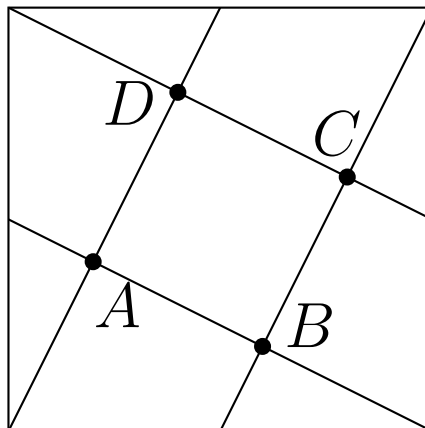


Íslenska stærðfræðafélagið  
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2013–2014

Svör og lausnir

Neðra stig



## Fyrsti hluti

1. Hvert er gildið á  $3^{x-2}$  ef  $3^x = 15$ ?

 1  $\frac{5}{3}$  5  $\frac{15}{2}$ 

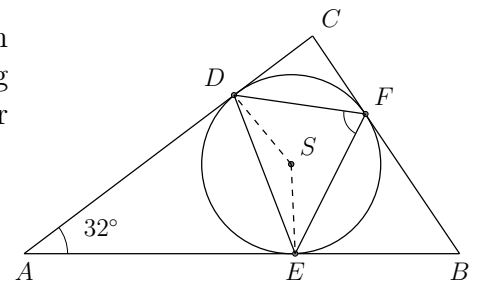
**Lausn:**  $3^{x-2} = 3^x \cdot 3^{-2} = \frac{3^x}{3^2} = \frac{15}{3^2} = \frac{5}{3}$ .

2. Á Geirsnefi er fólk á gangi með hundana sína. Á svæðinu eru 82 fætur og 26 höfuð alls. Hversu margir hundar eru á Geirsnefi?

 10 12 15 18

**Lausn:**  $26 \cdot 2 = 52$  fætur dekkja fætur mannfólks og afturfætur hunda. Þá eru eftir 30 fætur sem er fjöldi framfóta á  $30/2 = 15$  hundum.

3. Innritaður hringur í þríhyrning  $ABC$  hefur miðpunktinn  $S$  og snertir hliðar þríhyrningsins í punktum  $D$ ,  $E$  og  $F$  eins og sést á mynd. Ef hornið  $\angle CAB$  er  $32^\circ$  þá er hornið  $\angle EFD$

  $46^\circ$   $64^\circ$   $74^\circ$   $82^\circ$ 

**Lausn:** Þar sem hornin  $\angle ADS$  og  $\angle AES$  eru bæði  $90^\circ$  þá eru hornin  $\angle CAB$  og  $\angle DSE$  til samans  $180^\circ$ . Þá er  $\angle DSE = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$  og hornið  $\angle EFD$  því ferilhörn sem spannar  $148^\circ$  boga. Þá fæst að  $\angle EFD = 74^\circ$ .

4. Ef vara er seld fyrir  $x$  krónur er  $15\%$  tap á sölnni miðað við kostnað. Á hinn bóginn er  $15\%$  hagnaður af sölnni ef varan er seld fyrir  $y$  krónur. Hvert er hlutfallið  $\frac{y}{x}$ ?

  $\frac{23}{17}$   $\frac{17}{23}$   $\frac{13}{10}$  Er háð verði

**Lausn:** Ef kostnaðurinn er táknaður með  $K$  fæst að  $x = 0,85K$  og  $y = 1,15K$ .

Þá er  $\frac{y}{x} = \frac{1,15K}{0,85K} = \frac{115}{85} = \frac{23}{17}$ .

5. Ef tölunni  $x$  er bætt við bæði teljara og nefnara brotsins  $\frac{a}{b}$ , þar sem  $a \neq b \neq 0$  og útkoman verður  $\frac{c}{d}$  þá er  $x$  jafnt og

$\frac{ad - bc}{c - d}$ 
  $\frac{ad - bc}{c + d}$ 
  $\frac{bc - ac}{c - d}$ 
  $\frac{bc - ac}{c + d}$

**Lausn:** Gefið er að  $\frac{a+x}{b+x} = \frac{c}{d}$ . Þá er  $d(a+x) = c(b+x)$  og því  $ad - bc = (c-d)x$ .

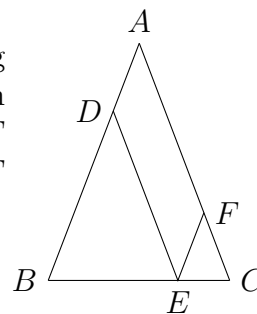
Þá er  $x = \frac{ad - bc}{c - d}$

6. Gunnar, Fanney og Bergur fóru saman í helgarferð. Þau ákváðu að skipta kostnaðinum jafnt. Í ferðinni borgaði Gunnar 10500 kr., Fanney 12500 kr. og Bergur 17500 kr. Til að jafna út kostnaðinn þá lét Gunnar Berg fá  $x$  krónur og Fanney lét Berg fá  $y$  krónur. Hvert er gildið á  $x - y$ ?

1500
  2000
  2500
  3000

**Lausn:** Eftir leiðréttingu borgar Gunnar  $10500 + x$  og Fanney  $12500 + y$ . Þá er  $10500 + x = 12500 + y$ , svo  $x - y = 2000$ .

7. Í jafnarma þríhyrningi  $ABC$  er  $AB = AC = 28$  cm og  $BC = 20$  cm. Punktarnir  $D$ ,  $E$  og  $F$  eru á hliðunum  $AB$ ,  $BC$  og  $AC$  þannig að  $DE$  er samsíða  $AC$  og  $EF$  er samsíða  $AB$ . Hvert er ummál samsíðungsins  $ADEF$  í cm?



48
  52
  56
  60

**Lausn:** Þríhyrningurinn  $EFC$  er jafnarma og því  $|EF| = |FC|$ . Að auki er  $|DE| = |AF|$ . Ummál samsíðungsins er  $2 \cdot (|DE| + |EF|) = 2 \cdot (|AF| + |FC|) = 2 \cdot |AC| = 56$ .

8. Skilgreinum aðgerð  $a * b = \frac{a}{a+b}$ . Gefið er að  $s * t = 5$ , hvert er gildið á  $t * s$ ?

-5
  -4
  3
  2

**Lausn:**  $5 = \frac{s}{s+t} = \frac{s+t-t}{s+t} = 1 - \frac{t}{s+t}$ . Því er  $t * s = -4$ .

9. Ef geisli (radíus) hringis er tvöfaldaður þá eykst flatarmál hringisins um

250%       300%       350%       400%

**Lausn:** Flatarmálið eykst úr  $\pi \cdot r^2$  í  $\pi \cdot (2r)^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ . Flatarmálið fjórfaldast og hefur því aukist um 300%.

10. Geimflug flýgur frá jörðu að plánetu í  $2^{20}$  km fjarlægð. Eftir fjórðung leiðarinnar missir geimflugin talstöðvarsamband við jörðu og nær aftur talstöðvarsambandi þegar geimflugin er  $2^{19}$  km fjarlægð frá jörðu. Hversu marga kílómetra flaug geimflugin án talstöðvarsambands við jörðu?

$2^8$  km        $2^9$  km        $2^{10}$  km        $2^{18}$  km

**Lausn:** Geimflugin hefur ferðast  $2^{20}/4 = 2^{20}/2^2 = 2^{18}$  km þegar talstöðvarsamband við jörðu rofnar. Þar sem talstöðvarsambandkemst aftur á í fjarlægð  $2^{19}$  km frá jörðu þá flýgur geimflugin  $2^{19} - 2^{18}$  km án talstöðvarsambands;  $2^{19} - 2^{18} = 2^{18}(2 - 1) = 2^{18}$ .

## Annar hluti

11. Milli kl. 14.00 og kl. 15.00 falla stóri og litli vísir saman. Þá er klukkan næst því að vera

14.09       14.10       14.11       14.12       14.13

**Lausn:** Á 60 mínútum fer stóri vísirinn einn heilan hring og snýst því um  $6^\circ$  á hverri mínútu. Á sama tíma snýst litli vísirinn frá 2 til 3, um  $30^\circ$  og snýst því um  $(1/2)^\circ$  á mínútu. Jafnan  $S = 6^\circ t$  lýsir því staðsetningu stóra vísis á hverri mínútu  $t$  og jafnan  $s = 60^\circ + (1/2)^\circ t$  lýsir staðsetningu litla vísis. Vísarnir falla saman þegar  $6t = 60 + (1/2)t$ . Lausnin er  $t = 120/11 \approx 10,9$  sem þýðir að um 11 mínútur hafa liðið.

12. Þrjú eins teningar eru gerðir úr mynstrinu sem sýnt er. Teningunum er raðað í þriggja hæða turn þannig að þær 13 tölur sem sjást hafi sem stærsta summu. Hver er sú summa?

		6	
1	2	32	16
		8	

154       159       166       167       189

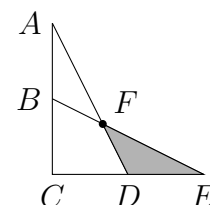
**Lausn:** Aðeins 4 hliðar sjást á neðri teningunum tveimur. Stærsta sýnilega summa hvors tenings er  $1 + 32 + 2 + 16 = 51$ . Á efsta teningi sjást 5 hliðar og stærsta sýnilega summa þess tenings er  $32 + 2 + 16 + 6 + 8 = 64$ . Stærsta sýnilega summa teninganna þriggja er því  $2 \cdot 51 + 64 = 166$ .

13. Sigríður fer nokkrum sinnum á dag til Sveins gjaldkera með reikninga. Hún lætur reikning alltaf efst í staflann hjá Sveini. Þegar Sveinn hefur tíma tekur hann efsta reikninginn í staflanum og afgreiðir hann. Einn daginn eru reikningarnir fimm og Sigríður kemur með þá í röðinni 1, 2, 3, 4, 5. Í hvaða röð gæti Sveinn ekki hafa afgreitt reikningana?

1,2,3,4,5   
  2,4,3,5,1   
  3,2,4,1,5   
  4,5,2,3,1   
  5,4,3,2,1

**Lausn:** Ef Sveinn afgreiðir reikning 4 fyrst og reikning 5 svo, þá hefur Sigríður komið með reikning 5 á meðan Sveinn vann í reikningi fjögur. Reikningar 1–3 hafa því þegar verið í bunka Sveins og geta því aðeins hafa verið afgreiddir í röðinni 3, 2 og 1 en ekki 2, 3 og 1.

14. Strikin  $AC$  og  $CE$  eru bæði 30 cm og mynda rétt horn.  $D$  er miðpunktur  $CE$  og  $B$  er miðpunktur  $AC$ . Strikin  $AD$  og  $BE$  skerast í punkti  $F$ . Hvert er flatarmál þríhyrnings  $DEF$ ?



50   
   $50\sqrt{2}$    
  75   
   $\frac{15}{2}\sqrt{105}$    
  100

**Lausn:** Þar sem  $D$  er miðpunktur striksins  $CE$  þá hafa þríhyrningar  $DEF$  og  $CDF$  sama flatarmál. Vegna samhverfu eru þríhyrningar  $CFD$  og  $CFB$  eins. Því er flatarmál  $DEF$  þriðjungur af flatarmáli þríhyrnings  $CEB$  sem er  $30 \cdot 15/2 = 15^2$ . Flatarmál  $DEF$  er því  $15^2/3 = 75$ .

15. Jörmunrekur þarf að ýta þungum steinum upp á fjall, einum steini á hverjum degi. Fyrsta daginn tekur það 7 tíma að ýta steininum upp og labba niður. Næstu daga fer hann hvern dag helmingi hægar upp fjallið en daginn á undan og tvöfalt hraðar niður en daginn á undan. Ef hann þarf 8 tíma til að fara upp og niður á öðrum degi, hvað þarf hann þá marga tíma á þriðja degi?

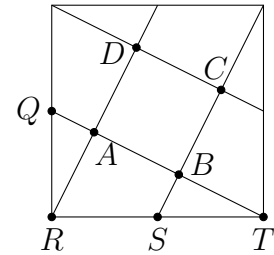
7   
   $8\frac{1}{2}$    
  9   
   $10\frac{1}{4}$    
  13

**Lausn:** Látum  $u$  tákna tímann upp og  $n$  tákna tímann niður á fyrsta degi. Þá er  $u + n = 7$  og  $2u + n/2 = 8$ . Séu þessar jöfnur leystar saman fæst að  $u = 3$  og  $n = 4$ . Á þriðja degi er tíminn upp  $4u$  og tíminn niður  $n/4$  og heildartíminn upp og niður því  $4u + n/4 = 4 \cdot 3 + 4/4 = 13$ .

## Priðji hluti

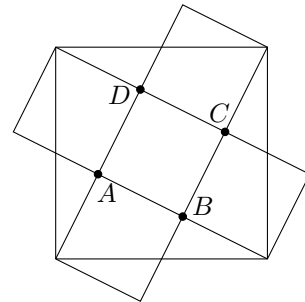
16. Ferningur hefur hliðarlengdir 1. Frá hverjum hornpunkti er dregið strik að miðpunkti hliðar, eins og sýnt er á mynd. Hvert er flatarmál ferhyrningsins  $ABCD$ ?

Svar:  $1/5$ .



**Skýring:** Þar sem  $S$  er miðpunktur  $RT$  þá er flatarmál  $BST$  einn fjórði af flatarmáli  $ART$ . Einnig er flatarmál  $BST$  jafnt flatarmáli  $AQR$ . Þá fæst að flatarmál  $BST$  er einn fimmti af flatarmáli  $QRT$ . Nú er flatarmál  $QRT$  jafnt  $(1/2) \cdot 1 \cdot (1/2) = 1/4$  og því er flatarmál  $BST$  jafnt  $1/20$ . Þar sem flatarmál stóra ferningsins er jafnt flatarmáli  $ABCD$  að viðbættu fjórföldu flatarmáli  $ART$  fæst að flatarmál  $ABCD$  er  $1 - 4 \cdot (4/20) = 4/20 = 1/5$ .

**Önnur leið:** Svo má einfaldlega sjá þetta með því að mynda fimm eins ferninga eins og sýnt er hér til hliðar og taka eftir því að litlu þríhyrningarnir utan við ferninginn eru eins þeir litlu inni í honum, vegna samhverfu.



17. Ef  $n$  er jákvæð heiltala þá látum við  $p(n)$  tákna þversummu hennar. Til dæmis er  $p(138) = 12$  og  $p(2013) = 6$ . Finnið summuna  $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100)$ .

Svar: 901.

**Skýring:** Athugum fyrst að  $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(9) = 45$ . Athugum næst að ef  $a$  er heiltala,  $1 \leq a \leq 9$  þá er summan  $p(a0) + p(a1) + \dots + p(a9) = 10 \cdot a + 45$ . Því fæst

$$\begin{aligned} p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100) \\ &= 45 + (10 + 45) + (20 + 45) + \dots + (90 + 45) + p(100) \\ &= 10 \cdot 45 + 10 \cdot 45 + 1 = 901 \end{aligned}$$

**Ath:** Önnur leið er að taka eftir að sérhver tölustafanna  $1, 2, \dots, 9$  kemur 10 sinnum fyrir í einingasætinu og 10 sinnum í tugasætinu. Svo summan er jöfn  $20 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) + p(100) = 20 \cdot 45 + 1 = 901$ .

18. Vatnsdæla fyllir tank á 12 klst. Ef opnað er fyrir niðurfall þá tæmist tankurinn á 20 klst. Hversu langan tíma tekur að fylla tankinn ef niðurfallið opnast óvart þegar tankurinn er hálf-fullur?

**Svar:** 21 klst.

**Skýring:** Dælan fyllir tankinn sem nemur  $1/12$  á klst. og niðurfallið tæmir tankinn sem nemur  $1/20$  á klst. Ef niðurfallið er opið þegar dælan vinnur þá fyllist tankurinn sem nemur  $1/12 - 1/20 = 1/30$  á klst. Dælan hefur unnið í 6 klst. þegar niðurfallið opnast og þá tekur 15 klst. að ljúka fyllingu. Það tekur því 21 klst. að fylla tankinn.

19. Táknum tölurnar 1, 2, 3, 4, 5 með  $p, q, r, s, t$  nema hvað röðin má vera önnur (t.d. gæti verið að  $p = 4, q = 2, r = 5, s = 3$  og  $t = 1$ ). Látum

$$x = \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s + \frac{1}{t}}}}}$$

Gildin á  $p, q, r, s, t$  eru valin svo að  $x$  verði sem stærst. Hvaða gildi hefur  $t$ ?

**Svar:** 3.

**Skýring:** Athugum fyrst að í hverju brotanna eru  $p, q, r$  og  $s$  heilöluhlutar nefnara. Til að brot verði sem stærst velur maður heiltöluhlutann sem minnstan; til að brot verði sem minnst velur maður heiltöluhlutann sem stærstan. Því velur maður  $p$  eins lítið og hægt er,  $q$  eins stórt og hægt er,  $r$  eins lítið og hægt er og  $s$  eins stórt og hægt er. Að þessu sögðu er valið ótvírætt. Fyrst  $p = 1$  og  $q = 5$ . Þá  $r = 2$  og  $s = 4$ . Þá verður  $t = 3$ .

20. Finnið lausn  $(x, y)$  á jöfnunni  $3x^2 = 3y^4 + 2013$  þar sem  $x$  og  $y$  eru jákvæðar heiltölur.

**Svar:** (36, 5).

**Skýring:** Umritum jöfnuna og þáttum:  $3(x - y^2)(x + y^2) = 2013$ . Nú er  $2013 = 3 \cdot 671$  og því er margfeldið  $(x - y^2)(x + y^2) = 671 = 11 \cdot 61$ , þar sem 11 og 61 eru frumbættir. Einn möguleiki er að  $x - y^2 = 11$  og  $x + y^2 = 61$  og þá er  $x = 36$  og  $y^2 = 25$ , sem gefur lausnina  $(x, y) = (36, 5)$ .

Þetta er reyndar eina lausnin því að vegna  $x - y^2 < x + y^2$  er aðeins einn annar möguleiki,  $x - y^2 = 1$  og  $x + y^2 = 671$ , en þessar jöfnur gefa ekki heiltölulausn.

## Fjórði hluti

21. Jafnan  $x^2 + px + q = 0$  hefur lausnir  $r$  og  $s$ . Ritið summuna  $r^3 + s^3$  með tilliti til  $p$  og  $q$ .

**Lausn:** Þar sem  $r$  og  $s$  eru rætur margliðunnar má rita

$$x^2 + px + q = (x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$$

Því fæst að  $r + s = -p$  og  $rs = q$ . Nú er

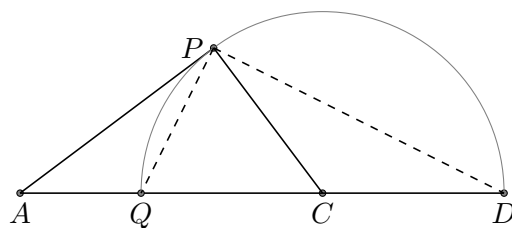
$$\begin{aligned} r^3 + s^3 &= (r + s)(r^2 - rs + s^2) = (r + s)((r + s)^2 - 3rs) \\ &= (-p)((-p)^2 - 3q) \\ &= 3pq - p^3. \end{aligned}$$

22. Punktar  $A, B, C, D$  eru, í þessari röð, á beinni línu. Punktur  $P$  utan línunnar er valinn þannig að eftirfarandi þremur skilyrðum er fullnægt:

- $\angle APC = 90^\circ$ ,
- $|CP| = |CD|$  og
- $|AP|^2 = |AB| \cdot |AD|$ .

Sýnið að hornið  $\angle BPD$  sé rétt horn.

**Lausn:** Drögum hring með miðju í  $C$  og geisla (radíus)  $|CD| = |CP|$ . Táknum skurðpunkt hringins við strikið  $AD$  með  $Q$ . Þar sem  $\angle APC = 90^\circ = \angle QPD$  þá gildir að  $\angle APQ = \angle CPD = \angle PDA$  (vegna þess að þríhyrningur  $CPD$  er jafnarma) og því eru þríhyrningarnir  $AQP$  og  $APD$  einslaga. Því fæst jafnan  $|AQ|/|AP| = |AP|/|AD|$  og þar með er  $|AP|^2 = |AQ| \cdot |AD|$ . Þá er  $|AQ| = |AB|$  og því  $Q = B$ . Ferilhornið  $BPD$  spannar  $180^\circ$  boga og er því  $90^\circ$ .



**Önnur lausn** Drögum hring með miðju í  $C$  og geisla (radíus)  $|CD| = |CP|$ . Táknum skurðpunkt hringins við strikið  $AD$  með  $Q$ . Þar sem  $\angle APC = 90^\circ$  þá er  $AP$  snertill við hringinn. Samkvæmt reglu um **veldi punkts við hring** gildir að  $|AP|^2 = |AQ| \cdot |AD|$ . Þá er  $|AQ| = |AB|$  og því  $Q = B$ . Ferilhornið  $BPD$  spannar  $180^\circ$  boga og er því  $90^\circ$ .