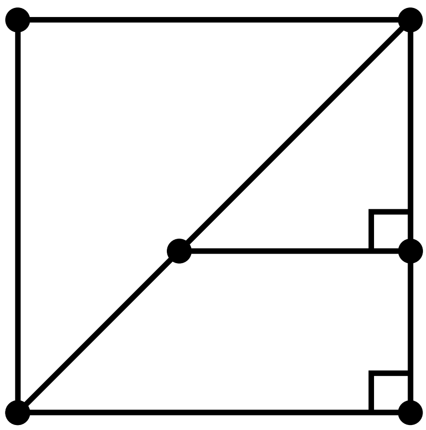
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

# Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2009-2010

## Svör og lausnir

## Efra stig



Íslandsbanki styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

## Fyrsti hluti

**1.** Adda er með poka sem í eru 7 bláar kúlur, 4 hvítar og 3 rauðar. Hversu margar kúlur, að lágmarki, þarf hún að veiða upp úr pokanum til að vera viss um að hafa örugglega minnst eina kúlu í hverjum lit, ef hún er með lokuð augun á meðan hún veiðir?

☐ 3 ☐ 8 ☐ 11 ☒ 12

**Skýring:** Í versta tilfelli getur Adda verið svo óheppin að veiða fyrst allar bláu kúlurnar og svo allar hvítu kúlurnar áður en hún veiðir rauða kúlu. Ef svo, þá veiðir hún fyrstu rauðu kúluna í 12. skipti.

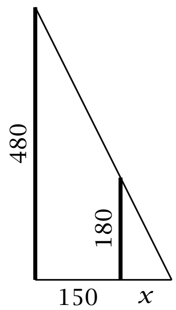
**2.** Maður nokkur er staddur á sléttu torgi þar sem eina ljósið kemur frá ljósastaur á miðju torginu. Hæð mannsins er 180 cm og hann stendur í 150 cm fjarlægð frá ljósastaurnum. Hversu langur er skuggi mannsins ef ljósaperan í ljósastaurnum er í 480 cm hæð?

☐ 70 cm ☒ 90 cm ☐ 100 cm ☐ 120 cm

**Skýring:** Við teiknum mynd og fáum tvo einslaga þríhyrninga og notum okkur að hlutfall tilsvarandi hliða er fasti. Táknum lengd skuggans með $x$.

$$\frac{x}{180} = \frac{x+150}{480}.$$

Lausn jöfnunnar er $x = 90$. Skuggi mannsins er því 90 cm.




**3.** Allir Marsbúar hafa einn, tvo eða þrjá fálmara. Nákvæmlega 1% fjöldans hefur þrjá fálmara, nákvæmlega 97% hafa tvo fálmara, en afgangurinn hefur einn fálmara. Hvert er hlutfall þeirra Marsbúa sem hafa fleiri fálmara en Marsbúar hafa að meðaltali?

☐ 1% ☐ 3% ☒ 98% ☐ 99%

**Skýring:** Við megum gera ráð fyrir að fjöldi Marsbúa sé 100. Þá er 1 með þrjá fálmara, 97 með tvo og því 2 með einn fálmara. Meðalfjöldi fálmara á Marsbúa er því

$$\frac{1\cdot 3 + 97\cdot 2 + 2\cdot 1}{100} = \frac{3+194+2}{100} = \frac{199}{100} = 1{,}99$$

Fjöldi marsbúa með fleiri en 1,99 fálmara er þá fjöldi þeirra sem hafa 2 eða 3 fálmara, þ.e.a.s. 98.

**4.** Gefið er að $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$ þar sem $x$ og $y$ eru heilar tölur. Hvert er gildi $x$?

☐ $-1$ ☐ 0 ☐ 2 ☒ 3

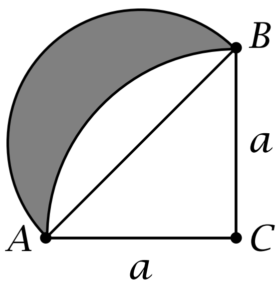
**Skýring:** Þáttum fyrst vinstri hliðina, $2^{x+1} + 2^x = 2^x(2+1) = 2^x \cdot 3$, og síðan þá hægri, $3^{y+2} - 3^y = 3^y(3^2 - 1) = 3^y \cdot 8 = 3^y \cdot 2^3$. Gefna jafnan er því jafngild $2^x \cdot 3 = 3^y \cdot 2^3$ og af því ályktum við að $x = 3$ og $y = 1$, vegna þess að 2 og 3 eru frumtölur og heila tölu má þátta í frumþætti á aðeins einn hátt.

**5.** Rétthyrndur kassi hefur yfirborðsflatarmál $A$ og rúmmál $V$. Framhlið kassans hefur flatarmál $A_f$, hægri hlið hefur flatarmál $A_h$ og topphliðin hefur flatarmálið $A_t$. Þá er margfeldið $A_f \cdot A_h \cdot A_t$ jafnt og

☐ $2V$ ☐ $A^2$ ☒ $V^2$ ☐ $A \cdot V$

**Skýring:** Ef breidd kassans er $x$, dýpt hans er $y$ og hæð hans er $z$, þá er $A_f = xz$, $A_h = yz$ og $A_t = xy$, svo að $A_f \cdot A_h \cdot A_t = xz \cdot yz \cdot xy = (xyz)^2 = V^2$. (Ath: Þetta er líka eina svarið þar sem mælieiningin passar, það er lengd í sjötta veldi.)

**6.** Jafnarma rétthyrndur þríhyrningur $ABC$ hefur skammhliðar af lengd $a$. Hornið $C$ er rétt. Fjórðungur úr hring með miðju $C$ og geisla $a$ er dreginn frá $A$ til $B$. Hálfhringur með miðstreng $AB$ er einnig dreginn frá $A$ til $B$. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins sem hringbogarnir tveir afmarka ?




☐ $\frac{\pi a^2}{2}$ ☐ $\frac{\pi a^2}{4}$ ☒ $\frac{a^2}{2}$ ☐ $\frac{a^2}{4}$

**Skýring:** Flatarmál skyggða svæðisins má skrifa sem summu

$$\text{hálfdiskur} - \text{fjórðungsdiskur} + \text{þríhyrningur}$$

þar sem hálfdiskurinn er með miðstreng $AB$ af lengd $a\sqrt{2}$, fjórðungsdiskurinn hefur radíus $a$ og þríhyrningurinn er rétthyrndur með skammhliðar $a$. Flatarmál skyggða svæðisins er því

$$\left[\frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{4} \cdot \pi a^2\right] + \left[\frac{1}{2} a^2\right] = \frac{1}{2} a^2$$

**7.** Vara nokkur kostaði 500 krónur. Nú hefur hún hækkað um 2009%. Hvað kostar varan nú?

☐ kr. 9545 ☐ kr. 10045 ☐ kr. 10095 ☒ kr. 10545

**Skýring:** Verð vörunnar eftir hækkun er

$$500 + 500 \cdot \frac{2009}{100} = 10545$$

**8.** Ein, eða fleiri, eftirtalinna ójafna er rétt fyrir allar jákvæðar rauntölur $a$ og $b$?
(1) $a^2 + b^2 \geq a + b$ (2) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (3) $a^2 + b^2 \geq ab$ (4) $a^3 + b^3 \geq ab$
Hver eftirfarandi svarmöguleika er réttur?

☒ Aðeins ójöfnur (2) og (3) eru réttar.
☐ Aðeins ójöfnur (2), (3) og (4) eru réttar.
☐ Aðeins ójafna (2) er rétt.
☐ Aðeins ójafna (4) er rétt.

**Skýring:** Ójafna (2) er rétt fyrir allar rauntölur $a$ og $b$, vegna þess að hún er jafngild $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ sem aftur jafngildir $(a-b)^2 \geq 0$. Fyrir jákvæðar rauntölur er ójafna (3) líka rétt, því þá er $ab \geq 0$, svo að $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq ab$. Ójöfnur (1) og (4) eru hins vegar ekki endilega réttar fyrir jákvæðar rauntölur og til dæmis gilda þær ekki fyrir $a = b = 1/2$.

**9.** $m$ og $n$ eru jákvæðar heiltölur þannig að $m \cdot n = 40\,000$. Ef hvorug talnanna er deilanleg með 10 hver er summan $m + n$?

☐ 650 ☐ 660 ☒ 689 ☐ 691

**Skýring:** Töluna 40 000 má skrifa sem margfeldi $2^2 \cdot 10^4 = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 2^6 \cdot 5^4$. Við höfum því að $m \cdot n = 2^6 \cdot 5^4$. Þar sem hvorug talnanna $m$ og $n$ er deilanleg með 10 þá verður önnur þeirra að vera eingöngu margfeldi af 2 og hin eingöngu margfeldi af 5. Summan er því

$$2^6 + 5^4 = 64 + 625 = 689$$

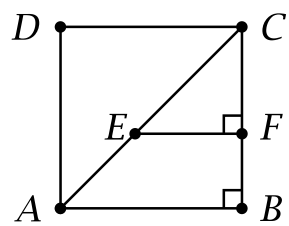
**10.** Hvað hefur jafnan $\left((x^2-2)^2 - 5\right)^2 = 1$ margar ólíkar rauntölulausnir?

☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7

**Skýring:** Við drögum kvaðratrætur og forðumst neikvæð önnur veldi. Þegar kvaðratrót hefur verið dregin einu sinni fæst $(x^2-2)^2 = 6$ eða $(x^2-2)^2 = 4$. Drögum kvaðratrót aftur og fáum að $x^2 = 2 \pm \sqrt{6}$ eða $x^2 = 2 \pm 2$. Fyrri jafnan gefur tvær rauntölulausnir ef hægri hliðin er $2 + \sqrt{6}$ ($x = \pm\sqrt{2+\sqrt{6}}$), en í hinu tilfellinu fást engar rauntölulausnir vegna þess að $2 - \sqrt{6} < 0$. Seinni jafnan leiðir til rauntölulausna hvort heldur sem hægri hlið er $2 + 2 = 4$ eða $2 - 2 = 0$. Í fyrra tilfellinu eru lausnirnar tvær ($x = \pm 2$) og í seinna tilfellinu er aðeins ein lausn ($x = 0$). Heildarfjöldi rauntölulausna er því 5.

## Annar hluti

**11.** Ferningur $ABCD$ hefur hliðarlengd 1m. Punktur $E$ er valinn á hornalínunni $AC$ og punktur $F$ er valinn á hliðinni $BC$. Ef $AE = EF$ og $EF$ er samsíða $AB$ hver er lengd $AE$?




**Svar:** $(2 - \sqrt{2})$ m

**Skýring:** Lengd hornalínu í ferningi er jöfn hliðarlengd margfaldaðri með $\sqrt{2}$, svo að $AC = \sqrt{2}$ m. Látum $x = AE = EF$, en þá er líka $CF = x$ vegna þess að þríhyrningurinn $EFC$ er jafnarma með 45° horn í bæði $E$ og $C$. Af því leiðir að $EC = x\sqrt{2}$ og þar með $AC = AE + EC = x + x\sqrt{2} = x(1+\sqrt{2})$. Svo að

$$x = \frac{\sqrt{2}\ \mathrm{m}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\ \mathrm{m} = (2-\sqrt{2})\ \mathrm{m}.$$

**12.** 17. júní árið 2345 verður mikill hátíðar- og merkisdagur. Dagsetninguna má skrifa:

17 06 2345

þ.e.a.s. með átta tölustöfum sem allir eru mismunandi. Hvenær var síðast slíkur dagur, sem á þennan hátt má skrifa með átta mismunandi tölustöfum?

**Svar:** 25. júní 1987 (sem skrifast 25 06 1987)

**Skýring:** Slíkur dagur verður að hafa verið á síðustu öld. Síðasta ártal með mismunandi tölustöfum er 1987. Síðasti mögulegi mánuðurinn sem ekki notar neinn af þessum fjórum tölustöfum er 06 (júní) og síðasti mögulegi dagurinn í þeim mánuði er 25. Dagurinn sem við leitum að er því 25 06 1987.

**13.** Höskuldur og Eyvindur leggja samtímis af stað hlaupandi. Höskuldur hleypur frá $A$ til $B$ en Eyvindur hleypur frá $B$ til $A$. Þeir fara eftir sömu braut, hvor um sig á jöfnum hraða. Þeir mætast í $C$ á milli $A$ og $B$. Á því augnabliki á Höskuldur eftir 16 mínútna hlaup að $B$ en Eyvindur á eftir 25 mínútna hlaup að $A$. Hvert er hlutfall hraða þeirra?

**Svar:** 5:4

**Skýring:** Látum $v_H$ tákna hraða Höskuldar, $v_E$ hraða Eyvindar og $t$ fjölda mínútna sem líða þar til þeir mætast. Þá gildir að

$$v_H \cdot t = v_E \cdot 25 \qquad \text{og} \qquad v_E \cdot t = v_H \cdot 16$$

þ.e. vegalengdin sem Höskuldur hleypur áður en þeir mætast er sú sama og Eyvindur hleypur eftir að þeir mætast, og öfugt. Þá fæst

$$\frac{v_H}{v_E} = \frac{25}{t} = \frac{t}{16} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 16 \cdot 25 = 400 \quad \Rightarrow \quad t = 20$$

og því er $v_H/v_E = 25/20 = 5/4$.

**14.** Fimm grunaðir bankaræningjar, ræninginn þar á meðal, eru yfirheyrðir af lögreglu. Samkvæmt lygaprófi segja tveir grunaðra ósatt en þrír segja satt.

A: „D rændi bankann“ B: „Ég er saklaus“ C: „E er saklaus“
D: „A skrökvar“ E: „B segir satt“

Ef lygaprófið er áreiðanlegt, hver er bankaræninginn?

**Svar:** E

**Skýring:** Ef D segir satt þá segir A ósatt og öfugt, svo að annar þeirra hlýtur að vera að segja satt en hinn ósatt. Síðan eru bæði B og E að segja satt eða báðir að segja ósatt. Ef báðir eru að segja ósatt þá eru a.m.k. þrír sem ljúga, sem gengur ekki. Því eru B og E að segja satt og C hlýtur að vera seinni lygarinn. Bankaræninginn er því E (og B, D og E segja satt en A og C ósatt).

**15.** Fyrir hversu margar jákvæðar oddatölur minni en 1000 er margfeldi tölustafa tölunnar jafnt 252?

**Svar:** 5

**Skýring:** Ef talan 252 er þáttuð í frumþætti fæst að $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Af því sést að 252 má skipta upp í margfeldi af þremur eða færri tölustöfum á einungis tvo mismunandi vegu, sem $252 = 4 \cdot 7 \cdot 9$ eða $252 = 6 \cdot 6 \cdot 7$. Það eru 4 oddatölur sem má mynda úr tölustöfunum 4, 7 og 9 og einungis ein sem má mynda úr tölustöfunum 6, 6 og 7. Þetta eru tölurnar 479, 497, 749, 947 og 667.

## Þriðji hluti

**16.** Gólfið í rétthyrndu herbergi er flísalagt með ferningslaga flísum, sem allar eru jafnstórar en í tveimur mismunandi litum. Allar flísarnar meðfram veggjunum eru rauðar, en þær sem ekki liggja að vegg eru allar hvítar. Ef það eru jafnmargar rauðar og hvítar flísar, hversu margar eru flísarnar samtals? Finnið öll möguleg svör.

**Svar:** 48 og 60

**Lausn:** Gefum okkur að stærð herbergisins sé $a \times b$, mælt í fjölda flísa. Þá er fjöldi rauðra flísa $2a + 2b - 4$ og fjöldri hvítra flísa er $(a-2)(b-2)$. Því gildir að

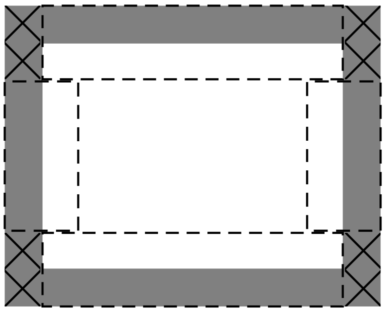
$$2a + 2b - 4 = (a-2)(b-2) = ab - 2a - 2b + 4$$

sem jafngildir $0 = ab - 4a - 4b + 8$ svo að

$$(a-4)(b-4) = ab - 4a - 4b + 16 = 8.$$

Til einföldunar getum við gert ráð fyrir að $a \leq b$ (þ.e. að $a$ sé styttri hliðin og $b$ sú lengri). Þar sem þetta eru heiltölur þá þarf margfeldið $(a-4)\cdot(b-4)$ að vera annaðhvort $1 \cdot 8$ eða $2 \cdot 4$, svo að $a = 5$ og $b = 12$ eða $a = 6$ og $b = 8$. Stærð herbergisins í flísum talið er því $5 \times 12$ eða $6 \times 8$, svo að fjöldi flísa er annaðhvort 60 eða 48.

**Önnur lausn:** Ljóst er að hvítu flísarnar geta ekki verið í einfaldri röð, því þá geta þær ekki verið jafnmargar og þær rauðu. Ef við skoðum þær hvítu flísar sem liggja upp að rauðum flísum, þá má para hverja þeirra saman við aðliggjandi rauða flís eins og myndin sýnir.

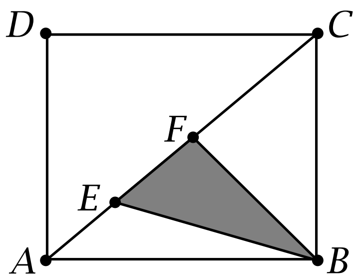


Eftir standa 8 rauðar flísar í hornunum og því þurfa þær hvítu flísar sem eru í miðjunni (og liggja ekki upp við neinar rauðar flísar) einnig að vera 8 talsins. Þessar hvítu flísar mynda rétthyrnt svæði, sem er þá með uppröðun flísa sem er annað hvort $2 \times 4$ eða $1 \times 8$ (snúið á einhvern veg). Það þýðir að herbergið er annaðhvort $6 \times 8$ eða $5 \times 12$, svo að fjöldi flísa er annaðhvort 48 eða 60.

**17.** Flatarmál rétthyrnings $ABCD$ er 30. Punktar $E$ og $F$ eru valdir á hornalínunni $AC$ þannig að

$$2(AE + FC) = 3EF.$$

Hvert er flatarmál þríhyrningsins $BEF$?




**Svar:** 6

**Lausn:** Af gefnu jöfnunni leiðir að lengd $EF$ er $2/5$ af lengd $AC$:

$$\frac{EF}{AC} = \frac{EF}{(AE + FC) + EF} = \frac{EF}{3EF/2 + EF} = \frac{2EF}{3EF + 2EF} = \frac{2}{5}$$

Ef við miðum við $AC$ sem grunnlínu þá hafa þríhyrningarnir $ABC$ og $BEF$ sömu hæð en grunnlínur $AC$ og $EF$, svo að flatarmál $BEF$ er $2/5$ af flatarmáli $ABC$. Athugið að þetta gildir alveg óháð löguninni á rétthyrningnum. Nú er flatarmál þríhyrinsins $ABC$ helmingurinn af flatarmáli rétthyrningsins $ABCD$, svo að flatarmál $ABC$ er 15 og þar með fæst að flatamál $BEF$ er $2/5 \cdot 15 = 6$.

**18.** Finnið lausn, í jákvæðum heiltölum $x$ og $y$, á jöfnunni

$$2x + 9y = 2009$$

þannig að munurinn á milli $x$ og $y$ sé eins lítill og mögulegt er.

**Svar:** $x = 181$ og $y = 183$

**Lausn:** Látum $d = x - y$, en þá má með innsetningunni $x = d + y$ umskrifa gefnu jöfnuna sem

$$2d + 11y = 2009$$

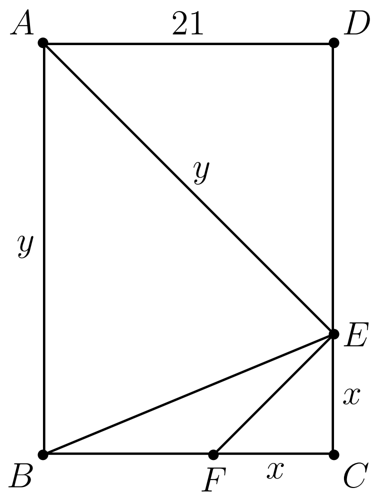
og á þessu formi breytist dæmið í að finna þá lausn sem gefur $d$ sem næst núlli. Til þess að fá heiltölulausnir þarf $d$ að vera heiltala þannig að $2009 - 2d$ sé deilanleg með 11:

$$11y = 2009 - 2d = 11 \cdot 182 + 7 - 2d$$

og af þessari umritun sést að það er jafngilt að $7 - 2d$ sé deilanleg með 11. En nú er auðvelt að sjá að $d = -2$ er sú heiltala sem næst er núlli og hefur þennan eiginleika (því að 11 gengur ekki upp í $7 - 2d$ ef $d$ tekur gildið $-1$, 0, 1 eða 2). Að lokum reiknum aftur til baka og sjáum að mismunurinn $d = -2$ samsvarar $y = 183$ og $x = 181$ sem eru jákvæðar heiltölur eins og beðið var um.

**19.** Rétthyrningur $ABCD$ hefur tvær hliðar, $AD$ og $BC$ af lengd 21. Punktur $F$ er á hlið $BC$ og punktur $E$ er á hlið $CD$. Ef $AB = AE$, $CE = CF$ og $FB = FE$ hver er lengd hliðar $AB$?

**Svar:** $21\sqrt{2}$




**Lausn:** Látum $x = CE = CF$ og $y = AB = AE$. Þríhyrningurinn $FCE$ er jafnarma með rétt horn í $C$ svo að langhlið hans er $FE = x\sqrt{2}$ (samkvæmt reglu Pýþagórasar). En þá er líka $FB = x\sqrt{2}$ og þá höfum við að $BC = x\sqrt{2} + x = (\sqrt{2}+1)x$ og þar með að

$$x = \frac{21}{\sqrt{2}+1} = 21(\sqrt{2}-1).$$

Nú getum við notað reglu Pýþagórasar á rétthyrnda þríhyrninginn $ADE$:

$$y^2 = 21^2 + (y-x)^2 = 441 + y^2 - 2yx + x^2$$

sem gefur að $2yx = 441 + x^2$ og því

$$y = \frac{441 + x^2}{2x} = \frac{441}{x} + \frac{x}{2} = \frac{21(\sqrt{2}+1)}{2} + \frac{21(\sqrt{2}-1)}{2} = 21\sqrt{2}.$$

**Flottari lausn:** Þar sem báðir þríhyrningarnir $ABE$ og $BFE$ eru jafnarma, þá er ferhyrningurinn $ABFE$ samhverfur um hornalínuna $AF$. Það þýðir að hornið $\angle AEF$ er $90°$ eins og hornið $\angle ABF$. Nú er þríhyrningurinn $FCE$ líka jafnarma og þar sem hornið í $C$ er rétt þá er $\angle CEF = \angle CFE = 45°$. Þar með er ljóst að $\angle AED = 180° - \angle AEF - \angle CEF = 180° - 90° - 45° = 45°$. En nú hefur þríhyrningurinn $ADE$ rétt horn í $D$ og því fæst að $\angle EAD = 45°$, svo að $ADE$ er jafnarma með $ED = AD = 21$. Þar sem $ADE$ er bæði jafnarma og rétthyrndur fæst auðveldlega að lengd langhliðarinnar er $AE = 21\sqrt{2}$. Og þá er líka $AB = 21\sqrt{2}$.

Við þökkum öllum þeim sem tóku þátt og aðstoðuðu við keppnina.

| | |
|---|---|
| Auðun Sæmundsson | Einar Arnalds Jónasson |
| Friðrik Diego | Guðbjörn Freyr Jónsson |
| Gunnar Freyr Stefánsson | Jóhanna Eggertsdóttir |