Rúmfræði og raunveruleikinn[1]

Sigurður Helgason

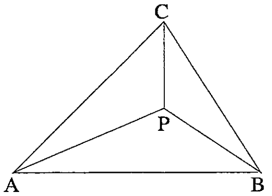
Ég vil þakka stjórn Íslenzka stærðfræðafélagsins fyrir þann heiður sem hún hefir sýnt mér við þetta tækifæri. Félagið var stofnað á sjötugsafmæli Ólafs Daníelssonnar sem hiklaust má telja brautryðjanda stærðfræðimenntunar á Íslandi. Allir stærðfræðingar sem hér eru staddir standa beint eða óbeint í mikilli þakkarskuld við hann. Mér hefir því fundizt eðlilegt í þessum fyrirlestri að fjalla um rúmfræði, því að það var fyrst og fremst sú grein stærðfræðinnar sem var Ólafi hugstæð alla ævi.

Rúmfræðina má rekja til Grikkjans Evklíð (300 f.Kr.) en hún hefir þróast í ýmsar áttir allt fram til vorra daga. En þrátt fyrir stórkostlegar framfarir og tízkubreytingar er það hér sem oftar í stærðfræðinni að frumlegar kennisetningar halda sínu gildi þótt þær séu ekki rannsóknarefni nútímans.

Úr margskonar efni er hér að velja, en mér finnst rétt að leggja áherslu á rúmfræðisetningar sem tengjast ýmsu öðru og hafa stundum meira að segja hagnýtt gildi.

Rúmfræðivandamál Fermat

Fermat (1601–'65) var dómari í borginni Toulouse en var framúrskarandi stærðfræðingur. Ég kem seinna að vandamáli í talnafræði sem hann er þekktastur fyrir, en fyrst vil ég minnast á rúmfræðivandamál sem hann vakti máls á og var síðar leyst af eðlisfræðingnum Torricelli og ýmsum öðrum. Gefinn er þríhyrningur ABC. Finna skal punkt P þannig að summa fjarlægðanna PA, PB, PC sé sem minnst.

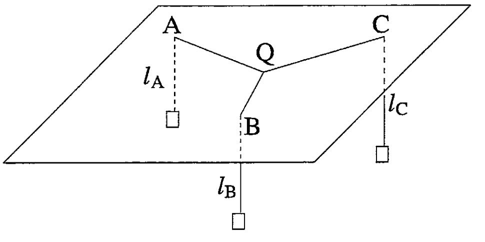


Mynd 1

[1] Þessi grein byggir á fyrirlestri sem Sigurður hélt á fimmtugsafmæli félagsins þann 31. október 1997.

Lausn á þessu vandamáli gæti auðsjáanlega haft hagnýta þýðingu. Til dæmis gætu A, B og C verið bæjarfélög sem vildu setja upp sameiginlegan flugvöll þannig að summa fjarlægðanna frá bæjunum sé sem minnst.

Eðlisfræðileg lausn. Eðlisfræðingur myndi e.t.v. koma með eftirfarandi aðferð: Hugsum okkur smágöt á borðinu við A, B, C og snúrur bundnar saman í Q. Í hinum endunum hengjum við jafnþung lóð. Ef lengdir snúranna fyrir neðan borðið eru l_A, l_B og l_C þá liggur, samkvæmt eðlisfræði, þyngdarpunktur lóðanna í fjarlægðinni $(l_A + l_B + l_C)/3$ fyrir neðan borðið. Ef Q er færður til á borðinu breytast lengdirnar l_A, l_B, l_C en kerfið er í jafnvægi þegar þyngdarpunkturinn liggur lægst, þ.e.a.s. $l_A + l_B + l_C$ stærst. Það þýðir hins vegar að summan $QA + QB + QC$ er minnst svo Q fellur í punktinn P.



Mynd 2

Þó að Torricelli væri eðlisfræðingur var lausn hans byggð á hreinni stærðfræði og hann sannaði að hornin við punktinn P sem leysir dæmið eru öll jöfn, þ.e.a.s. $120°$.

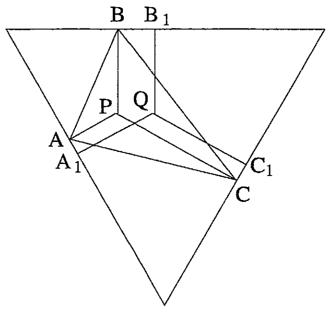
Stærðfræðileg lausn. Að dæmi Steiners skulum við sanna að ef öll hornin við P eru jöfn þá er summan $PA+PB+PC$ minnst. Lítum á línurnar hornrétt á PA, PB, PC gegnum A, B og C (mynd 3). Þær mynda jafnhliða þríhyrning D. Lítum svo á annan punkt Q og fellum lóðlínur á hliðarnar í D, QA_1, QB_1 og QC_1. Ef F er flatarmál D og s hliðarlengdin fæst líkingin

$$QA_1 + QB_1 + QC_1 = \frac{2F}{s} = PA + PB + PC.$$

Hins vegar er $QA \geq QA_1$ o.s.frv. svo

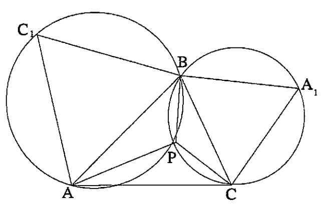
$$QA + QB + QC > PA + PB + PC$$

eins og átti að sanna.

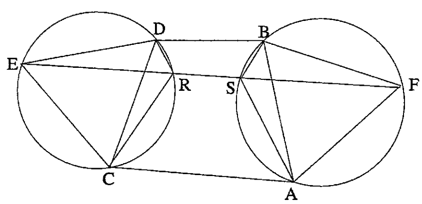


Mynd 3

Punktinn P má teikna á eftirfarandi hátt (mynd 4a): Við búum til jafnhliða þríhyrninga A_1BC og AC_1B utan á upprunalega þríhyrninginn ABC. Við teiknum svo umritaða hringa um ABC_1 og BCA_1. Skurðpunktur hringanna (fyrir utan B) er Fermat punkturinn P því að myndin sýnir að hornin við P eru öll 120°.



Mynd 4a

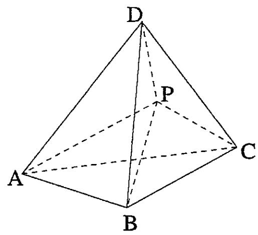


Mynd 4b

Almennara má líta á fjóra punkta A, B, C D í planinu og spyrja: Hvernig má tengja þá saman þannig að samanlögð lengd tengilínanna verði sem minnst? Hér byggjum við jafnhliða þríhyrninga CDE og ABF og umritaða hringa um þessa þríhyrninga. Ef R og S tákna skurðpunkta EF við þessa hringa er auðséð að hornin við R og S eru öll 120°. Á svipaðan hátt má teikna mynd út frá hliðunum AC og BD og fæst þá önnur brotin lína sem tengir A, B, C og D. Sanna má að önnur þessara brotnu lína leysir dæmið.

Einnig er hægt að sýna árangurinn á módeli. Við tökum tvær plötur og merkjum punkta A, B, C, D á sama stað á báðum plötunum. Við tengjum svo samsvarandi punkta með stuttum pinnum og dýfum módelinu í sápulög. Vegna yfirborðsspennunnar verður flöturinn sem tengir pinnana sá minnsti að flatarmáli og samanlögð lengd línanna sem tengja A, B, C og D verður því minnst.

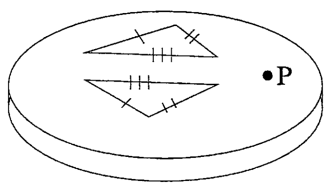
Einnig má athuga sama vandamál í þrívíðu rúmi. Hugsum okkur fjóra punkta A, B, C, D í rúminu sem mynda fjórflötung (tetrahedron). Finna skal punkt P þannig að summa fjarlægðanna PA, PB, PC og PD sé sem minnst. Hér er ekki eins auðvelt að leysa dæmið með hreinni rúmfræði. Hinsvegar fæst með fallagreiningu að rúmhornin fjögur við P: $(PABC)$, $(PABD)$, $(PBCD)$, $(PACD)$ verða öll að vera eins ef punkturinn P leysir dæmið.



Mynd 5

Tvær og þrjár víddir

Í okkar heimi skynjum við eina, tvær og þrjár víddir. En nú skulum við hugsa okkur lífveru sem lifir á sléttu vatnsyfirborði og skynjar eingöngu tvær víddir. Hugsum okkur nú tvo þríhyrninga sem fljóta á vatnsyfirborðinu nálægt pöddunni. Báðir þríhyrningar hafa jafnstórar hliðar (eins er merkt er á mynd 6). Paddan tekur eftir þessu og heldur að þríhyningarnir séu eins enn tekst þó ekki að færa annan þríhyrninginn svo að hann þeki hinn.



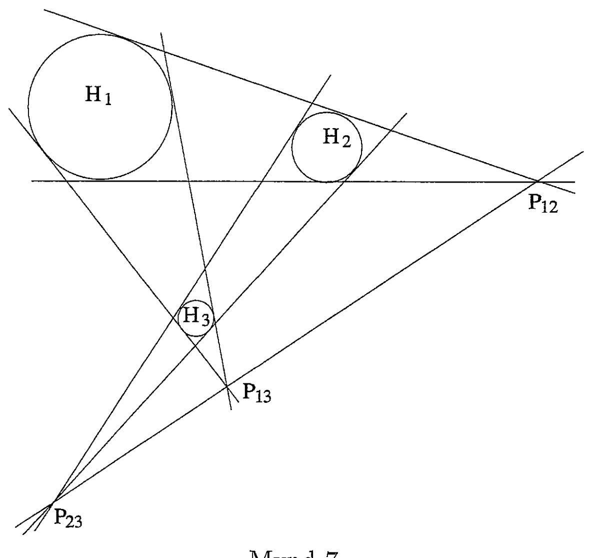
Mynd 6

Við sem lifum í þrívíðu rúmi getum hins vegar lyft öðrum þríhyrningnum upp úr vatnsborðinu, snúið honum við og svo getur hann auðveldlega þakið hinn þríhyrninginn. Þríhyrningarnir eru samhverfir (symmetrískir) en ekki samsniða (kongrúent).

Á svipaðan hátt eru vinstri handar hanski og hægri handar hanski samhverfir en ekki samsniða. Teoretískt er hægt að flytja vinstri handar hanska yfir á fjórvítt rúm, breyta honum þar í hægri handar hanska og taka hann til baka í þrívítt rúm.

Nú vil ég benda á setningu í tveggja vídda rúmfræði sem er langauðveldust að sanna með því að nota þriðju víddina líka, en hún virtist ekki koma málinu við.

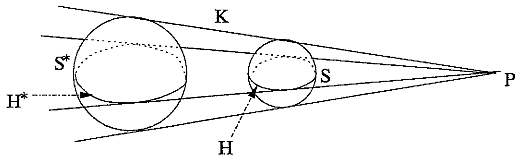
Setningin segir að þegar þrír hringar H_1, H_2, H_3 eru gefnir í plani þá liggja skurðpunktar utanverðra snertla, P_{12}, P_{13} og P_{23}, á beinni línu.



Mynd 7

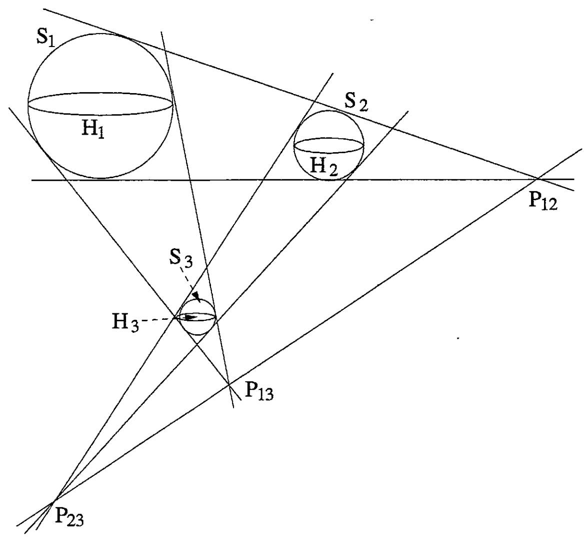
Sagan segir að þegar nokkrir ungir stærðfræðingar voru að ræða þetta vandamál þá vindur sér að þeim ungur verkfræðingur að nafni John Smart og verður að orði: „Heyrið þið strákar, þetta liggur í augum uppi.“

Til að sjá þetta hugsum við okkur tvo hringa H, H^* í láréttu plani. Við hugsum okkur svo tvo kúlufleti S, S^* þar sem H og H^* eru miðbaugar. Við getum svo lagt keilu K (kramarhús) sem umritast um kúlurnar S, S^*. Utanverðir snertlar hringanna H og H^* ganga gegnum topppunktinn P í keilunni K. Plan sem snertir báðar kúlurnar að utanverðu gengur gegnum P.



Mynd 8

Hringarnir H_1, H_2 H_3 gefa okkur á þennan hátt þrjár keilur K_{12}, K_{13}, K_{23} með topppunkta P_{12}, P_{13}, P_{23}. Nú leggjum við plan L ofan á kúlurnar S_1, S_2, S_3 sem snertir þær allar ofanfrá. Samkvæmt því sem áður var sagt inniheldur L punktana P_{12}, P_{13}, P_{23}. En við getum einnig snert kúlurnar S_1, S_2, S_3 neðanfrá með öðru plani L^*. Það plan inniheldur einnig punktana P_{12}, P_{13}, P_{23}. Punktarnir liggja því á skurðlínu plananna L og L^* eins og átti að sanna.



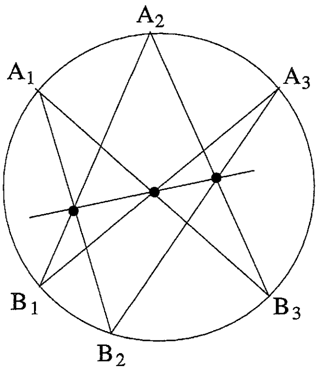
Mynd 9

Rúmfræði og grúpufræði. Elliptískir ferlar.

Nú skulum við líta á nokkur dæmi um samband rúmfræði og grúpufræði. Heimspekingurinn Pascal (1623–'62) uppgötvaði á unga aldri eftirfarandi setningu í rúmfræði: Gefnir eru sex punktar á hring, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Við drögum línurnar A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2 eins og á myndinni. Þá liggja skurðpunktarnir

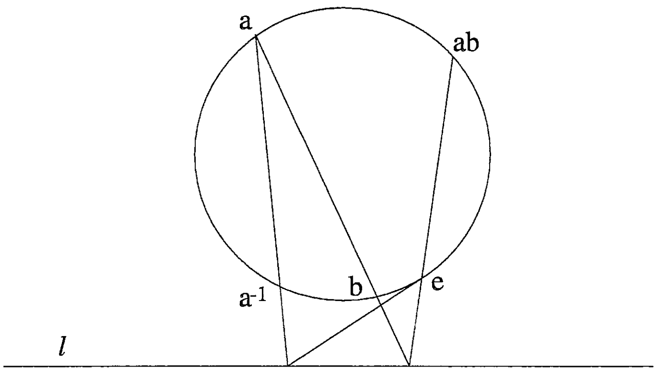
$$(A_1B_2, A_2B_1), (A_2B_3, A_3B_2), (A_3B_1, A_1B_3)$$

á beinni línu.



Mynd 10

Í þessu sambandi athugum við hringferil H, fastan punkt e á H og línu l fyrir utan hringinn.



Mynd 11

Ef $a, b \in H$ skilgreinum við pródúktið ab sem þann punkt á H sem liggur á tengilínu e við skurðpunkt línunnar l og línunnar gegnum a og b. Þá er augljóst að

$$ab = ba, \quad ae = ea = a.$$

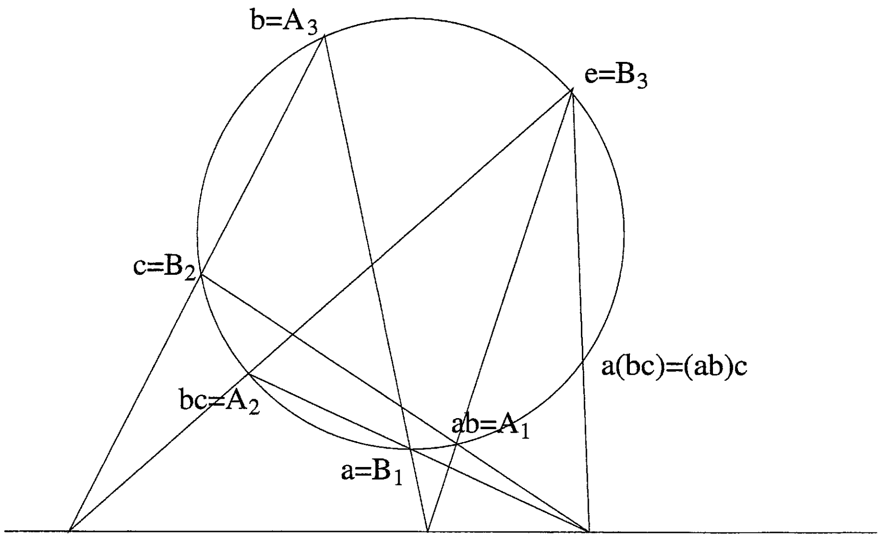
Einnig er til stak $a^{-1} \in H$ sem uppfyllir

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e.$$

Það fæst með því að tengja a við skurðpunkt línunnar l og snertilsins við H í e. Til þess að þetta pródúkt geri H að grúpu þarf að ganga úr skugga um að tengireglan

$$(ab)c = a(bc)$$

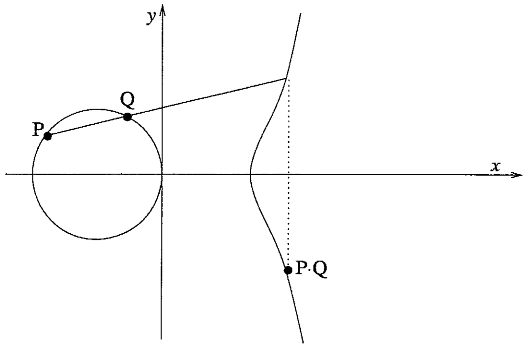
gildi. Sé þetta athugað kemur í ljós að þetta er einmitt setning Pascals, sem hér með fær sína grúputeoretísku túlkun. Sjá 12. mynd.



Mynd 12

Svipaða konstruktion má gera við svokallaða sporgera (elliptíska) ferla sem hafa líkinguna

$$y^2 = x(x - A)(x + B).$$



Mynd 13

Hér er $P \cdot Q$ skilgreint sem punkturinn á ferlinum sem er samhverfur við skurðpunkt línunnar frá P til Q og ferilsins. Þetta pródúkt gerir ferilinn að grúpu þó tengireglan sé ekki eins augljós.

Rannsóknir á þessari grúpu reyndust mikilvægur liður í lausn á hinu fræga vandamáli sem kennt er við Fermat. Vandamálið var að sanna að ef n er heil tala stærri en 2 þá eru engar heilar tölur x, y, z ($xyz \neq 0$) sem uppfylla líkinguna

$$x^n + y^n = z^n.$$

Saga þessa vandamáls er mjög dramatísk.

Fermat, sem lifði 1601–1665, var á sínum tíma einn af frægustu stærðfræðingum Evrópu. Það var í sjálfu sér dálítið merkilegt því að:

a) Í fyrsta lagi var hann að starfi dómari í borginni Toulouse.

b) Í öðru lagi birti hann ekkert um sínar stærðfræðirannsóknir.

Hinsvegar skrifaðist hann á við ýmsa samtímis stærðfræðinga, en hafði að sjálfsögðu hvorki tölvupóst né ljósritunarvél til umráða.

Hann fékk áhuga á talnafræði með því að stúdera bókina Arithmetica sem var latnesk þýðing á bók eftir gríska stærðfræðinginn Diophantos sem var uppi um 300 e.Kr. Í þessari bók er bent á að líkingin

$$x^2 + y^2 = z^2$$

hafi margar heilar lausnir, t.d. $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$. Þar skrifaði Fermat 1637 í eintak sitt á spássíu: „Ef $n > 2$ er ómögulegt að finna heilar tölur x, y z sem uppfylla líkinguna $x^n + y^n = z^n$. Ég hef fundið dásamlega sönnun fyrir þessu" og svo bætir hann við á latínu „hanc marginis exiguitas non caperet“ sem þýðir „Mjó spássían rúmar hana ekki.“

Varla hefir Fermat grunað að í þessu kroti feldist gáta til stærðfræðinga sem átti eftir að standa óráðin í 357 ár. Í síðari bréfaskriftum sínum til kollega kom Fermat með sönnun fyrir $n = 4$ og endurtekur staðhæfinguna fyrir $n = 3$ en minntist aldrei á þá almennu setningu sem hann hélt sig hafa sannað 1637. Líklegast hefir gloppa fundizt í sönnuninni en fyrst Fermat hafði aldrei komið með almennu staðhæfinguna í skrifum sínum til annarra myndi ekki vera ástæða til að minnast á að galli væri á sönnuninni. En hver hugmyndin var verður aldrei vitað.

Tilraunir stærðfræðinga við að sanna þessa staðhæfingu Fermat hafa valdið aldahvörfum í stærðfræðinni, því að ýmsar greinar algebru (eins og svokölluð ídealteoría) hafa skapazt við þessar tilraunir. Þar ber fyrst og fremst að nefna Þjóðverjann Eduard Kummer (1810–'93). Staðan 1993 var að staðhæfing Fermat var sönnuð fyrir öll n innan við 4 miljónir og einnig að ef staðhæfingin væri röng, yrði talan z^n að hafa meira en 26 miljón tölustafi.

En þetta var engan veginn nóg fyrir stærðfræðinga. Þessvegna var það heimsfrétt þegar Andrew Wiles tilkynnti á ráðstefnu í Cambridge 23. júní 1993 að hann hefði sannað staðhæfingu Fermat.

Sönnunin var um 200 síður og lá á það háu plani að það var ekki á færi nema einstaka sérfræðinga að ganga úr skugga um að sönnunin væri rétt. Og enn einu sinni reyndist vera gloppa í sönnuninni.

Það er alltaf mikið áfall fyrir stærðfræðing við að finna að hlekk vantar í sönnun. Stærðfræðin er miskunnarlaus að því leyti. Ef einn hlekkur í sönnun bilar, hrynur hún eins og spilaborg álíkt því sem tölvupóstur er sendur til föðurhúsanna ef einn punkt vantar í heimilisfangið. Fyrir Wiles var áfallið enn meira vegna þess að nú var heimspressan komin á hælana á honum. Samt gerðist kraftaverkið. Eftir umtalsverða aðstoð Richard Taylor tókst Wiles 19. september 1994 að að gera við hlekkinn sem hafði bilað (eða réttara sagt fara fram hjá honum) og heils árs taugastríði var lokið. Í þetta skipti voru allir sannfærðir og sönnuninni var borgið.

Vegna þess hve hið upphaflega dæmi virðist einfalt hafa fjölda margir, bæði stærðfræðingar og amatörar, reynt sig við það. Vinsældirnar jukust til muna eftir 1908 þegar P. Wolfskel hét talsverðum verðlaunum fyrir rétta lausn. Rangar lausnir hafa síðan streymt inn til stærðfræðideilda háskóla víða um heim. Þótt villurnar séu oft augljósar (vegna miskilnings á dæminu) getur það stundum tekið langan tíma að finna gloppuna í sönnuninni. Er það því mikið fagnaðarefni að þessari hvimleiðu plágu er að mestu lokið.

Ég vil nú lýsa mjög lauslega hvernig sönnun Wiles tengist elliptískum ferlum

$$y^2 = x(x-A)(x+B)$$

og grúpu þeirri sem myndast af ferlinum. Eins og vant er táknar $\mathbf{R}$ hér rauntalnasviðið og $\mathbf{Z}$ mengi heilu talnanna.

Sérstök tilfelli af elliptískum ferlum eru svokallaðir modular ferlar sem tengjast hálfplaninu $H : y > 0$ sem varpanirnar $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$, senda í sjálft sig. Lítum nú á fylkjagrúpurnar

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma \in \Gamma : \frac{c}{N} \in \mathbf{Z} \right\}$$

og Riemann flötinn $Y_0(N) = H/\Gamma_0(N)$, sem liggur í þjöppuðum Riemann fleti $X_0(N)$. Elliptískur ferill er modular ef hann er á vissan hátt jafngildur $X_0(N)$.

Barry Mazur hafði rannsakað ýmsa modular ferla og díófantískar líkingar sem svöruðu til þeirra (sem voru svipaðar Fermat líkingunni) og sannaði að engin lausn var til. Þetta varð til þess að Þjóðverjinn Gerhard Frey setti elliptíska ferla í samband við Fermat líkinguna. Hugsum okkur nefnilega að til sé lausn a, b, c á Fermat líkingunni

$$a^n + b^n = c^n.$$

Við lítum þá á elliptíska ferilinn

$$y^2 = x(x-A)(x+B)$$

þar sem $A = a^n$, $B = b^n$. Frey kom 1985 fram með þá tilgátu að þessi elliptíski ferill gæti *ekki* verið modular. Ári síðar tókst Kenneth Ribet að sanna þessa tilgátu. Þarna var komið merkilegt samband Fermat vandamálsins við elliptíska ferla.

Hinsvegar lá fyrir tilgáta Japananna Taniyama og Shimura frá 1955 að allir elliptískir ferlar séu modular. Sú tilgáta er ekki að öllu leyti sönnuð enn[2] en Wiles sannaði að tilgátan sé rétt fyrir svokallaða semi-stable elliptíska ferla. Þetta var nóg til þess að sanna að lausnin (a, b, c) getur ekki verið til og það er einmitt staðhæfing Fermat. Sönnunin byggist að nokkru leyti á mjög djúpri analýsu á

[2] Í Notices AMS (des. 1999) er sönnun tilkynnt fyrir almennu tilgátunni.

grúpunni sem myndast af elliptíska ferlinum að ofan. Samkvæmt niðurstöðum talnafræðingsins Mordell er grúpan af forminu

$$\mathbf{Z}^r \oplus F$$

þar sem $\mathbf{Z}$ táknar heilu tölurnar og F er abelsk endanleg grúpa. Mazur, sem ég minntist á áðan, hefir með mjög djúpri analýsu sannað að grúpan F hefir aðeins 15 möguleika, nefnilega

$$\mathbf{Z}_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 10, 12$$

$$\mathbf{Z}_{2n} \oplus \mathbf{Z}_2, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Hinsvegar er minna vitað um r; t.d. er ekki vitað hvort nokkur takmörk séu fyrir stærðinni á r.

Sönnun Wiles hefir nú birzt í tímaritinu Annals of Mathematics og hún samanstendur af einni grein eftir Wiles og annarri eftir Taylor og Wiles. Sönnunin í heild er yfir 200 síður og notar þar að auki mest af því sem gerst hefir í aritmetískri algebrurúmfræði síðustu 25 árin.

Þetta einstaka vísindaafrek er sláandi dæmi þess að mestu framfarirnar í stærðfræði gerast þegar mismunandi greinar hennar tengjast saman.

Viðtal við Sigurð Helgason
Fyrri hluti

Um jólin 1999 tóku Robert Magnus og Ragnar Sigurðsson viðtal við Sigurð Helgason þar sem hann sagði frá ferli sínum sem stærðfræðingi. Þar kemur margt fram, m.a. um menntun hans allt frá unglingsárunum, um það hvernig áhugi hans á stærðfræði vaknaði, um verkefni sem hann hefur fengist við gegn um árin og um stærðfræðinga sem hann hefur kynnst. Fyrri hluti viðtalsins birtist nú en seinni hluti kemur væntanlega út í haustbréfi félagsins.

RM: Hvenær fékkstu fyrst áhuga á stærðfræði? Var það kannske á menntaskólaárunum fyrir norðan?

SH: Já, það var í 5. bekk myndi ég segja. Ég var þá 16 ára. Ég var í stærðfræðideildinni í Menntaskólanum á Akureyri og kennarinn í stærðfræði var Trausti Einarsson. Hann var alltaf kallaður doktor Trausti og naut mikillar virðingar. Hann var kennari fyrir norðan í 10 ár. Hans aðalgrein var stjörnufræði.

Trausti kenndi okkur analytiska geómetríu. Hann var mjög fjölhæfur. Hann var menntaður sem stjörnufræðingur, en fór svo að mennta sig líka í jarðfræði. Hann var ágætur sem kennari í þessu fagi í menntaskólanum. Maður sá að hann bar mikla virðingu fyrir stærðfræðinni. Það hafði mjög pósitíf áhrif á nemendur. Hann hafði stundað háskólanám í Göttingen ásamt Leifi Ásgeirssyni og hefur sjálfsagt tekið einhverja stærðfræðikúrsusa þar. En svo hvarf hann til Háskóla Íslands haustið 1944, þannig að það var Sveinn Þórðarson sem var kennari minn í stærðfræði síðasta árið. Hans aðalgrein var nú ekki stærðfræði heldur, hún var efnafræði. Hann var líka mjög áhugasamur kennari. Nú, ég var ekki í neinum vafa um að ég ætlaði að fara í stærðfræði eftir þetta, þó ég hefði ekki hugmynd um hvað æðri stærðfræði snerist um. Ég hafði varla séð stærðfræðibók fyrir utan kennslubækurnar. Hafði þó keypt bækurnar Hall & Knight *Higher Algebra* og C. Smith *Conic Sections* sumarið 1944. Á þær enn og þykir vænt um.

RS: Hvenær tókstu stúdentspróf?

SH: Ég er stúdent 1945. Þá var nú meiningin að fara til Hafnar, en þetta var rétt eftir stríðið og mér var sagt að háskólinn væri ekki almennilega kominn í gang; þannig var það praktískara að vera bara eitt ár í verkfræðideildinni hér heima af því að þá var námið mjög svipað. Fyrstu tvö árin fyrir stærðfræðinga og eðlisfræðinga í Höfn voru sameiginleg verkfræðingum.

RM: Voru einhverjir aðrir í stærðfræðinámi?

SH: Nei, nei, það var enginn annar. Ég fór hingað til Reykjavíkur haustið 1945. Ég var í stærðfræðigreiningu hjá Leifi, línulegri algebru hjá Trausta og geómetríu hjá Sigurkarli. Svo var ég í eðlisfræði hjá Steinþóri Sigurðssyni. Hann var mjög líflegur kennari. Mínir samstúdentar, sem voru verkfræðingar, fóru með mikinn tíma í teikningar en ég hafði tiltölulega lítið að gera. Ég tefldi talsvert skák það árið. Ég fór í fjöltefli að minnsta kosti einu sinni við Árna Snævarr. Það stóð langt fram á nótt, man ég. Svo var ég í einhverri tímakennslu útí bæ. Það var nú ekki mikill tími sem fór í það að vísu.

Svo leitaði ég að einhverjum stærðfærðilitteratúr að grúska í, en það var mjög lítið til á safninu. Ég held að það hafi verið til ein bók um hlutafleiðujöfnur eftir Franck og Mieses, tveggja binda bók dálítið svipuð Courant-Hilbert. Einnig fór ég á Landsbókasafnið. Þar þurfti maður að bíða lengi eftir að fá bók úr safninu, en ég fann ekkert sem ég sá að ég gæti lesið mér til gagns. Það hefði verið gott að hafa aðgang að hillunum. Svo var það þýska stærðfræðiencyclopedian sem var í lessalnum. Þið kannist við hana, er það ekki? Fyrir prófessíonal stærðfræðinga er hún gagnleg vegna þess að það er svo mikið af sögulegum heimildum í henni, en það er reiknað með að menn kunni fagið, áður en þeir fara út í hana, þannig að hún var gagnslítil fyrir mig.

Þetta var nú skemmtilegt ár að mörgu leyti. Svo var ég um sumarið efnafræðingur á Ingólfsfirði við síldarverksmiðjuna. Það var frændi minn Ingi Bjarnason, sem setti mig inn í hvað ég átti að gera þarna. Það var að analysera prótein, vatn og fitu í síld. Hann sagði: „Þegar þú ferð til Danmerkur í efnafræðina þar, þá flýgur þú í gegnum laboratoriumkúrsana þar, því það er miklu meira spunnið í það sem þú gerir þarna á Ingólfsfirði." En hvað um það, þetta var ágætt starf.

RS: Varstu að glíma við einhver stærðfræðileg vandamál, þegar þú varst nýstúdent 1945? Varstu farinn að hugsa eitthvað um að rannsaka?

SH: Nei, ég hafði varla hugmynd um að rannsóknir færu fram í stærðfærði. Ég hélt að stærðfræði næði rétt yfir menntaskólanámið og svo búið. Ég hafði aldrei séð stærðfræðitímarit. Að vísu hitti ég einstöku sinnum Brynjólf Stefánsson, sem var tryggingastærðfræðingur, og hann gaf mér handrit að grein eftir Ólaf Daníelsson, sem var kölluð *Lidt elementærgeometri.* Þar var setning um níupunktahringinn og þetta byggðist svolítið á setningu eftir Brynjólf sjálfan. Hún hafði komið út 1940 í Matematisk Tidskrift, sem nú er hluti af Normat.

Það var fyrsti grunur sem ég hafði um það að stærðfræðitímarit væru til. Ég tefldi líka við Brynjólf stundum. Hann var fyrirtaks skákmaður. Hann sagði mér ýmsar sögur frá sínum námsárum í Kaupmannahöfn, meðal annars hvernig hann hafði unnið hinn fræga skákmann Nimzowich. Það var mjög svo fróðlegt. Hann fór út í tryggingastærðfræði, en hafði mjög gaman af þessum einföldu rúmfræðidæmum. Ég hafði gaman af því líka og ég fékk snemma smekk fyrir geómetríu, sem ég hef alltaf haldið. Mér fannst analysan, bók Haralds Bohr og Mollerup, dálítið þurr miðað við geómetríuna, sem var skemmtilegri, en sú bók var skrifuð með það í huga að sýna fram á það, að hægt væri að byggja upp stærðfræðigreininguna alveg lógískt með Dedekind-sniðum. Það var viss boðskapur, sem kom í þessari bók, en fyrst þeir gerðu þetta að aðalatriðinu, þá var bókin dálítið þurr. Mér hefur alltaf fundist það, jafnvel seinna. Þriðja bindið er að vísu miklu líflegra.

RS: Veistu það að Harald Bohr er í heimsmetabók Guinness?

SH: Fyrir?

RS: Gettu nú!

SH: Fyrir fótbolta!?

RS: Og veistu hvað það var? Jú, það er mesti sigur í landsleik. Danir unnu Frakka 17–1 árið 1915, sem er heimsmet! Harald Bohr var í liðinu.

SH: Ég skal segja þér, að þegar ég kom til Hafnar, þá var alltaf fótboltaleikur milli byrjenda, það er að segja þeirra sem voru á fyrrihluta, og seinnihlutamanna. Ég var í öðru liðinu fyrsta árið og Harald Bohr var dómarinn. Sem dómara mætti nú kannske deila eitthvað á hann, því hann hafði alltaf samúð með þeim sem var að tapa. Hann sparkaði sem sagt til boltans þegar til kom og það hafði tilætluð áhrif.

RM: Þá erum við komnir til Kaupmannahafnar.

SH: Ég kom til Kaupmannahafnar um haustið 1946.

RM: Hvernig var að vera í námi þar?

SH: Það var að sumu leyti svipað því hérna. Ég hafði sem sagt í stærðfræðinni tekið fyrsta árs pensúmið. Á öðru ári hafði ég Thøger Bang í stærðfræðigreiningu, Werner Fenchel í rúmfræði, Svend Bundgaard í „Rationel Mekanik". Nú eru þeir allir látnir.

Þá var námið dálítið öðruvísi heldur en núna. Það var fyrrihlutapróf, sem var kallað „forprøve". Það var dálítið strembið próf, vegna þess að það þurfti að taka próf í öllum námsgreinum samtímis eftir tveggja ára nám. Það var skriflegt og munnlegt próf í öllum stærðfræðigreinunum, bæði í stærðfræðigreiningu, geómetríu og í rationel mekanik. Svo var munnlegt og skriflegt í eðlisfræði, munnlegt og skriflegt í efnafræði og skriflegt próf í stjörnufræði.

Þetta próf var eiginlega of þungt. Til dæmis, þegar ég tók það, þá voru ekki nema 6 af 27 sem komust í gegnum það. Þetta var náttúrlega að sumu leyti vegna þess að þeir sem voru gefnir fyrir svona fög fóru frekar í verkfræðina og jafnvel þeir sem fóru í þessi fög, stærðfræði, eðlisfræði, efnafræði og stjörnufræði, fóru flestir í eðlisfræði. Eðlisfræðin var miklu vinsælli en stærðfræðin á þeim árum vegna Niels Bohr.

RM: Kenndi Harald Bohr þér stærðfræði?

SH: Jú, en ekki fyrr en á seinnihluta. Eftir fyrrihlutaprófið voru framhaldskúrsusar í stærðfræði.

RS: Hvað voru það eiginlega margir sem náðu þessum prófum og fluttust þá yfir á seinnihluta? Voru það bara 6–7 manns?

SH: Nei talsvert meira því prófið var tvisvar á ári. Í fagprufubekkjunum voru kannske 8 í fyrirlestri í stærðfræði.

RS: Þurftu menn að taka allt aftur ef þeir féllu? Voru þetta svo strangar reglur?

SH: Já, „hele balladen" eins og sagt var. Það voru margir ágætis menn í stærðfræði, sem náðu ekki í gegn vegna þess að þeir féllu kannske í efnafræði. Og það var eftir Ørsted-skala sem fór niður í −23.

RS: Var þetta nú ekki vitlaust kerfi?

SH: Jú, ekki heppilegt, en eftir cand. mag.-námið (sem einnig fól í sér pædagókikum, þ.e. kúrsus í kennslu) áttu menn að vera góðir menntaskólakennarar í öllum greinunum. Kerfinu var breytt ég held í kringum 1960, það gæti hafa verið fyrr jafnvel. Á seinnihlutanum var prógrammið á þeim árum fremur fátæklegt, en þeir kúrsusar sem voru haldnir voru fyrsta flokks. Í Danmörku var gömul hefð fyrir ágætis kennslu í stærðfræði. Það var komplex analysa hjá Bohr. Ég held að það hafi verið ein þrjú misseri. Real analysa hjá Jessen, tvö eða þrjú misseri. Það var nokkuð avanseraður kúrsus. Hann fór meðal annars yfir í teóretískan líkindareikning. Svo var það Nörlund, sem var mjög virðulegur prófessor og varð mjög gamall. Ætli að hann hafi ekki orðið næstum 100 ára. Hann var fyrst og fremst forstöðumaður Geodetisk institut, en hafði skrifað bók sem kallaðist *Differenzenrechnung* og þótti á sínum tíma talsvert merkileg. Hans smekkur í stærðfræðinni var svokallaðar „special functions“. Hann hélt kannske fyrirlestra um elliptísk föll, hypergeómetrisk föll og integrallíkingar, en þessir kúrsusar voru mjög stuttir. Hann byrjaði ekki fyrr en kannske þrjár vikur voru liðnar og endaði líka nokkuð snemma. Við vorum aldrei nema tveir í þessum kúrsusum. Það var ég og Knud Poder, sem er enn á lífi og er núna í jarðfræði við háskólann í Álaborg. Hann var undir handleiðslu Nörlund og það var ætlast til þess að hann hlustaði á alla þessa fyrirlestra. Við vorum sem sagt tveir í þessum kúrsusum og urðum ágætir vinir.

Ég hafði mjög frjálsar hendur þarna, þetta voru ekki nema örfáir kúrsusar. Það var svolítið í grúpufræði hjá Bundgaard einu sinni. Svo voru seminör, þar sem nemendur héldu erindi um eitthvert ákveðið efni. Það var náttúrlega ágæt æfing. En svo datt mér í hug að fara í verðlaunaverkefni, af því tagi sem ég vissi um að Ólafur Daníelsson hafði lagt fyrir sig. Hann var mér mikilvæg fyrirmynd, Ólafur Daníelsson, allt frá menntaskólaárunum. Framlag hans til íslenskrar menningar er ómetanlegt.

Ég hafði heyrt um það, að svona verðlaunaverkefni væri sett fram í hverju einasta fagi við háskólann. Þetta var alda gömul hefð, sem er enn í gangi. Maður hefur eitt ár til verkefnisins og svarinu átti að skila undir leynimerki. Ég túlkaði það þannig að maður ætti ekki að segja neinum frá því og ég gerði það ekki. Þessum verkefnum var stillt upp í aðalbyggingu háskólans á lista sem hét: „Universitetets prisspørsmaal for aaret 1950“. Ég skrifaði hjá mér stærðfræðiverkefnið; það var eftirfarandi: „Der ønskes en undersøgelse af i vilken udstrækning de af den finske matematikerskole, særlig Rolf Nevanlinna, opnaaede resultater vedrørende værdifordelingen af analytiske funktioner, som er periodiske i en halvplan, kan almindeliggøres til ogsaa at omfatte analytiske næsten periodiske funktioner.“

Og þar á eftir komu reglugerðirnar. „Adgangen staar aaben for enhver, der paa den tid svaret indsendes, ikke er fyllt 30 aar. Besvarelsen skall inleveres inden 15 januar 1951." Svo stendur: „Den til medaljen tilkendes faar naar han navngiver sig ett honorar paa 1000 kroner. Avhandlingerne maa kun betegnes med motto eller mærke medens forfatterens navn, fodselsesdag og aar skal angives paa en sedel i et vedlagt lukket konvolut, der er betegnet med samme mærke som afhandlingerne. Navnesedler till afhandlinger som ikke er tildelt et pris bliver ikke aabnede."

Það var sem sagt engu að tapa á þessu. Þó maður ynni ekki til neins, þá var það engin æruskerðing. Mér fannst mjög freistandi að eiga við þetta.

RS: Þetta er nú greinilega runnið undan rifjum Haralds Bohr! Eða er það ekki?

SH: Jú eða kannske Jessen ennþá meira. Að vísu var gallinn á þessu, að ég hafði ekki hugmynd um hvað próblemið var og mér fannst ég ekki geta beðið neinn um að skýra það út fyrir mér heldur. Mér fannst ég ekki geta spurt neinn að þessu vegna þess að það átti að gera þetta leynilega. Ég náði mér þó í bók Nevanlinna, sem hét *Eindeutige Analytische Funktionen.* Þó ég væri nú slakur í topológíu, þá komst ég nú að því hvað aðalsetningar þessarar Nevanlinna-teóríu voru. Það var ekki fyrr en í júní, sex mánuðum seinna, að ég gerði mér grein fyrir því hvað vandamálið gekk út á, af því að það er talað um „analytiske funktioner som er periodiske i en halvplan", en Nevanlinna-teórían var um föll á skífu. En ef maður tekur innsetninguna $z = e^s$, þá verða föllin lotubundin í s. Þá er það spurningin hvort hægt er að alhæfa frá lotubundnum föllum í s yfir í næstum lotubundin föll í s. Þá var það nokkuð klárt hvað átti að gera.

Þá fór ég að lesa mér svolítið til um greinar Jessens, af því að hann hafði alhæft formúlu Jensens um núllpunkta í skífu yfir í næstum lotubundin föll. Hjá Jessen voru þetta núllpunktar í lóðréttri ræmu. Ég tók eftir því, eftir að hafa hugsað dálítið um það, að það var von um að sanna fyrstu aðalsetningu Nevanlinna fyrir næstum lotubundin föll út af þessari formúlu Jessens og það var ekkert mjög erfitt. Að vísu þurfti ég að gera ráð fyrir að í Dirichlet-röðinni fyrir þessi næstum lotubundnu föll, þá þyrfti að vera minnsti veldisvísir. Það var flokkur af næstum lotubundnu föllum, sem var kallaður „normal" næstum lotubundin föll. Það gerði hlutina talsvert einfaldari og ég hef ekki enn þann dag í dag losnað við þá forsendu.

Svo var náttúrlega aðalatriðið eftir. Það var önnur aðalsetning Nevanlinna. Það var ansi flókið að alhæfa hana og það var nú sem mestur tíminn fór í. Setningin hjá Nevanlinna er dálítið flókin og sönnunin er mjög löng, en hjá mér var þetta miklu verra því það eru svo mörg tæknileg atriði sem koma fram.

Sönnun mín er 50 síður. Afleiðingar af þessu voru „defektrelationir" alveg eins og hjá Nevanlinna, en það þurfti dálítið nýjar aðferðir til að sanna þær.

Nú, svo var líka að hjá Nevanlinna eru föllin nærfáguð, en nærfáguð næstum lotubundin föll eru nauðsynlega fáguð. Ég hugsaði nú svolítið um þetta líka eftir að ég kom til Princeton, en þá var ég að fá áhuga á öðru og ég bjó þetta aldrei til prentunar fyrr en að það var 100 ára afmæli Haralds Bohr árið 1986. Þá gróf ég nú upp þessa grein og hélt erindi um aðalniðurstöðurnar, án sannana að vísu.

RM: En þú fékkst verðlaunin?

SH: Já, svo ég fékk verðlaunin fyrir þetta, gullpening upp á 50 grömm og þúsundkall. Þetta var tilkynnt sumarið eftir.

RS: Og hvað gátu nú ungir stúdentar gert við 1000 danskar krónur á þessum tíma?

SH: Ég bjó þá Hagemanns kollegium, þar sem ég hafði fæði og húsnæði. Ég borgaði 150 krónur á mánuði. Það sýnir að það munaði svolítið um þetta. En aðalgagnið sem ég fékk að þessu var að læra að vinna sjálfstætt, af því að ég fékk enga hjálp neins staðar frá. Mér fannst það vera mín skylda að tala ekki við neinn um þetta.

RS: Hefur þú nokkurn tíma fengið að vita hverjir kepptu við þig?

SH: Þetta var ekki keppni við neinn (nema mann sjálfan). Fleiri en einn geta fengið verðlaunin. Í næsta hefti af Festskrift háskólans er skrifaður ritdómur um allar greinarnar, jafnvel um þær sem ekki fá nein verðlaun. Það er um tvenns konar verðlaun að ræða, það er annað hvort gullmedalía með peningunum eða það sem var kallað „accessit", sem sagt heiðarleg tilraun sem fékk smá verðlaun, kannske 500 krónur, en ekki neitt meira.

RM: Ertu þarna útskrifaður úr Kaupmannahafnarháskóla? Ferðu þá beint til Princeton?

SH: Við skulum sjá, ég sendi þetta inn 15. janúar 51. Síðan tek ég svokallaðan „magisterkonferens", sem er skriflegt og munnlegt próf og ritgerð. Þessa ritgerð gat ég notað í það, svo ég slapp að vísu frekar billega þess vegna. Einhvern veginn hugsaði ég ákaflega lítið um framtíðina, en það var bara tilviljun að ég frétti um að það voru Fullbright-styrkir til háskólanáms í Bandaríkjunum. Annars hafði ég dálítinn augastað á að kenna stærðfræði á Akureyri. Mér þótti vænt um að vinur minn frá Höfn, Jón Hafsteinn Jónsson, fór í þá stöðu síðar. Svo sótti ég um Fullbright-styrk og fór þá til Princeton. Það var að mörgu leyti þægilegasti staðurinn fyrir mig til þess að fara á, vegna þess að prógrammið þar var svo laust í reipunum. Það voru að vísu kúrsusar, en það voru ekki próf í hverjum kúrsusi, eins og gerist yfirleitt við háskóla vestra. Það hefði hentað mér miklu síður að þurfa að taka próf í hverjum einasta kúrsi.

RS: Voru ekki Evrópumenn í stærðfræði, eðlisfræði, efnafræði og raunar öllum raungreinum allir á leið vestur til Bandaríkjanna á þessum árum?

SH: Ekki þekki ég tölur um það, en í Danmörku voru bara örfáir sem útskrifuðust í stærðfræði á þessum árum. Ég held að ég hafi verið sá eini sem tók prófið í janúar 1952. Síðan voru nokkrir fleiri sem tóku það um sumarið, en þeir stefndu ekki til neinna rannsókna í stærðfræði.

RS: Hvernig var með tengsl Danmerkur við önnur lönd á þessum tíma, segjum við Frakkland, Svíþjóð og Þýskaland? Var kannske stærðfræðin alveg í molum í Þýskalandi á þessum áratug, þannig að þangað var ekkert að sækja?

SH: Já, stærðfræðin var í molum í Þýskalandi ekki aðeins stríðsins vegna, en einnig af því að svo margir stærðfræðingar flúðu undan ofsóknum nazista fyrir stríð. Í Frakklandi var hins vegar margt að gerast í stærðfræði á þessum árum. Það var dálítið samband við Lund. Ég man eftir því að ég fór stundum til Lundar. Það var nú aðallega vegna þess að ég þekkti Íslending þar sem hét Björn Lárusson, en svo kynntist ég þar nokkrum stærðfræðingum líka. Það var stærðfræðiklúbbur þarna á institútinu í Höfn sem var kallaður Parentesen. Einhvern tíma fór klúbburinn í ferð til Lundar, svona 20 manns. Þar voru einhverjir stærðfræðifyrirlestrar og einhver hátíðahöld. Ég man nú ekki hvert tilefnið var. Ég sá þar Marcel Riesz í fyrsta skipti.

RS: Hann var aðalprófessorinn þarna.

SH: Já, hann var mjög áberandi.

RS: Var Gårding orðinn prófessor þá? Hann varð það mjög ungur.

SH: Þetta mun hafa verið 1949. Ég er nú ekki viss um það, en ég man eftir honum og ég vissi vel að Svíar voru talsvert virkari í stærðfræðirannsóknum en Danir á þeim tíma. Dönsk stærðfræði var dálítið lengi að ná sér eftir stríðið.

RS: Voru margir kennarar við skólann eða virkir vísindamenn, sem flúðu Danmörku á stríðsárunum?

SH: Bohr sjálfur fór til Svíþjóðar og Fenchel líka. Þeir voru báðir held ég við Lund. Fenchel var prófessor á Polyteknisk læreanstalt, en hann var sá sem kannske hafði mest áhrif á mig vegna þess að hann var geómetrískur. Ég fékk lánaða hjá honum bók sem hann hafði skrifað um prójektíva geómetríu, sem var ljómandi rit. Ég hitti hann einstöku sinnum. Eftir að þessi erfiða „forprøve“ var búin, þá var maður ákaflega frjáls og ég hefði getað lokið þessu námi miklu fyrr heldur en ég gerði.

RS: Við höfum hoppað dálítið fram og til baka, en nú erum við komnir til Princeton 1952. Hverjir voru þínir helstu kennarar þar?

SH: Það var Bochner, Feller og Artin í algebru og Fox í topológíu. Svo var ég í seminari sem Artin hafði, þar sem nemandi hans John Tate hélt reglulega fyrirlestra einu sinni í viku. Það var um algebrulega talnafræði og ég hafði lesið mér svolítið til í því fagi. Ég hafði lesið bókina hans Hecke í Kaupmannahöfn, þannig að ég var sæmilega fær um að skilja það sem hann talaði um, enda var hann ágætur fyrirlesari, John Tate. Bochner hélt fyrirlestra um komplexa analysu og Feller í real analysu. Þetta var nú að mörgu leyti endurtekning frá því sem ég hafði áður haft. Svo voru þarna einstöku fyrirlestrar á Institute for Advanced Study. Beurling var nýkominn þangað og hann hafði vikulega seminör. Það passaði vel fyrir mig, en aðalgreinarnar í Princeton voru topológía og komplex analysa í fleiri breytistærðum, mennirnir þar voru Spencer og Kodaira. Ég lagði það nú ekki fyrir mig.

RS: Hvenær kom að því að velja efni fyrir doktorsritgerð?

SH: Fyrsta árið hafði ég nú ekki neitt sérstakt í huga. Ég fór að setja mig svolítið inn í „abstract harmonic analysis“ af því að það var dálítið tengt næstum lotubundnum föllum og ég hafði lesið þessa bók hans Maak, *Fastperiodische Funktionen*, sem er skrifuð frá grúputeóretísku sjónarmiði, mjög auðveld bók aflestrar. Þá um sumarið 1953 var ég í Princeton og þá datt mér í hug próblem í sambandi við næstum lotubundin föll, svokallað „multiplier problem“. Fourier-röð fyrir næstum lotubundið fall skrifar maður sem $\sum a(\lambda)e^{i\lambda x}$ og leggur saman yfir allar rauntölur λ. Þetta er samt röð vegna þess að stuðullinn $a(\lambda)$ er núll nema fyrir teljanlega mörg λ og spurningin var: Með hvaða föllum af λ má maður margfalda $a(\lambda)$, þannig að þetta verði áfram Fourier-röð? Þetta var gamalt próblem að vísu, en ég vissi að það var langt frá því að vera leyst. Sértilfelli af þessu próblemi er þegar þessi margfaldari tekur bara gildin 0 eða 1. Þá er spurningin: Hvaða mengi í $\mathbf{R}$ eru þau, þannig að ef maður einskorðar λ við það mengi og heimtar að röðin sé Fourier-röð til að byrja með, þá haldi hún áfram að vera Fourier-röð? Mér tókst nú að leysa þetta margfaldarapróblem.

RS: Er hægt að lýsa lausninni í einföldu máli?

SH: Sérhver margfaldari er línuleg samantekt af jákvætt ákvörðuðum föllum, en þau eru ekki samfelld. Venjulega eru jákvætt ákvörðuð föll samfelld, en þessi eru það ekki. Það má sanna að ef jákvætt ákvarðað fall er mælanlegt, þá er það samfellt, þannig að þessi föll þurfa ekki einu sinni að vera mælanleg.

RM: Hvað þýðir að fall sé jákvætt ákvarðað?

SH: Ef maður tekur hvaða punkta sem er x_i og x_j, þá er fylkið $(f(x_i)f(x_j))$ jákvætt ákvarðað (positive definite). Það var sumarið 1953 sem ég sannaði þetta og þetta var í raun mjög auðvelt að sanna með abstrakt aðferðum. Næstum lotubundin föll má skilja best á grúpufræðilegan hátt, þ.e.a.s. maður hefur **R**, svo tökum við **R** með diskret topológíu og síðan karaktergrúpuna fyrir þessa diskretu grúpu. Þetta er stundum kallað Bohr-þjöppun, að vísu að ástæðulausu því Bohr notaði hana aldrei að ég held. Þetta er þjöppuð grúpa $\tilde{\mathbf{R}}$, sem inniheldur **R** og ef maður hefur næstum lotubundið fall á **R**, þá er hægt að útvíkka það yfir í samfellt fall á $\tilde{\mathbf{R}}$, og öfugt. Þannig að teórían fyrir næstum lotubundin föll á **R** er sú sama og teórían fyrir samfelld föll á þjappaðri abelskri grúpu. Þetta notaði ég, en þessi aðferð hafði ekki verið notuð áður. En ef maður notar þetta, þá er sönnunin mjög auðveld. Ég bætti svo við ýmsum afleiðingum.

RS: Þannig að frumlega hugmyndin er fólgin í því að nota grúpuna.

SH: Já, hún var ekki vel þekkt og þó við hefðum seminör í næstum lotubundnum föllum í Kaupmannahöfn, þá var aldrei minnst á þetta, þó það væri að mörgu leyti aðalatriðið. Fyrsta bókin sem ég las í Princeton var eftir Pontrjagin um topológiskar grúpur. Þá kemur þessi karaktergrúpa inn.

Bochner var í fríi, seinna misserið, vorið 1953, þannig að ég talaði aldrei við hann um þessar niðurstöður. Svo kemur hann um haustið 1953 og þá er ég búinn með þetta. Þá sagði hann: „Já, þetta er nóg, ... you can say you have a thesis“. Þetta kom alveg flatt upp á hann, því á þeim árum þegar hann hugsaði um næstum lotubundin föll hafði grúpan $\tilde{\mathbf{R}}$ ekki komið fram.

RM: Við ættum kannske að skjóta því hér inn, af því að þú hefur ekki sagt frá því, að formlega séð var Bochner leiðbeinandi þinn.

SH: Hann var í raun ekki leiðbeinandi fyrr en ég var búinn að skrifa ritgerðina.

Svo hélt ég áfram á þessu sviði með Banach-algebrur. Þá voru þær orðnar dálítið móðins og Beurling hafði meira að segja farið svolítið inn á þær í sínu seminari. Bók Loomis um *Abstract Harmonic Analysis* var þá komin út og ég fór að setja mig svolítið inn í það líka. Aðalparturinn í doktorsritgerðinni var ekki þetta heldur nokkuð sem ég kallaði „derived algebra“ í Banach-algebrum. Ég veit ekki hvort þið hafið kynnst Banach-algebrum. Í Banach-algebru er náttúrlega norm frá byrjun, en svo er annað norm sem er kallað „the spectral norm“ og annað er minna en hitt. Þá kom ég með spurningu: Hvaða stök í algebrunni hafa þann eiginleika að margföldun með því staki er samfelld vörpun frá öðru norminu yfir í hitt. Þessi marföldun er virki, sem hefur sitt eigið norm og með því normi er það ný Banach-algebra. Ég hafði ýmsar setningar sem gilda almennt um þessar algebrur, en það var gaman að líta á ýmis dæmi. Til dæmis ef maður tekur L^1 á þjappaðri grúpu, þá er L^2 afleidda algebran af L^1. Ef grúpan er ekki þjöppuð er afleidda algebran 0. Þetta kom síðar í bók *The multiplier problem* eftir R. Larsen.

RS: Er auðvelt að sjá þetta?

SH: Nei, það er í sjálfu sér ekki auðvelt. Það þarf að sanna að virkjanormið, sem fæst með margfölduninni, sé jafngilt L^2. Sá virki hefur alltaf norm sem er minna en L^2-normið og stærri en fasti sinnum L^2-normið. Sá fasti er til fyrir sérhverja þjappaða grúpu (víxlna eða ekki), en er háður grúpunni. Hann er kallaður Helgason-fastinn og enginn veit hver hann er.

RS: Ekki einu sinni Helgason sjálfur!

SH: Ég er sannfærður um að hann er $1/\sqrt{2}$ fyrir hringinn.

RS: Jahá?! Hvernig tengist þá $1/\sqrt{2}$ hringnum?

SH: Það er eftir talsverðum útreikningum.

RS: En er þetta ekki staðfest, eða hvað!?

SH: Nei, það er ekki staðfest. Ég varð sannfærður um það á sínum tíma, en hef ekki gengið alveg úr skugga um það. En aðferðin til þess að gera þetta er að nota Hölder-ójöfnur, þar sem maður miðar L^4-normið við L^1 og L^2. Þannig fær maður mat á L^1. Það kom út úr þessu sönnun á setningu eftir Littlewood, sem segir að ef maður hefur Fourier-röð fyrir L^1-fall, sem heldur áfram að vera Fourier-röð eftir að maður margfaldar stuðlana með þætti með normi 1, þá hlýtur það að hafa verið L^2-fall til að byrja með. Ég held að Littlewood hafi meira að segja sýnt, að það er nóg að einskorða sig við -1 og 1. Þá datt mér í hug í sambandi við þetta önnur spurning: Ef maður er með Fourier-röð fyrir L^1-fall, þannig að það má umraða stuðlunum við veldisvísisföllin, þ.e.a.s. maður heimtar að fyrir sérhverja umröðun σ af heilu tölunum sé $\sum a(\sigma(n))e^{inx}$ alltaf Fourier-röð fyrir eitthvert fall í L^1, þá sannaði ég líka að þetta hlýtur að vera L^2-fall til að byrja með.

RS: Varstu með þetta í ritgerðinni líka?

SH: Já, ég var með þetta líka. Sönnunin er mjög stutt. Doktorsritgerðin kom út í tveimur pörtum. Banach-algebruatriðin komu út í Annals of Mathematics undir titlinum „Multipliers of Banach Algebras", en efnið um næstum lotubundin föll kom út í Mathematica Scandinavica. Báðir hlutarnir komu út 1955–6.

Bochner var náttúrlega leiðbeinandi minn, en hann var alltaf að stinga upp á hinum og þessum vandamálum, sem ég hafði engan áhuga á. Það kom í ljós að okkar smekkur var gerólíkur. Hann var alltaf að segja „Analysis deals with inequalities. Það er allt of fáar ‚inequalities' hjá þér". Ég hefði þá átt að sýna honum sönnun mína á víkkuninni á annarri aðalsetningu Nevanlinna. Þar eru 50 síður af ójöfnum. En hann var mjög sympatískur, mjög uppörvandi.

RM: Var Bochner Bandaríkjamaður?

SH: Nei, hann kom frá Póllandi. Hann var interessant karakter. Hann skrifaði sína doktorsritgerð á sama tíma og Bergman og hann kom með það sem nú er kallað „Bergman kernel function“. Hins vegar missti hann alveg af bátnum vegna þess að hann hafði ekki Bergman-metrikina. En hann hafði kjarnafallið sjálft. Það var í doktorsritgerð hans frá 1922. Svo koma greinar Haralds Bohr. Bochner verður mjög spenntur fyrir þeim og hann fer að stúdera nýjan flokk af föllum, sem hann kallaði normal lotubundin föll. Hann sannar að það eru svipaðar setningar sem gilda fyrir normal lotubundin föll eins og fyrir næstum lotubundin föll. Hann skrifaðist mikið á við Bohr um þetta og ég hef lesið þær bréfaskriftir þegar ég hef verið í Höfn. Svo kemur í ljós að þetta eru sömu föllin.

RS: Skilgreiningarnar eru væntanlega mjög ólíkar til að byrja með.

SH: Gerólíkar. Skilgreining Bochners er í rauninni miklu betri af því að hún passar fyrir grúpur. Skilgreiningin er þannig að ef maður tekur allar hliðranir af fallinu, þá er það tiltölulega þjappað mengi. Það má finna samleitna hlutrunu í sérhverri runu. Þetta passar við allar grúpur, jafnvel ekki kommútatívar grúpur.

RS: Hver sannaði að þessir flokkar væru þeir sömu?

SH: Þetta leiðir af því sem Bochner sannaði. Eftir á var þetta svo sannað beint. Hann hefur sjálfsagt orðið fyrir miklum vonbrigðum. Þetta er ekki í bók Bohr, en er í bók Besicovich um efnið. Svo kom hann til Kaupmannahafnar um það bil 1929 frá Þýskalandi, ég held að hann sé doktor frá Berlín. Svo fær hann stöðu í München, en fer til Bandaríkjanna fyrir Hitler-tímann. Hann var gyðingur. Hann hefur misst dálítið af bátum á sínum ferli. Til dæmis kom hann með Zorns lemmu, en að vísu var formúleringin ekki eins einföld og hjá Zorn, en hann sannaði að hún væri jafngild „axiom of choice“, valfrumsendunni. Hann sannaði líka að staðþjappað Banach-rúm væri af endanlengri vídd. Hann formúleraði þetta ekki á þennan hátt, en hann sannaði það í tilfelli, þar sem sönnunin var alveg almenn. Bochner lagði mikilvægan skerf í margar greinar stærðfræðinnar.

RM: Við þekkjum hann aðallega fyrir Bochner-heildið.

SH: Já, það er líka til.

RS: Við tvinnfallafræðingar þekkjum hann vel fyrir Bochner-Martinelli formúluna fyrir fáguð föll sem er mikið notuð í tvinnfallagreiningu.

SH: Hann er mjög í tísku núna í diffurrúmfræði. Þessi „Bochner-technique“ kemur mjög oft fyrir núna. Bochner-integralið er ekki sérlega merkilegt.

Hér nefnir Sigurður diffurrúmfræði, fag sem hann er mjög þekktur fyrir. Setjum við hér skil og verður seinni hluti birtur í næsta fréttabréfi.

Þrautahorn

Robert Magnus

Við byrjum á því að setja fram lausnir á þrautum frá haustbréfinu.

Þraut 4. Á pappírsblaði eru tvær ósamsíða línur en þær skerast ekki á blaðinu. Milli þeirra er tilgreindur punktur. Hvernig er hægt að teikna línu gegnum punktinn sem myndi liggja gegnum skurðpunkt línanna tveggja, með því að nota reglustiku eina saman og án þess að teikna neitt utan blaðsins?

Lausn. Þessi þraut byggist á setningu Desargues eða nánar tiltekið andhverfingu hennar. Setning Desargues er sem hér segir: Látum PAB og $P_1A_1B_1$ vera tvo þríhyrninga þannig að línurnar PP_1, AA_1 og BB_1 eru sampunkta. Látum U vera skurðpunkt línuparsins PB, P_1B_1, V skurðpunkt línuparsins AB, A_1B_1, og W skurðpunkt AP, A_1P_1. Þá eru punktarnir U, V og W samlína.

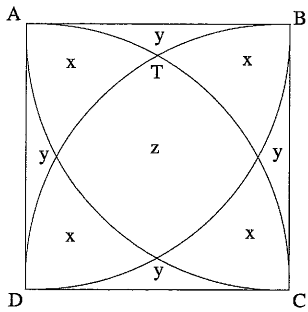
Andhverfing þessarar setningar hljóðar svo: Látum PAB og $P_1A_1B_1$ vera tvo þríhyrninga þannig að U, V og W (skilgreindir að ofan) eru samlína. Þá eru PP_1, AA_1 og BB_1 sampunkta.

Jón Hafsteinn Jónsson og Helgi Jónsson sendu báðir réttar lausnir en Helgi benti á að þessi þraut finnst í bókinni *What is mathematics?* eftir Courant og Robbins. Það eru margar leiðir til að teikna inn hjálparlínurnar. Ég fylgi hér aðferð Helga sem hefur þann kost að allar hjálparlínurnar liggja milli tilgreindu línanna l og m. Við köllum tilgreinda punktinn P. Við byggjum upp þá flatarmynd sem kemur fram í andhverfingu setningar Desargues. Ég læt lesendur eftir að teikna mynd þar sem viss atriði eru breytileg eftir því hvernig punktar og línur eru valdar í skrefum 1, 2 og 3. Skrefin eru eftirfarandi:

1. Veljum A á l og B á m.
2. Veljum línu n sem sker línurnar AP, BP og AB í svæðinu milli l og m. Köllum þessa skurðpunkta W, U og V í þessari röð.
3. Veljum A_1 á l.
4. Framlengjum A_1V þar til hún sker m og köllum skurðpunktinn B_1.
5. Teiknum línuna A_1W.
6. Teiknum línuna B_1U og finnum skurðpunkt hennar við A_1W. Köllum þennan punkt P_1.
7. Línan PP_1 er sú lína sem beðin var um.

Þraut 5. Einingarferningi er skipt í níu svæði með því að teikna fjóra 90° boga hvern með geisla 1 og þannig að miðjur þeirra eru sitt í hverjum hornpunkti ferningsins. Ákvarðið flatarmál hvers svæðis.

Lausn. Vegna samhverfu hafa svæðin níu einungis þrjú mismunandi flatarmál x, y og z eins og við höfum merkt inn í myndinni.



Heildarflatarmál ferningsins er 1 þannig að

$$4x + 4y + z = 1.$$

Boginn ATC er 90° og afmarkar hringgeira með geisla 1 og flatarmál $\pi/4$. Því fæst

$$3x + 2y + z = \frac{\pi}{4}.$$

Þríhyrningurinn CTD er jafnhliða þannig að bogarnir TC og TD eru 60° hvor. Þeir afmarka ásamt CD svæði sem er að flatarmáli tvisvar sinnum hringgeiri að boga 60° mínus þríhyrningurinn CTD, samtals $\pi/3 - \sqrt{3}/4$. Þannig fæst þriðja jafnan

$$2x + y + z = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Þessar þrjár jöfnur mynda línulegt jöfnuhneppi sem er auðvelt að leysa. Lausnin er:

$$x = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}, \quad y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}, \quad z = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

(Leyst af Kára Ragnarssyni og Helga Jónssyni.)

Þraut 6. Runa x_n uppfyllir $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$, $x_1 > 0$. Ákvarðið $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n + 1}$.

Lausn. Ljóst er að $x_{n+1} \geq x_n$ fyrir öll n og því gildir $x_n \geq x_1 > 0$. Af því leiðir að $x_{n+1} \geq x_1^2 + x_n$ þannig að $x_n \to \infty$. Jafnan $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ er jafngild

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n^2 + x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n + 1}$$

sem leiðir til

$$\frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Við fáum því kíkisröð

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{x_1}.$$

(Leyst af Kára, Jóni Hafsteini og Helga.)

Ég þakka þeim sem sendu mér bréf og hvet um leið lesendur til að senda tillögur um þrautir. Vinsamlega látið lausn fylgja. Þekktar sígildar setningar henta ekki en lesendur sem hafa fundið nýstárlega sönnun á slíkri setningu gætu sent okkar hana því að það kemur til greina að birta slíkt efni sem stutta grein.

Hér kemur nýr skammtur af þrautum.

Þraut 7. Á pappírsblaði eru tvær ósamsíða línur en þær skerast ekki á blaðinu. Teikna skal helmingalínu hornsins milli línanna tveggja með hringfara og reglustiku en án þess að teikna neitt utan blaðsins.

Þraut 8. Það er vel þekkt að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er ósamleitin. Ef við sleppum öllum liðum $1/n$ þar sem tölustafurinn 0 kemur fyrir í tugaframsetningu tölunnar n, er röðin þá samleitin eða ósamleitin?

Þraut 9. Ef við köstum tveimur venjulegum teningum þá eru líkindi þess að fá summurnar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 jöfn $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{36}$, í þessari röð. Líkindi að fá aðrar útkomur eru að sjálfsögðu 0. Er hægt að merkja hliðar tveggja teninga (sem hafa hvor sex hliðar) jákvæðum heilum tölum á annan hátt, þannig að líkindi þess að fá ofanskráðu útkomurnar eru þau sömu og fyrir venjulega teninga?

Tveggja stofnfélaga minnst

Kristín Halla Jónsdóttir

Í rúm tuttugu ár hef ég kennt stærðfræði við Kennaraháskóla Íslands. Oft þegar róðurinn hefur verið þungur og erfiðlega gengið að glæða raunverulegan áhuga nemenda á stærðfræðinni hefur rifjast upp fyrir mér hvílíkum afbragðskostum sumir kennara minna bjuggu yfir. Í því sambandi langar mig sérstaklega að minnast tveggja þeirra: Björns Bjarnasonar og Guðmundar Arnlaugssonar.

Björn Bjarnason og Guðmundur Arnlaugsson voru kennarar mínir í Menntaskólanum í Reykjavík á árunum 1960–1963. Björn kenndi mér stærðfræði og Guðmundur eðlisfræði. Minningin um þessa kennara er sveipuð ævintýraljóma í huga mér. Þeir sögðu frá, útskýrðu, spurðu spurninga, vörpuðu ljósi á verkefni (sem gátu virst nemendum ofviða), hlustuðu á okkur nemendur og rökræddu við okkur. Þeir lögðu fyrir okkur metnaðarfull verkefni sem við, oftar en ekki kvíðum fyrir að glíma við og líka því að fá að heyra hvernig okkur hefði til tekist. Aldrei brást það að næst þegar þessir mætu kennarar mættu í kennslustund lá niðurstaðan fyrir og var síðan kynnt á þann hátt, fyrir hverjum og einum, að mikið mátti af læra. Og þegar útkoman var slík að auðvelt hefði verið að missa móðinn varð uppörvun og hvatning þeirra Björns og Guðmundar oftar en ekki til þess að nemandinn fylltist baráttuvilja og hugsaði: „Næst skal ég sko sýna … “

Björn Bjarnason og Guðmundur Arnlaugsson áttu það sameiginlegt að vera mannvinir og að sýna nemendum sínum einstaklega hlýtt og hvetjandi viðmót. Þeir voru ósparir á hvatningarorð og þeir voru sem kennarar léttir í lund, hvor á sína vísu. Þeir kunnu að vekja forvitni nemenda og löngun til að leysa stærðfræðilegar og eðlisfræðilegar gátur. Og ég met það mikils að báðir þessir kæru kennarar mínir í menntaskóla skyldu hvetja og hrósa „stelpu í stærðfræðideild“ þegar það átti við, engu síður en þeir gerðu við skólabræður hennar, því á þessum tíma var ennþá rík sú skoðun að stærðfræði og raungreinar lægju ekki fyrir stúlkum.

Eftir stúdentspróf átti ég því láni að fagna að hafa frekari stærðfræðileg kynni af bæði Birni Bjarnasyni og Guðmundi Arnlaugssyni. Björn varð kennari minn í stærðfræði við Háskóla Íslands og lagði mér þar til veganesti sem reyndist heldur betur standa fyrir sínu í framhaldsnámi á erlendri grund. Ég minnist tiltekinna kennslustunda hans eins og þær hefðu gerst í gær. Ég minnist einnar þegar ég tel mig hafa nánast orðið fyrir stærðfræðilegri opinberun. Með Guðmundi átti ég hins vegar eftir að starfa um árabil, að afloknu framhaldsnámi. Fyrst þegar hann tók að sér kennslu í stærðfræðivali í Kennaraháskóla Íslands og síðar þegar við störfuðum saman í orðanefnd Íslenska stærðfræðafélagsins. Guðmundur var einstakt ljúfmenni í allri samvinnu. Í Kennaraháskólanum var hann brautryðjandi eins og oft áður, t.d. hannaði hann fyrsta námskeiðið í „Þrautalausnum.“ Í orðanefnd Íslenska stærðfræðafélagsins var hann í fremstu víglínu enda viðurkenndur frumkvöðull á sviði nýyrðasmíðar í stærðfræði. Og fyrrgreind ljúfmennska hans og sú virðing samnefndarmanna sem hann naut stuðlaði ótvírætt að góðum starfsanda í nefndinni.

Björn Bjarnason og Guðmundur Arnlaugsson eru nú báðir fallnir í valinn. Þeirra skarð sem kennara er vandfyllt en sá nemandi sem þetta ritar og fetaði í fótspor þeirra veit að hann hefur mætt sterkari til leiks vegna hins góða veganestis sem þessir öðlingar útbjuggu honum.

Alþjóðlega stærðfræðiárið 2000

Anna Kristjánsdóttir[3]

Fyrir átta árum samþykkti alþjóðaþing stærðfræðinga tillögu um Alþjóðlega stærðfræðiárið 2000. Hugmyndin að baki var fjölþætt eins og hér segir:

> Að beina sjónum að stærðfræðiviðfangsefnum 21. aldarinnar.
>
> Að varpa ljósi á lykilhlutverk stærðfræði, hreinnar og hagnýttrar, í allri þróun.
>
> Að fjalla um ímynd stærðfræði í hugum almennings og stjórnvalda og leitast við að kynna í hverju grundvallarhlutverk stærðfræði í upplýsingasamfélagi er fólgið.

Hið fyrstnefnda vísar að nokkru í fyrirlestur sem stærðfræðingurinn David Hilbert hélt árið 1900 á alþjóðaráðstefnu stærðfræðinga en þar fjallaði hann um þau stærðfræðilegu viðfangsefni sem glímt myndi verða við á öldinni sem í hönd færi. Hilbert reyndist sannspár um það sem hann tiltók en engu að síður sáu menn ekki fyrir þá gífurlegu nýsköpun sem orðið hefur í stærðfræði á tuttugustu öldinni. Og rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar, sem fleygt hefur fram síðustu áratugina, gerðu menn sér heldur ekki í hugarlund í upphafi aldarinnar.

Stærsti viðburðurinn í alþjóðlegu samhengi er Heimsráðstefnan um stærðfræðimenntun (ICME 9) sem haldin verður í Japan í ágúst. Fjöldi annarra ráðstefna verður að sjálfsögðu á árinu og mjög víða eru kynningar fyrir almenning

[3]Anna Kristjánsdóttir er prófessor við KHÍ og í fyrirsvari fyrir íslensku nefndinni um alþjóðlega stærðfræðiárið.

af ýmsum toga og einnig kynningar í skólum eða meðal kennara. Í stuttu máli má segja að reynt sé að að vekja athygli á mikilvægi stærðfræðiþekkingar og að alls staðar sé vel staðið að stærðfræðikennslu.

Í nóvember 1999 átti ég frumkvæði að því að kalla saman til fundar í von um að áhugi væri á að mynda íslenska samstarfsnefnd um alþjóðlega stærðfræðiárið 2000. Þeir, sem boðaðir voru, tóku erindinu mjög vel en þetta er í fyrsta sinn sem fulltrúar svo margra stofnana og stærðfræðifélaga sameinast um átak í stærðfræði. Auk mín eru í nefndinni Benedikt Jóhannesson formaður Íslenska stærðfræðafélagins, Ragnheiður Gunnarsdóttir formaður Flatar, Robert Magnus stærðfræðingur við Háskóla Íslands og Sveinn Ingi Sveinsson stærðfræðikennari úr stjórn Félags raungreinakennara.

Þær stofnanir og félög hér á landi, sem eiga aðild að starfinu, standa sum fyrir viðburðum en einnig vinnur nefndin að ýmsum verkum. Það sem þegar liggur fyrir er eftirtalið:

> Heimasíða alþjóðlega stærðfræðiársins hérlendis var opnuð snemma í maí og er slóðin að henni `http://wmy2000.khi.is`.
>
> Veggspjald alþjóðlega stærðfræðiársins var sent í alla skóla í byrjun maí til kynningar á stærðfræðiárinu og atburðum þess hér á landi.
>
> Norræn bók, þar sem brugðið er ljósi á stærðfræðikennslu í grunnskólum innan Norðurlandanna, er væntanleg út síðla sumars.
>
> Dagur stærðfræðinnar verður haldinn 27. september í skólum.
>
> Stærðfræðiþrautir er að finna á hverjum miðvikudegi í Morgunblaðinu og verður svo til loka ársins.
>
> Unnið er að undirbúningi þess að sýna röð sjónvarpsþátta Life by the Numbers í ríkissjónvarpinu í haust.
>
> Í undirbúningi eru greinaskrif nokkurra stærðfræðinga í blöð.

Án efa á fleira eftir að bætast við á listann á þessu ári og vonandi verður samstarfið um alþjóðlega stærðfræðiárið 2000 til þess að samstarf haldi áfram hér innanlands um stærðfræði og stærðfræðinám og til þess að leyfa miklu fleirum, en nú eiga þess kost, að kynnast því hve margt forvitnilegt og áhugavert er þar að finna.

Eratosþenes og TEX

Robert Magnus

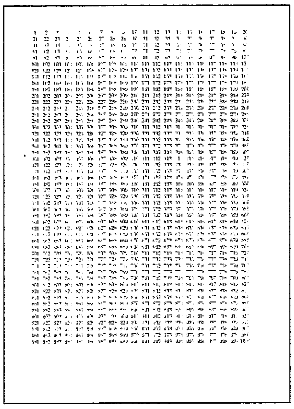
Forritið TEX var hannað af Donald Knuth á 9. áratugnum í þeim tilgangi að búa til falleg skjöl sem innihalda stærðfræði. Stuttu seinna birtist LATEX (frá Leslie LAmport) sem byggist á TEX og er víða notað af stærðfræðingum til að skrifa stærðfræðilegan texta. Notendur eru oft ekki varir við það að TEX er líka *forritunarmál* sem hefur reiknifræðilega hæfni. Ég ætla að sýna hér hvernig nota má TEX til að útbúa sáldur Eratosþenesar fyrir kennslusýningu. Aðferðin byggist með skemmtilegum hætti á hæfni TEX til að telja, en ekki síst að staðsetja blek á pappír með mikilli nákvæmni. Þetta er skemmtilegt kennslutæki og til þess að útbúa það þarf einungis aðgang að TEX, glærur og myndvarpa.

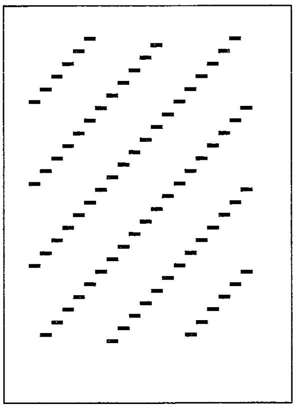
Rifjum fyrst upp að sáldur Eratosþenesar er notað til að finna frumtölurnar milli 1 og N. Tölurnar $1, 2, 3, \ldots, N$ eru skrifaðar upp í lista. Fyrst eru strikuð út öll margfeldi af 2 milli 1 og N, nema 2 sjálft. Síðan er þetta gert með margfeldi af 3, 5, 7, 11 o.s.frv þar til allar frumtölur lægri en $\sqrt{N}$ hafa verið notaðar. Tölurnar sem eftir standa eru allar frumtölur milli 1 og N. (Þessi fullyrðing er ekki alveg nákvæm því að 1 er ekki talin vera frumtala.)

Flestir sem kannast við sáldur Eratosþenesar hafa aldrei reynt að framkvæma það í þeim tilgangi að finna frumtölur fyrir alvöru. TEX getur sett upp tákn í töflu og staðsett þau með mikilli nákvæmni. Hugmyndin er sú að nota TEX einnig til að strika út. Hér er um að ræða flaumrænt tæki en ekki stafrænt. Aðferðin er einnig hagkvæm að því leyti að ekki er þörf á deilingu eða margföldun.

Tölurnar 1 til 1000 komast mjög þægilega fyrir á A4-blaði. Við búum til dæmi um sáldur Eratosþenesar með því að prenta tölurnar á glæru, og útbúa síðan glærur, eina fyrir hverja frumtölu lægri en $\sqrt{1000}$, þar sem koma fyrir svartir kassar sem skyggja á samsettu tölurnar á fyrstu glærunni. Með því að varpa á skjá gegnum allar glærurnar getum við séð allar frumtölur milli 1 og 1000. Fjöldi glæra með svörtum kössum er 11 og svara þær til frumtalnanna 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 og 31. Til að fara upp í 10000 þurfum við 25 glærur með svörtum kössum og blað með allar tölur frá 1 upp í 10000. Það er kannski ekki praktískur möguleiki (þó að við gætum dreift dæminu yfir 10 síður) en fyrir 1 upp í 1000 er það skemmtilegt og praktísk dæmi.

Allt sem þarf er að keyra tvö forrit, hið seinna einu sinni fyrir hverja frumtölu minni en $\sqrt{N}$. Þannig á útkoma þessara tveggja forrita að líta út þegar hún er prentuð:





Takið eftir að hér er um „plain“ TEX að ræða. Yfirleitt er það keyrt með skipuninni „tex“ en það fer auðvitað eftir kerfinu sem maður er að nota. Það væri auðvelt að búa til LATEX útgáfu en ég læt lesandanum eftir að ákveða nauðsynlegar breytingar.

Fyrra forritið skráir allar tölur frá 1 upp í 1000. Þær passa þægilega á eina A4 síðu með 20 tölur á hverri línu. Athugið að línan með &-merkið á að koma fyrir 50 sinnum. Ástæðan er sú að „&“ er „tab“ táknið í TEX. Það virðist ekki vera hægt að segja TEX að búa til 50 × 20 töflu án þess að „&“ komi fyrir 1000 sinnum.

```
          %%%% almennar skipanir sem stýra útliti %%%%
\magnification=\magstep1
\nopagenumbers
\advance\vsize by 3cm
\voffset-1.5cm
\tabskip=0pt
\hsize=18truecm  \hoffset=-1.6truecm

          %%%% skilgreina adressu %%%%
\newcount\tala
  \tala=0
  \def\upptala{\global\advance\tala by1\relax}

          %%%% búa til töfluna; engar auðar línur takk %%%%
\halign{&\hbox to.9truecm{\hss # \upptala \the\tala\hss}\cr
  &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\cr
```

```
          %%% <þessi lína á að koma 50 sinnum fyrir>
  &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\cr    }
\end
```

Seinna forrit prentar svarta kassa til að skyggja á öll margfeldi af frumtölu p nema p sjálft. Það þarf að setja inn frumtöluna í adressuna `\prime` áður en forritið er keyrt. Í dæminu hér er frumtalan jöfn 13.

```
\magnification=\magstep1
\nopagenumbers
\advance\vsize by 3cm
\voffset-1.5cm
\tabskip=0pt
\hsize=18truecm \hoffset=-1.6truecm

          %%%% skilgreina adressur %%%%
\newcount\prime
   \prime=13  %%%%  <setjið hér frumtöluna>

\newcount\res  %%%%<staður í töflunni modúló \prime>
\res=0
\def\upres{\global\advance\res by1\relax}

\newcount\first %%%% <stoppar útstrikun ef gildið er 0>
   \first=0

          %%%% skilgreinir svartan kassa %%%%
\def\blob{\vrule height 7pt width .9truecm depth 0pt}

     %%%% búa til töfluna; engar auðar línur takk %%%%
\halign{&\hbox to.9truecm{\hss # \upres
    \ifnum\the\res=\the\prime
            {\ifnum\the\first=1{}\blob\global\res=0\else
                        \global\first=1\global\res=0\fi}
                                      \else {}\fi\hss}\cr
  &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\cr
             %%% <þessi lína á að koma 50 sinnum fyrir>
  &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\cr   }
\end
```