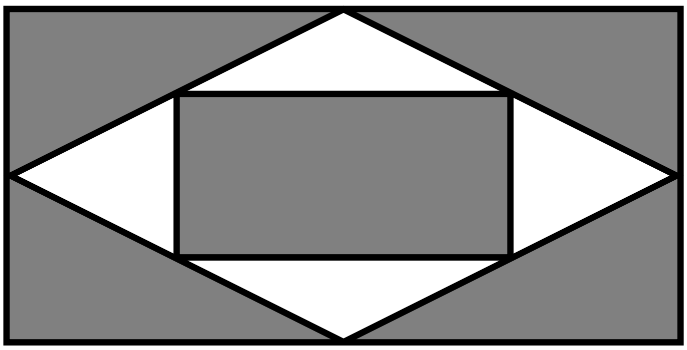
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2009-2010

Svör og lausnir

Neðra stig



Íslandsbanki styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Fyrsti hluti

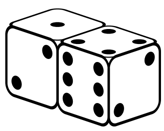
1. Við keyptum m blýanta á samtals n krónur og n blýanta á samtals m krónur. Hvert var meðalverð á blýant?

☒ 1 ☐ $\dfrac{m+n}{2}$ ☐ $\dfrac{2mn}{2}$ ☐ $\dfrac{m^2n^2}{2}$

Skýring: Alls borguðum við $n+m$ krónur fyrir blýantana, sem voru alls $m+n$ talsins. Meðalverð á blýant er því

$$\frac{n+m}{m+n} = 1.$$

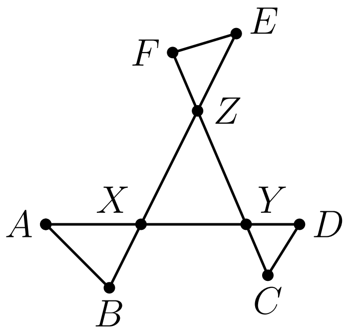
2. Hver er heildarfjöldi augnanna á þeim sjö hliðum teninganna sem sjást ekki?



☐ 15 ☐ 17 ☐ 21 ☒ 27

Skýring: Fjöldi augna á teningi er $1+2+3+4+5+6 = 21$. Á tveimur teningum er fjöldi augna því alls $21+21 = 42$. Á myndinni sjást $1+2+2+4+6 = 15$ augu. Fjöldi augna sem ekki sést er því $42 - 15 = 27$.

3. Summa hornanna sem merkt eru A, B, C, D, E og F er



☐ 180° ☐ 270° ☒ 360° ☐ 450°

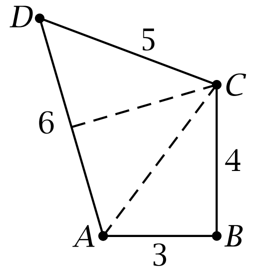
Skýring: Merkjum hornin í miðþríhyrningnum með X, Y og Z. Hornasumman $X+Y+Z$ er $180°$ og hornasumman sem spurt er um er hornasumma þríhyrninganna þriggja ABX, YCD og ZEF að frádregnum hornunum X, Y og Z, þ.e.a.s. $3 \cdot 180° - 180° = 360°$.

4. Anna, Benni og Sunna eiga saman 30 bolta. Ef Benni gefur Sunnu 5 bolta, Sunna gefur Önnu 4 og Anna gefur Benna 2 eiga öll börnin jafn marga bolta. Hvað átti Anna marga bolta í upphafi?

☒ 8 ☐ 9 ☐ 11 ☐ 13

Skýring: Þegar skipst hefur verið á boltum er hvert þeirra, Anna, Benni og Sunna, með 10 bolta. Anna þiggur 4 bolta og gefur 2, svo fjöldi bolta Önnu eykst um 2. Hún hlýtur því að hafa haft 8 bolta í upphafi.

5. Gefinn er ferhyrningur $ABCD$ þar sem $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 6$ og $\angle ABC = 90°$. Hvert er flatarmál ferhyrningsins $ABCD$?



☐ 16 ☒ 18 ☐ 20 ☐ $6 + 5\sqrt{11}$

Skýring: AC er langhlið rétthyrnda þríhyrningsins ABC og því af lengd 5. Þá er þríhyrningurinn ACD jafnarma með grunnlínu 6 og hæð 4 (hæðin er önnur skammhlið rétthyrnds þríhyrnings með skammhlið 3 og langhlið 5). Flatarmál ferhyrningsins $ABCD$ er því $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 18$.

6. Í miðri kennslustund stendur kennarinn við töfluna og snýr baki í nemendur. Þá kemur skutla fljúgandi frá öftustu röð. Kennarinn snýr sér fokvondur að þeim fjórum sem sitja aftast og spyr: „Hver henti skutlunni?“

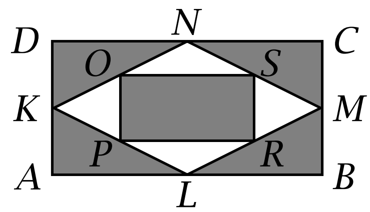
Addi segir: „Það var Einsi“
Einsi segir: „Það var ekki ég“
Frikki segir: „Það var ekki ég“
Gunni segir: „Það var ekki Frikki“.

Aðeins einn strákanna segir satt. Hver þeirra er sá eini sem segir satt?

☐ Addi ☒ Einsi ☐ Frikki ☐ Gunni

Skýring: Addi segir ekki satt, því þá segði Gunni líka satt. Addi er því að skrökva, svo Einsi segir satt (Frikki henti skutlunni).

7. Á myndinni til hægri eru K, L, M, N miðpunktar hliða rétthyrningsins $ABCD$ og O, P, R, S eru miðpunktar hliða tígulsins $KLMN$. Hvert er hlutfall flatarmáls skyggða svæðisins og flatarmáls rétthyrningsins $ABCD$?



☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{5}{6}$ ☒ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{5}{7}$

Skýring: Við táknum flatarmál rétthyrninganna með F_{ABCD} og F_{OPRS}, og flatarmál tígulsins með F_{KLMN}. Þá er $F_{KLMN} = \frac{1}{2}F_{ABCD}$ og því er flatarmál skyggðu þríhyrninganna fjögurra jafnt $\frac{1}{2}F_{ABCD}$. Eins er $F_{OPRS} = \frac{1}{2}F_{KLMN} = \frac{1}{4}F_{ABCD}$. Hlutfallið sem spurt er um er því:

$$\frac{\frac{1}{2}F_{ABCD} + F_{OPRS}}{F_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}F_{ABCD} + \frac{1}{4}F_{ABCD}}{F_{ABCD}} = \frac{3}{4}$$

8. Hver eftirfarandi talna er stærst?

☒ $\frac{6}{7}$ ☐ $\frac{55}{66}$ ☐ $\frac{444}{555}$ ☐ $\frac{3333}{4444}$

Skýring: Síðustu þrjú brotin má stytta og við berum saman tölurnar sem eru þá $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$ og $\frac{3}{4}$. Nú er

$$\frac{6}{7}-\frac{5}{6}=\frac{1}{42}, \quad \frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{1}{30}, \quad \frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20},$$

svo að $\frac{6}{7} > \frac{5}{6} > \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ og því er $\frac{6}{7}$ stærst.

9. Vara nokkur kostaði 500 krónur. Nú hefur hún hækkað um 2009%. Hvað kostar varan nú?

☐ kr. 9545 ☐ kr. 10045 ☐ kr. 10095 ☒ kr. 10545

Skýring: Verð vörunnar eftir hækkun er

$$500 + 500 \cdot \frac{2009}{100} = 10545$$

10. m og n eru jákvæðar heiltölur þannig að $m \cdot n = 40\,000$. Ef hvorug talnanna er deilanleg með 10 hver er summan $m + n$?

☐ 650 ☐ 660 ☒ 689 ☐ 691

Skýring: Töluna 40 000 má skrifa sem margfeldi $2^2 \cdot 10^4 = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 2^6 \cdot 5^4$. Við höfum því að $m \cdot n = 2^6 \cdot 5^4$. Þar sem hvorug talnanna m og n er deilanleg með 10 þá verður önnur þeirra að vera eingöngu margfeldi af 2 og hin eingöngu margfeldi af 5. Summan er því

$$2^6 + 5^4 = 64 + 625 = 689$$

Annar hluti

11. Adda er með poka sem í eru 7 bláar kúlur, 4 hvítar og 3 rauðar. Hversu margar kúlur, að lágmarki, þarf hún að veiða upp úr pokanum til að vera viss um að hafa örugglega minnst eina kúlu í hverjum lit, ef hún er með lokuð augun á meðan hún veiðir?

☐ 3 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 11 ☒ 12

Skýring: Í versta tilfelli getur Adda verið svo óheppin að veiða fyrst allar bláu kúlurnar og svo allar hvítu kúlurnar áður en hún veiðir rauða kúlu. Ef svo, þá veiðir hún fyrstu rauðu kúluna í 12. skipti.

12. Allir Marsbúar hafa einn, tvo eða þrjá fálmara. Nákvæmlega 1% fjöldans hefur þrjá fálmara, nákvæmlega 97% hafa tvo fálmara, en afgangurinn hefur einn fálmara. Hvert er hlutfall þeirra Marsbúa sem hafa fleiri fálmara en Marsbúar hafa að meðaltali?

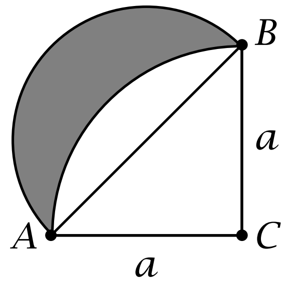
☐ 1% ☐ 3% ☐ 50% ☒ 98% ☐ 99%

Skýring: Við megum gera ráð fyrir að fjöldi Marsbúa sé 100. Þá er 1 með þrjá fálmara, 97 með tvo og því 2 með einn fálmara. Meðalfjöldi fálmara á Marsbúa er því

$$\frac{1 \cdot 3 + 97 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{100} = \frac{3 + 194 + 2}{100} = \frac{199}{100} = 1{,}99$$

Fjöldi marsbúa með fleiri en 1,99 fálmara er þá fjöldi þeirra sem hafa 2 eða 3 fálmara, þ.e.a.s. 98.

13. Jafnarma rétthyrndur þríhyrningur ABC hefur skammhliðar af lengd a. Hornið C er rétt. Fjórðungur úr hring með miðju C og geisla a er dreginn frá A til B. Hálfhringur með miðstreng AB er einnig dreginn frá A til B. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins sem hringbogarnir tveir afmarka?



☐ $\frac{a^2}{8}$ ☐ $\frac{\pi a^2}{4}$ ☐ $\frac{a^2}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{\pi}a^2}{4}$ ☒ $\frac{a^2}{2}$

Skýring: Flatarmál skyggða svæðisins má skrifa sem summu

$$\text{hálfdiskur} - \text{fjórðungsdiskur} + \text{þríhyrningur}$$

þar sem hálfdiskurinn er með miðstreng AB af lengd $a\sqrt{2}$, fjórðungsdiskurinn hefur radíus a og þríhyrningurinn er rétthyrndur með skammhliðar a. Flatarmál skyggða svæðisins er því

$$\left[\frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{4} \cdot \pi a^2\right] + \left[\frac{1}{2}a^2\right] = \frac{1}{2}a^2$$

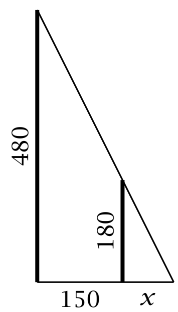
14. Maður nokkur er staddur á sléttu torgi þar sem eina ljósið kemur frá ljósastaur á miðju torginu. Hæð mannsins er 180 cm og hann stendur í 150 cm fjarlægð frá ljósastaurnum. Hversu langur er skuggi mannsins ef ljósaperan í ljósastaurnum er í 480 cm hæð?

☐ 70 cm ☐ 80 cm ☒ 90 cm ☐ 100 cm ☐ 120 cm

Skýring: Við teiknum mynd og fáum tvo einslaga þríhyrninga og notum okkur að hlutfall tilsvarandi hliða er fasti. Táknum lengd skuggans með x.

$$\frac{x}{180} = \frac{x + 150}{480}.$$

Lausn jöfnunnar er $x = 90$. Skuggi mannsins er því 90 cm.



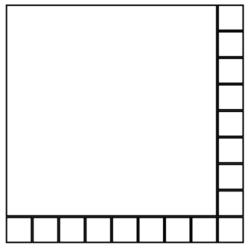
15. Hversu stórt er hornið milli stóra og litla vísis á klukku þegar klukkan er 18 mínútur yfir fjögur?

☐ 12° ☐ 15° ☐ 18° ☒ 21° ☐ 24°

Skýring: Þegar klukkan er fjögur er hornið milli vísanna $120°$. Þar sem stóri vísirinn snýst $360°$ á 60 mínútum þá snýst hann um $6°$ á mínútu. Á 18 mínútum hefur stóri vísirinn snúist um $6 \cdot 18° = 108°$. Á þessum 18 mínútum hefur litli vísirinn færst $18/60$ af vegalengdinni frá fjögur til fimm, þ.e. $18/60$ af $30°$ eða um $9°$. Boginn frá 12 að litla vísi spannar því $129°$. Hornið milli vísanna er því $129° - 108° = 21°$.

Þriðji hluti

16. Ferningur F er samansettur úr 18 ferningum og þar af hafa 17 þeirra hliðarlengd 1. Hvert er flatarmál ferningsins F?



Svar: 81

Skýring: 18. ferningurinn hefur hliðarlengd 8 og ferningarnir 17 raðast eftir aðlægum hliðum hans, 8 með hvorri hlið (alls 16) og sá 17. horn-í-horn. Ferningur F hefur því hliðarlengdir 9 og flatarmál 81.

17. 17. júní árið 2345 verður mikill hátíðar- og merkisdagur. Dagsetninguna má skrifa:

$$17\,06\,2345$$

þ.e.a.s. með átta tölustöfum sem allir eru mismunandi. Hvenær var síðast slíkur dagur, sem á þennan hátt má skrifa með átta mismunandi tölustöfum?

Svar: 25. júní 1987 (sem skrifast 25 06 1987)

Skýring: Slíkur dagur verður að hafa verið á síðustu öld. Síðasta ártal með mismunandi tölustöfum er 1987. Síðasti mögulegi mánuðurinn sem ekki notar neinn af þessum fjórum tölustöfum er 06 (júní) og síðasti mögulegi dagurinn í þeim mánuði er 25. Dagurinn sem við leitum að er því 25 06 1987.

18. Höskuldur og Eyvindur leggja samtímis af stað hlaupandi. Höskuldur hleypur frá A til B en Eyvindur hleypur frá B til A. Þeir fara eftir sömu braut, hvor um sig á jöfnum hraða. Þeir mætast í C á milli A og B. Á því augnabliki á Höskuldur eftir 16 mínútna hlaup að B en Eyvindur á eftir 25 mínútna hlaup að A. Hvert er hlutfall hraða þeirra?

Svar: 5:4

Skýring: Látum v_H tákna hraða Höskuldar, v_E hraða Eyvindar og t fjölda mínútna sem líða þar til þeir mætast. Þá gildir að

$$v_H \cdot t = v_E \cdot 25 \qquad \text{og} \qquad v_E \cdot t = v_H \cdot 16$$

þ.e. vegalengdin sem Höskuldur hleypur áður en þeir mætast er sú sama og Eyvindur hleypur eftir að þeir mætast, og öfugt. Þá fæst

$$\frac{v_H}{v_E} = \frac{25}{t} = \frac{t}{16} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 16 \cdot 25 = 400 \quad \Rightarrow \quad t = 20$$

og því er $v_H/v_E = 25/20 = 5/4$.

19. Fimm stafa tala $a679b$ (skrifuð í tugakerfinu) hefur tvo óþekkta tölustafi, a og b. Finnið þessa fimm stafa tölu ef gefið er að hún er deilanleg með 72.

Svar: 36792

Skýring: Þar sem $72 = 8 \cdot 9$ þá þurfa bæði 8 og 9 að ganga upp í fimm stafa töluna $a679b$. Nú eru 1000 deilanleg með 8, svo að það nægir að skoða þrjá síðustu tölustafina og finna út úr því fyrir hvaða tölustaf b talan $79b$ er deilanleg með 8. En 8 gengur upp í 800 svo að 8 þarf að ganga upp í mismuninn $800 - 79b = 10 - b$ og því fæst að $b = 2$. Það er vel þekkt að 9 gengur upp í tölu þá og því aðeins að 9 gangi upp í þversummu tölunnar, en þversumma $a6792$ er jöfn $a + 24$ sem er deilanlegt með 9 ef $a = 3$.

20. Hvað hefur jafnan $((x^2 - 2)^2 - 5)^2 = 1$ margar ólíkar rauntölulausnir?

Svar: 5

Skýring: Við drögum kvaðratrætur og forðumst neikvæð önnur veldi. Þegar kvaðratrót hefur verið dregin einu sinni fæst $(x^2 - 2)^2 = 6$ eða $(x^2 - 2)^2 = 4$. Drögum kvaðratrót aftur og fáum að $x^2 = 2 \pm \sqrt{6}$ eða $x^2 = 2 \pm 2$. Fyrri jafnan gefur tvær rauntölulausnir ef hægri hliðin er $2 + \sqrt{6}$ ($x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{6}}$), en í hinu tilfellinu fást engar rauntölulausnir vegna þess að $2 - \sqrt{6} < 0$. Seinni jafnan leiðir til rauntölulausna hvort heldur sem hægri hlið er $2 + 2 = 4$ eða $2 - 2 = 0$. Í fyrra tilfellinu eru lausnirnar tvær ($x = \pm 2$) og í seinna tilfellinu er aðeins ein lausn ($x = 0$). Heildarfjöldi rauntölulausna er því 5.

Fjórði hluti

21. Gólfið í rétthyrndu herbergi er flísalagt með ferningslaga flísum, sem allar eru jafnstórar en í tveimur mismunandi litum. Allar flísarnar meðfram veggjunum eru rauðar, en þær sem ekki liggja að vegg eru allar hvítar. Ef það eru jafnmargar rauðar og hvítar flísar, hversu margar eru flísarnar samtals? Finnið öll möguleg svör.

Svar: 48 og 60

Lausn: Gefum okkur að stærð herbergisins sé $a \times b$, mælt í fjölda flísa. Þá er fjöldi rauðra flísa $2a + 2b - 4$ og fjöldri hvítra flísa er $(a - 2)(b - 2)$. Því gildir að

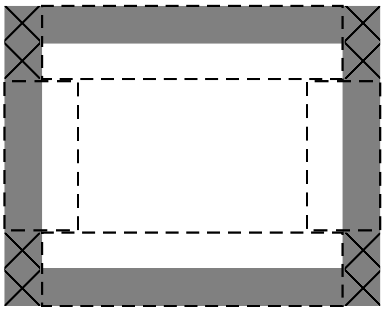
$$2a + 2b - 4 = (a - 2)(b - 2) = ab - 2a - 2b + 4$$

sem jafngildir $0 = ab - 4a - 4b + 8$ svo að

$$(a - 4)(b - 4) = ab - 4a - 4b + 16 = 8.$$

Til einföldunar getum við gert ráð fyrir að $a \leq b$ (þ.e. að a sé styttri hliðin og b sú lengri). Þar sem þetta eru heiltölur þá þarf margfeldið $(a - 4) \cdot (b - 4)$ að vera annaðhvort $1 \cdot 8$ eða $2 \cdot 4$, svo að $a = 5$ og $b = 12$ eða $a = 6$ og $b = 8$. Stærð herbergisins í flísum talið er því 5×12 eða 6×8, svo að fjöldi flísa er annaðhvort 60 eða 48.

Önnur lausn: Ljóst er að hvítu flísarnar geta ekki verið í einfaldri röð, því þá geta þær ekki verið jafnmargar og þær rauðu. Ef við skoðum þær hvítu flísar sem liggja upp að rauðum flísum, þá má para hverja þeirra saman við aðliggjandi rauða flís eins og myndin sýnir.

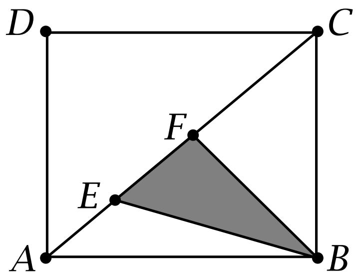


Eftir standa 8 rauðar flísar í hornunum og því þurfa þær hvítu flísar sem eru í miðjunni (og liggja ekki upp við neinar rauðar flísar) einnig að vera 8 talsins. Þessar hvítu flísar mynda rétthyrnt svæði, sem er þá með uppröðun flísa sem er annað hvort 2×4 eða 1×8 (snúið á einhvern veg). Það þýðir að herbergið er annaðhvort 6×8 eða 5×12, svo að fjöldi flísa er annaðhvort 48 eða 60.

22. Flatarmál rétthyrnings $ABCD$ er 30. Punktar E og F eru valdir á hornalínunni AC þannig að

$$2(AE + FC) = 3EF.$$

Hvert er flatarmál þríhyrningsins BEF?



Svar: 6

Lausn: Af gefnu jöfnunni leiðir að lengd EF er $2/5$ af lengd AC:

$$\frac{EF}{AC} = \frac{EF}{(AE + FC) + EF} = \frac{EF}{3EF/2 + EF} = \frac{2EF}{3EF + 2EF} = \frac{2}{5}$$

Ef við miðum við AC sem grunnlínu þá hafa þríhyrningarnir ABC og BEF sömu hæð en grunnlínur AC og EF, svo að flatarmál BEF er $2/5$ af flatarmáli ABC. Athugið að þetta gildir alveg óháð löguninni á rétthyrningnum. Nú er flatarmál þríhyrinsins ABC helmingurinn af flatarmáli rétthyrningsins $ABCD$, svo að flatarmál ABC er 15 og þar með fæst að flatamál BEF er $2/5 \cdot 15 = 6$.

Við þökkum öllum þeim sem tóku þátt og aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson	Einar Arnalds Jónasson
Friðrik Diego	Guðbjörn Freyr Jónsson
Gunnar Freyr Stefánsson	Jóhanna Eggertsdóttir