{a+b}$. Gefið er að $s * t = 5$, hvert er gildið á $t * s$?

☐ -5 ☒ -4 ☐ 3 ☐ 2

Lausn: $5 = \dfrac{s}{s+t} = \dfrac{s+t-t}{s+t} = 1 - \dfrac{t}{s+t} = 1 - t * s$. Því er $t * s = -4$.

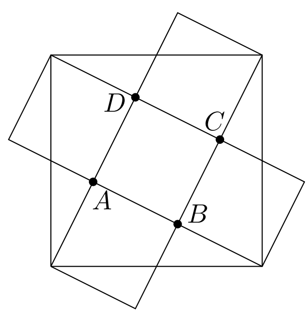
7. Ferningur hefur hliðarlengdir 1. Frá hverjum hornpunkti er dregið strik að miðpunkti hliðar, eins og sýnt er á mynd. Hvert er flatarmál ferhyrningsins $ABCD$?



☐ $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ☒ $\frac{1}{5}$

Lausn: Þar sem S er miðpunktur RT þá er flatarmál BST einn fjórði af flatarmáli ART. Einnig er flatarmál BST jafnt flatarmáli AQR. Þá fæst að flatarmál BST er einn fimmti af flatarmáli QRT. Nú er flatarmál QRT jafnt $(1/2)\cdot 1 \cdot (1/2) = 1/4$ og því er flatarmál BST jafnt $1/20$. Þar sem flatarmál stóra ferningsins er jafnt flatarmáli $ABCD$ að viðbættu fjórföldu flatarmáli ART fæst að flatarmál $ABCD$ er $1 - 4 \cdot (4/20) = 4/20 = 1/5$.

Önnur leið: Svo má einfaldlega sjá þetta með því að mynda fimm eins ferninga eins og sýnt er hér til hliðar og taka eftir því að litlu þríhyrningarnir utan við ferninginn eru eins þeir litlu inni í honum, vegna samhverfu.



8. Um þriggja stafa töluna abc gildir að $a > c$ og að mismunurinn $abc - cba$ er þriggja stafa tala með 4 sem fyrsta tölustaf. Þá eru annar og þriðji tölustafur mismunarins

☐ 4 og 9 ☒ 9 og 5 ☐ 5 og 4 ☐ Ekki ótvírætt svar

Lausn: Skrifum $abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ og $cba = c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$. Þá er mismunurinn $abc - cba = (a-c) \cdot 100 + (c-a) = 4??$. Þar sem $c - a < 0$ verður $a - c = 5$ og þarmeð er $c - a = -5$. Þá fæst að $abc - cba = 5 \cdot 100 + (-5) = 495$.

9. Ef deilt er í $y^2 - my + 2$ með $y - 1$ fæst sama leif og ef deilt er með $y + 1$. Hvert er gildið á m?

☒ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ Upplýsingar skortir

Lausn: Ef deilt er í margliðu $p(y)$ með $y - a$ þá er leifin $p(a)$. Því fæst að $1^2 - m \cdot 1 + 2 = (-1)^2 - m \cdot (-1) + 2$ og því er $-m = m$ og þar með $m = 0$.

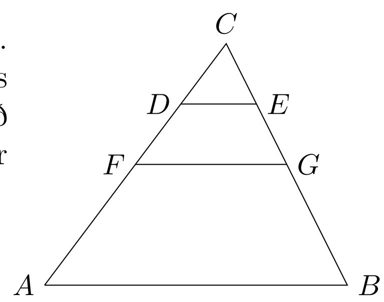
10. Jörmunrekur þarf að ýta þungum steinum upp á fjall, einum steini á hverjum degi. Fyrsta daginn tekur það 7 tíma að ýta steininum upp og labba niður. Næstu daga fer hann hvern dag helmingi hægar upp fjallið en daginn á undan og tvöfalt hraðar niður en daginn á undan. Ef hann þarf 8 tíma til að fara upp og niður á öðrum degi, hvað þarf hann þá marga tíma á þriðja degi?

☐ $8\frac{1}{2}$ ☐ 9 ☐ $10\frac{1}{4}$ ☒ 13

Lausn: Látum u tákna tímann upp og n tákna tímann niður á fyrsta degi. Þá er $u + n = 7$ og $2u + n/2 = 8$. Séu þessar jöfnur leystar saman fæst að $u = 3$ og $n = 4$. Á þriðja degi er tíminn upp $4u$ og tíminn niður $n/4$ og heildartíminn upp og niður því $4u + n/4 = 4 \cdot 3 + 4/4 = 13$.

Annar hluti

11. Í þríhyrningi ABC eru strikin DE og FG samsíða hlið AB. Hlutfallið milli fjarlægða frá hlið AB til striks FG annars vegar og frá striki FG til striks DE hinsvegar er $2 : 1$. Finnið flatarmál þríhyrnings FGC ef gefið er að flatarmál ABC er 32 cm^2 og flatarmál DEC er 2 cm^2.



Svar: 8.

Skýring: Táknum hæð þríhyrnings CDE með h og fjarlægð frá striki FG til striks DE með x. Þá er fjarlægðin frá hlið AB til striks FG jöfn $2x$. Þar sem $\frac{\text{Flatarmál } ABC}{\text{Flatarmál } DEC} = \left(\frac{\text{Hæð } ABC}{\text{Hæð } DEC}\right)^2$ þá gildir að $\frac{32}{2} = \left(\frac{h+3x}{h}\right)^2$ og því er $4 = 1 + 3 \cdot \frac{x}{h}$. Þá fæst að $x = h$. Hæð þríhyrnings FGC er því tvöföld hæð þríhyrnings DEC og þar með er flatarmál þríhyrnings FGC fjórfalt flatarmál þríhyrnings DEC, það er $4 \cdot 2 = 8$.

12. Ef n er jákvæð heiltala þá látum við $þ(n)$ tákna þversummu hennar. Til dæmis er $þ(138) = 12$ og $þ(2013) = 6$. Finnið summuna $þ(1)+þ(2)+þ(3)+\cdots+þ(100)$.

Svar: 901.

Skýring: Athugum fyrst að $þ(1)+þ(2)+þ(3)+\cdots+þ(9) = 45$. Athugum næst að ef a er heiltala, $1 \leq a \leq 9$ þá er summan $þ(a0)+þ(a1)+\cdots+þ(a9) = 10 \cdot a + 45$. Því fæst

$$\begin{aligned}
&þ(1) + þ(2) + þ(3) + \cdots + þ(100) \\
&\qquad = 45 + (10 + 45) + (20 + 45) + \cdots + (90 + 45) + þ(100) \\
&\qquad = 10 \cdot 45 + 10 \cdot 45 + 1 = 901
\end{aligned}$$

Ath: Önnur leið er að taka eftir að sérhver tölustafanna $1, 2, \ldots, 9$ kemur 10 sinnum fyrir í einingasætinu og 10 sinnum í tugasætinu. Svo summan er jöfn $20 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) + þ(100) = 20 \cdot 45 + 1 = 901$.

13. Táknum tölurnar $1, 2, 3, 4, 5$ með p, q, r, s, t nema hvað röðin má vera önnur (t.d. gæti verið að $p = 4$, $q = 2$, $r = 5$, $s = 3$ og $t = 1$). Látum

$$x = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t}}}}}$$

Gildin á p, q, r, s, t eru valin svo að x verði sem stærst. Hvaða gildi hefur t?

Svar: 3.

Skýring: Athugum fyrst að í hverju brotanna eru p, q, r og s heilöluhlutar nefnara. Til að brot verði sem stærst velur maður heiltöluhlutann sem minnstan; til að brot verði sem minnst velur maður heiltöluhlutann sem stærstan. Því velur maður p eins lítið og hægt er, q eins stórt og hægt er, r eins lítið og hægt er og s eins stórt og hægt er. Að þessu sögðu er valið ótvírætt. Fyrst $p = 1$ og $q = 5$. Þá $r = 2$ og $s = 4$. Þá verður $t = 3$.

14. Fall f er þannig að $f(x)+f(1-x) = 10$ fyrir allar rauntölur x. Hver er summan

$$f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \cdots + f\left(\frac{99}{100}\right) \ ?$$

Svar: 495.

Skýring: Athugum fyrst að ef $x = \frac{1}{100}$ þá er $1 - x = \frac{99}{100}$; ef $x = \frac{2}{100}$ þá er $1 - x = \frac{98}{100}$ o.s.frv. Með endurröðun fæst

$$\left[f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{100}\right) + f\left(\frac{98}{100}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{49}{100}\right) + f\left(\frac{51}{100}\right)\right] = 49 \cdot 10.$$

Einnig er $\left[f\left(\frac{50}{100}\right) + f\left(\frac{50}{100}\right)\right] = 10$ og því $f\left(\frac{50}{100}\right) = 5$. Heildarsumman sem spurt er um er því $49 \cdot 10 + 5 = 495$.

15. Finnið lausn (x, y) á jöfnunni $3x^2 = 3y^4 + 2013$ þar sem x og y eru jákvæðar heiltölur.

Svar: $(36, 5)$.

Skýring: Umritum jöfnuna og þáttum: $3(x - y^2)(x + y^2) = 2013$. Nú er $2013 = 3 \cdot 671$ og því er margfeldið $(x - y^2)(x + y^2) = 671 = 11 \cdot 61$, þar sem 11 og 61 eru frumþættir. Einn möguleiki er að $x - y^2 = 11$ og $x + y^2 = 61$ og þá er $x = 36$ og $y^2 = 25$, sem gefur lausnina $(x, y) = (36, 5)$.

Þetta er reyndar eina lausnin því að vegna $x - y^2 < x + y^2$ er aðeins einn annar möguleiki, $x - y^2 = 1$ og $x + y^2 = 671$, en þessar jöfnur gefa ekki heiltölulausn.

Þriðji hluti

16. Jafnan $x^2 + px + q = 0$ hefur lausnir r og s. Ritið summuna $r^3 + s^3$ með tilliti til p og q.

Lausn: Þar sem r og s eru rætur margliðunnar má rita

$$x^2 + px + q = (x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$$

Því fæst að $r + s = -p$ og $rs = q$. Nú er

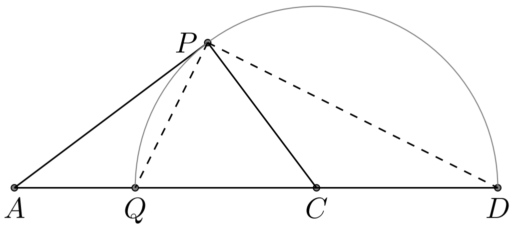
$$\begin{aligned} r^3 + s^3 = (r + s)(r^2 - rs + s^2) &= (r + s)\big((r + s)^2 - 3rs\big) \\ &= (-p)\big((-p)^2 - 3q\big) \\ &= 3pq - p^3. \end{aligned}$$

17. Punktar A, B, C, D eru, í þessari röð, á beinni línu. Punktur P utan línunnar er valinn þannig að eftirfarandi þremur skilyrðum er fullnægt:

(a) $\angle APC = 90°$,
(b) $|CP| = |CD|$ og
(c) $|AP|^2 = |AB| \cdot |AD|$.

Sýnið að hornið $\angle BPD$ sé rétt horn.

Lausn: Drögum hring með miðju í C og geisla (radíus) $|CD| = |CP|$. Táknum skurðpunkt hringsins við strikið AD með Q. Þar sem $\angle APC = 90° = \angle QPD$ þá gildir að $\angle APQ = \angle CPD = \angle PDA$ (vegna þess að þríhyrningur CPD er jafnarma) og því eru þríhyrningarnir AQP og APD einslaga. Því fæst jafnan $|AQ|/|AP| = |AP|/|AD|$ og þar með er $|AP|^2 = |AQ| \cdot |AD|$. Þá er $|AQ| = |AB|$ og því $Q = B$. Ferilhornið BPD spannar 180° boga og er því 90°.



Önnur lausn Drögum hring með miðju í C og geisla (radíus) $|CD| = |CP|$. Táknum skurðpunkt hringsins við strikið AD með Q. Þar sem $\angle APC = 90°$ þá er AP snertill við hringinn. Samkvæmt reglu um **veldi punkts við hring** gildir að $|AP|^2 = |AQ| \cdot |AD|$. Þá er $|AQ| = |AB|$ og því $Q = B$. Ferilhornið BPD spannar 180° boga og er því 90°.

18. Finnið allar rauntölur x, y og z þannig að $(x+1)yz = 12$, $(y+1)zx = 4$ og $(z+1)xy = 4$.

Lausn: Lítum á seinni tvær jöfnurnar: Þar sem

$$(y+1)zx = 4 = (z+1)xy$$

þá er $x \neq 0$ og $xyz + zx = xyz + xy$. Af því leiðir $xy = xz$ og þar með $y = z$. Þá má rita fyrstu tvær jöfnurnar á forminu

$$(x+1)y^2 = 12 \quad \text{og} \quad (y+1)yx = 4.$$

Þá fæst að $xy^2 + y^2 = 12$ og $xy^2 + xy = 4$ og því er $y^2 - xy = 8$. Þetta má rita $xy = y^2 - 8$ og innsetning í $(y+1)yx = 4$ gefur þá

$$(y+1)(y^2-8) = 4 \quad \text{eða} \quad y^3 + y^2 - 8y - 12 = 0$$

Margliðan $y^3 + y^2 - 8y - 12$ hefur rót $y = 3$ og þáttast því

$$y^3 + y^2 - 8y - 12 = (y-3)(y^2+4y+4) = (y-3)(y+2)^2.$$

Rauntölur x, y og z sem uppfylla allar þrjár jöfnur samtímis eru þá $y = z = 3$ og $x = 4/y(y+1) = 1/3$ annars vegar og $y = z = -2$ og $x = 4/y(y+1) = 2$ hins vegar.

19. Finnið allar rauntölur x þannig að $a = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$ sé heiltala.

Lausn: Við tökum fyrst eftir því að ef $x = -1/2$ þá er $a = 0$, sem er heiltala. Við tökum einnig eftir því að

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+3} = \frac{(2x+1)}{x^2+2+(2x+1)},$$

svo að ef $2x+1 > 0$ þá er teljarinn minni en nefnarinn að tölugildi og þar með er $0 < a < 1$ og því ekki heiltala.

Þá er eftir að skoða tilfellið $2x-1 < 0$. Til þess að a geti verið verið heiltala, ekki núll, þá þarf tölugildi teljarans að vera minnst jafnstórt og tölugildi nefnarans. Nú er nefnarinn alltaf jákvæður: $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 \geq 2$. Svo að

$$x^2+2x+3 \leq |2x+1| = -2x-1$$

og því $x^2+4x+4 \leq 0$. En $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ svo þetta getur aðeins gerst ef $x = -2$, sem gefur $a = (-3)/3 = -1$. Það eru því aðeins tvær rauntölur x þannig að a verði heiltala, $x = -1/2$ og $x = -2$.

Önnur lausn: Skrifum jöfnuna sem $2x+1 = a(x^2+2x+3)$ sem má umrita í

$$0 = ax^2 + (2a-2)x + (3a-1).$$

Ef $a = 0$ þá er þetta fyrsta stigs jafna $0 = -2x-1$ sem hefur lausnina $x = -1/2$. En ef $a \neq 0$ þá er þetta annars stigs jafna fyrir x sem hefur rauntölulausn einungis ef

$$\begin{aligned} 0 \leq (2a-2)^2 - 4a(3a-1) &= 4a^2 - 8a + 4 - 12a^2 + 4a \\ &= 4 - 4a - 8a^2 = 4(1-2a)(1+a) \end{aligned}$$

svo að $-1 \leq a \leq 1/2$. Einu heiltölurnar á þessu bili eru $a = 0$, sem við höfum þegar skoðað, og $a = -1$ sem gefur $0 = -x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2$ og því fæst líka heiltala ef $x = -2$.