

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2009-2010 Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar og er hver spurning þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Adda er með poka sem í eru 7 bláar kúlur, 4 hvítar og 3 rauðar. Hversu margar kúlur, að lágmarki, þarf hún að veiða upp úr pokanum til að vera viss um að hafa örugglega minnst eina kúlu í hverjum lit, ef hún er með lokuð augun á meðan hún veiðir?

 3

 8

 11

 12

2. Maður nokkur er staddur á sléttu torgi þar sem eina ljósið kemur frá ljósastaur á miðju torginu. Hæð mannsins er 180 cm og hann stendur í 150 cm fjarlægð frá ljósastaurnum. Hversu langur er skuggi mannsins ef ljósaperan í ljósastaurnum er í 480 cm hæð?

 70 cm

 90 cm

 100 cm

 120 cm

3. Allir Marsbúar hafa einn, tvo eða þrjá fálmara. Nákvæmlega 1% fjöldans hefur þrjá fálmara, nákvæmlega 97% hafa tvo fálmara, en afgangurinn hefur einn fálmara. Hvert er hlutfall þeirra Marsbúa sem hafa fleiri fálmara en Marsbúar hafa að meðaltali?

 1%

 3%

 98%

 99%

4. Gefið er að $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$ þar sem x og y eru heilar tölur. Hvert er gildi x ?

 -1

 0

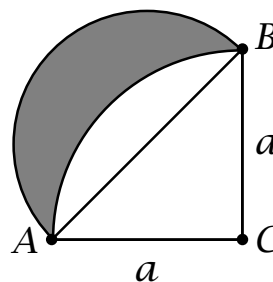
 2

 3

5. Rétthyrndur kassi hefur yfirborðsflatarmál A og rúmmál V . Framhlið kassans hefur flatarmál A_f , hægri hlið hefur flatarmál A_h og topphliðin hefur flatarmálið A_t . Þá er margfeldið $A_f \cdot A_h \cdot A_t$ jafnt og

 $2V$
 A^2
 V^2
 $A \cdot V$

6. Jafnarma rétthyrndur þríhyrningur ABC hefur skammhliðar af lengd a . Hornið C er rétt. Fjórðungur úr hring með miðju C og geisla a er dreginn frá A til B . Hálfhringur með miðstreng AB er einnig dreginn frá A til B . Hvert er flatarmál skyggða svæðisins sem hringbogarnir tveir afmarka?



$\frac{\pi a^2}{2}$

$\frac{\pi a^2}{4}$

$\frac{a^2}{2}$

$\frac{a^2}{4}$

7. Vara nokkur kostaði 500 krónur. Nú hefur hún hækkað um 2009%. Hvað kostar varan nú?

kr. 9545

kr. 10045

kr. 10095

kr. 10545

8. Ein, eða fleiri, eftirtalinna ójafna er rétt fyrir allar jákvæðar rauntölur a og b ?

(1) $a^2 + b^2 \geq a + b$ (2) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (3) $a^2 + b^2 \geq ab$ (4) $a^3 + b^3 \geq ab$

Hver eftirfarandi svarmöguleika er réttur?

Aðeins ójöfnur (2) og (3) eru réttar.

Aðeins ójöfnur (2), (3) og (4) eru réttar.

Aðeins ójafna (2) er rétt.

Aðeins ójafna (4) er rétt.

9. m og n eru jákvæðar heiltölur þannig að $m \cdot n = 40\,000$. Ef hvorug talnanna er deilanleg með 10 hver er summan $m + n$?

650

660

689

691

10. Hvað hefur jafnan $((x^2 - 2)^2 - 5)^2 = 1$ margar ólíkar rauntölulausnir?

4

5

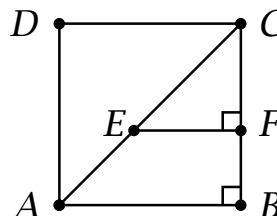
6

7

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt, ófullkomið eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Ferningur $ABCD$ hefur hliðarlengd 1m. Punktur E er valinn á hornalínunni AC og punktur F er valinn á hliðinni BC . Ef $AE = EF$ og EF er samsíða AB hver er lengd AE ?



Svar: _____

12. 17. júní árið 2345 verður mikill hátíðar- og merkisdagur. Dagsetninguna má skrifa:

17 06 2345

þ.e.a.s. með átta tölustöfum sem allir eru mismunandi. Hvenær var síðast slíkur dagur, sem á þennan hátt má skrifa með átta mismunandi tölustöfum?

Svar: _____

13. Höskuldur og Eyvindur leggja samtímis af stað hlaupandi. Höskuldur hleypur frá A til B en Eyvindur hleypur frá B til A . Þeir fara eftir sömu braut, hvor um sig á jöfnum hraða. Þeir mætast í C á milli A og B . Á því augnabliki á Höskuldur eftir 16 mínútna hlaup að B en Eyvindur á eftir 25 mínútna hlaup að A . Hvert er hlutfall hraða þeirra?

Svar: _____

14. Fimm grunaðir bankaræningjar, ræninginn þar á meðal, eru yfirheyrðir af lög-reglu. Samkvæmt lygaprófi segja tveir grunaðra ósatt en þrír segja satt.

A: „D rændi bankann“

B: „Ég er saklaus“

C: „E er saklaus“

D: „A skrökvar“

E: „B segir satt“

Ef lygaprófið er áreiðanlegt, hver er bankaræninginn?

Svar: _____

15. Fyrir hversu margar jákvæðar oddatölur minni en 1000 er margfeldi tölustafa tölunnar jafnt 252?

Svar: _____

Þriðji hluti

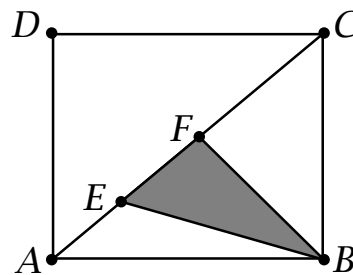
Í þessum hluta eru fjögur dæmi. Hvert dæmi er tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Gólfíð í réttthyrndu herbergi er flísalagt með ferningslaga flísum, sem allar eru jafnstórar en í tveimur mismunandi litum. Allar flísarnar meðfram veggjunum eru rauðar, en þær sem ekki liggja að vegg eru allar hvítar. Ef það eru jafnmargar rauðar og hvítar flísar, hversu margar eru flísarnar samtals? Finnið öll möguleg svör.

17. Flatarmál rétthyrnings $ABCD$ er 30. Punktar E og F eru valdir á hornalínunni AC þannig að

$$2(AE + FC) = 3EF.$$

Hvert er flatarmál þríhyrningsins BEF ?



18. Finnið lausn, í jákvæðum heiltölum x og y , á jöfnunni

$$2x + 9y = 2009$$

þannig að munurinn á milli x og y sé eins lítil og mögulegt er.

19. Rétthyrningur $ABCD$ hefur tvær hliðar, AD og BC af lengd 21. Punktur F er á hlið BC og punktur E er á hlið CD . Ef $AB = AE$, $CE = CF$ og $FB = FE$ hver er lengd hliðar AB ?