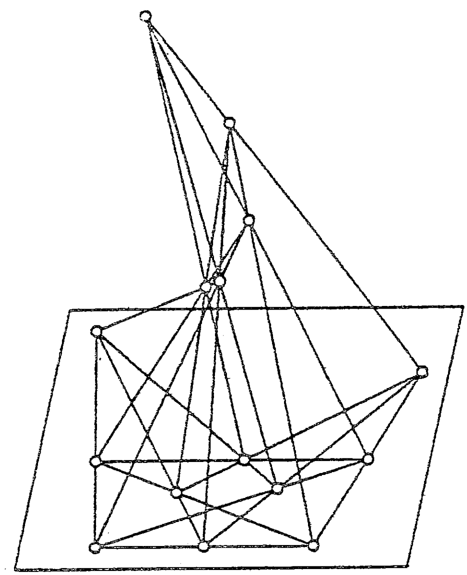
FRÉTTABRÉF

Íslenska stærðfræðafélagsins

1. tbl. 2. árg. Júní 1990

Málþing Bjarna Jónssonar
Grindafræði
Rökfræði
Algebra



Fréttabréf Íslenska stærðfræðafélagsins

Ritstjóri: Ragnar Sigurðsson
Ritnefnd: Ritstjóri ásamt stjórn félagsins

Stjórn Íslenska stærðfræðafélagsins:
Jón Ragnar Stefánsson, *formaður*
Jón Hafsteinn Jónsson, *gjaldkeri*
Sven Þ. Sigurðsson, *ritari*

Póstfang:
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Efni:

Forsíða þessa tölublaðs er skreytt merki „Málþings til heiðurs Bjarna Jónssyni sjötugum", sem verður haldið á Laugarvatni dagana 2.–6. júlí. Hvað myndin táknar er okkur í ritstjórninni hulin ráðgáta, en við höfum góðar vonir um að fá skýringar á henni á þinginu. Við hvetjum alla félaga í Stærðfræðafélaginu til að koma að Laugarvatni fyrsta dag þingsins, því þá verða almennir fyrirlestrar um Bjarna Jónsson og rannsóknir hans í rökfræði, grindafræði og allsherjaralgebru.

Baksíða sýnir mynd úr bókinni „Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit" frá árinu 1525 eftir Albrecht Dürer. Myndin er af *snigilferli*, sem Dürer kallaði *Spinnenlinie* eða *köngulóarferil*. Um snigilferilinn og aðra *veltiferla* fjallar Reynir Axelsson í grein sinni „Orð mér af orði".

FRÁ RITSTJÓRA

Í sumar munu margir erlendir stærðfræðingar og raunvísindamenn leggja leið sína hingað til lands og halda fyrirlestra um fræðasvið sín og áhugasvið. Í þessu tölublaði fréttabréfsins er skýrt frá helsu viðburðum á næstu vikum.

Dagana 15.–30. júní verða hjónin Mary Ellen og Walter Rudin gestir Raunvísindastofnunar Háskólans. Þau eru bæði prófessorar í stærðfræði við Wisconsin–háskóla í Madison í Bandaríkjunum. Próf. Mary Ellen Rudin hefur mest fengist við rannsóknir í grannfræði og hefur skrifað yfir sjö tugi greina á því sviði. Hún hefur tekið mjög virkan þátt í félagsmálum bandarískra stærðfræðinga, bæði í *American Mathematical Society* (AMS) og *Mathematical Association of America* (MAA), og meðal annars verið varaforseti AMS. Próf. Walter Rudin hefur aðallega fengist við rannsóknir í Fourier–greiningu og tvinnfallagreiningu. Hann hefur skrifað ótal greinar um þau efni og auk þess þrjár fræðibækur, *Fourier Analysis on Groups*, *Function Theory in Polydiscs* og *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Hann er væntanlega kunnastur fyrir kennslubækur sínar *Principles of Mathematical Analysis*, *Real and Complex Analysis* og *Functional Analysis*. Þær hafa verið ákaflega vinsælar og eru notaðar við fjölmarga háskóla um víða veröld. Sú fyrstnefnda hefur verið lesin í mörg ár hér við Háskóla Íslands. Þau hjónin halda fyrirlestra á vegum Raunvísindastofnunar dagana 19. og 21. júní. Þann 20. júní mun Walter Rudin halda fyrirlestur á fundi hjá Íslenska stærðfræðafélaginu.

Dagana 25.–28. júní verður 14. þing norrænna raungreinakennara haldið í Reykjavík. Aðalfyrirlesarar þingsins verða þeir prófessorarnir Sigurður Helgason og Moshe Rubinstein. Dagana 2.–6. júlí verður haldið alþjóðlegt málþing á Laugarvatni til heiðurs Bjarna Jónssyni í tilefni af sjötugsafmæli hans. Fyrirlestranir fyrsta dag málþingsins hafa verið valdir þannig að sem flestir stærðfræðingar geti haft gagn og gaman af. Við vonumst eftir því að félagar Stærðfræðafélagsins fjölmenni. Dagana 9.–18. júlí verður norrænn sumarskóli í kennilegri eðlisfræði haldinn á Laugarvatni.

Allir þessir viðburðir hafa verið auglýstir sérstaklega og er fjallað um þá í þessu tölublaði fréttabréfsins.

Jón Ragnar Stefánsson:

BJARNI JÓNSSON SJÖTUGUR

Þótt nokkrir mánuðir séu liðnir frá sjötugsafmæli Bjarna Jónssonar, og þótt ég hafi hugboð um, að honum sé lítt gefið um afmælisskrif um sjálfan sig, þykir hlýða, að í tilefni af málþinginu á Laugarvatni verði gerð nokkur grein fyrir ævi hans og starfi.

Bjarni Jónsson fæddist á Draghálsi í Svínadal 15. febrúar 1920 og voru foreldrar hans Jón Pétursson bóndi þar og síðar á Geitabergi og kona hans Steinunn Bjarnadóttir. Á þessum bæjum tveimur í Svínadal bjuggu afar hans, hvor á sínum bæ, og standa að Bjarna traustir borgfirzkir stofnar. Margir þjóðkunnir menn eru í hinum næsta frændgarði, og er áberandi meðal þeirra frjó skáldgáfa og jafnvel leiftrandi stærðfræðigáfa. Ekki verður það þó rakið á þessum vettvangi, en þess einungis getið, að þeir eru þremenningar að frændsemi Bjarni og Leifur Ásgeirsson, prófessor.

Bjarni lauk stúdentsprófi frá Menntaskólanum í Reykjavík árið 1939 og hélt tveimur árum síðar til náms í Bandaríkjunum, þar sem hann hefur verið búsettur nánast óslitið síðan. Hann lauk B.A. prófi í stærðfræði við háskólann í Berkeley í Kaliforníu árið 1943 og doktorsprófi þar 1946. Hann starfaði síðan við Brown-háskólann, þar sem hann varð „assistant professor“ 1948. Veturinn 1954-55 gegndi Bjarni prófessorsembætti við verkfræðideild Háskóla Íslands sem staðgengill Leifs Ásgeirssonar. Hann var „associate professor“ í Berkeley 1955-56, og þar var hann einnig sem gistiprófessor 1962-63. Árið 1956 fluttist hann til Minneapolis, en þá varð hann „associate professor“ við Minnesota-háskólann og síðan prófessor þar frá 1959 til 1966. Það ár var hann svo kallaður til að gegna sérstöku embætti prófessors (*distinguished professor*), sem stofnað var gagngert handa honum við Vanderbilt-háskólann í Nashville í Tennessee, og hefur hann skipað það síðan.

Bjarni Jónsson hóf starfsferilinn með samstarfi við lærföður sinn til doktorsprófs, Alfred Tarski, sem var einn höfuðsnillingur meðal rökfræðinga á þessari öld; varð samstarf þeirra langvarandi og heilladrjúgt. Fram til 1964 birtust átta tímaritsgreinar eða rit, sem þeir stóðu að saman, en alls telur ritalisti Bjarna nú orðið um 80 rit, sem hér er vitneskja um.

Meginstarf Bjarna hefur verið á sviði algebru og á mörkum algebru og rökfræði, og hafa verk hans verið mjög frumleg og reynzt drjúg uppspretta rannsókna annarra. Tvær greinar hans, er birtust 1956 og 1960, urðu undirstaða blómlegrar sérgreinar í líkanafræði (*model theory*), en fyrri greinina mun hann einmitt hafa unnið að miklu leyti veturinn, sem hann starfaði við Háskóla Íslands. Á sviði grindafræði (*lattice theory*) og í allsherjaralgebru (*universal algebra*) mun Bjarni einna fremstur allra fræðimanna; í mikilsverðum dráttum munu síðari rannsóknir þar hafa mótazt af hans verkum.

Sem fyrr segir starfaði Bjarni veturlangt við Háskóla Íslands fyrir hálfum fjórða áratug, en einnig hefur hann dvalizt hér og starfað um skemmri tíma. Í heimsóknum sínum hefur hann flutt fyrirlestur nokkrum sinnum á fundum í Íslenzka stærðfræðafélaginu. Hinn fyrsta þeirra flutti hann þegar haustið 1948, en þá voru einungis tíu mánuðir liðnir frá stofnun þess. Var það raunar fyrsti félagsfundurinn, sem haldinn var í Háskólanum, og fjallaði Bjarni þar um frumatriði Boole-algebru. Sumarið 1984 kom Bjarni hingað í boði Háskólans til að flytja einn af aðalfyrirlestrunum á 19. norræna stærðfræðingaþinginu, sem hér var þá haldið, og birtist hann síðan í þingtíðindum þess í vandaðri yfirlitsgrein undir heitinu *Arguesian Lattices*.

Bjarna Jónssyni hefur með ýmsum hætti verið sýnd sérstök virðing. Þar er auðvitað fyrst að nefna hið sérstaka prófessorsembætti, sem hann var kallaður til að gegna fyrir hartnær aldarfjórðungi. Í tilefni af sextugsafmæli hans var fjölmennt málþing haldið honum til heiðurs við Vanderbilt-háskólann; var það gert dagana 4.-7. ágúst 1981. Sérstakt bindi af tímaritinu *Algebra Universalis* var síðan tileinkað Bjarna Jónssyni, og voru þar birtir fyrirlestrarnir frá málþinginu (18. bindi (1984), 395 bls.). Bjarna var veitt nafnbót heiðursdoktors við raunvísindadeild Háskóla Íslands á 75 ára afmæli Háskólans árið 1986 og kom hann á þá afmælishátíð. Í tilefni af sjötugsafmæli hans efna svo samstarfsmenn hans víðs vegar um heim til málþings á nýjan leik honum til heiðurs; um það er fjallað sérstaklega hér á næstu opnu. Það er fagnaðarefni, að slíkt þing skuli haldið hér, og er Bjarni boðinn velkominn til þess ásamt eiginkonu sinni, Harriet Parkes, og Kristínu dóttur þeirra.

Jón Ragnar Stefánsson:

MÁLÞING Á LAUGARVATNI TIL HEIÐURS BJARNA JÓNSSYNI SJÖTUGUM

Í fyrravetur barst Íslenzka stærðfræðafélaginu erindi alla leið vestan af Kyrrahafi, þar sem fram kom, að í Honolulu-borg þar í Hawaii-eyjaklasanum væru menn farnir að hugsa til þess, hvernig heiðra ætti Bjarna Jónsson, þegar hann yrði sjötugur, en þá var enn rúmt ár til þess viðburðar. Því var lýst, að meðal stúdenta Bjarna á liðnum árum og áratugum svo og meðal annarra samstarfsmanna hans, sem dreifðir væru víðs vegar um heim, væri áhugi á, að sérstakt málþing, sem þeir hyggðust halda honum til heiðurs, yrði haldið einmitt hér á landi.

Frá þessum fyrstu undirbúningsþreifingum er langur vegur til þess veruleika, sem nú blasir við: Alþjóðlegt málþing til heiðurs Bjarna Jónssyni sjötugum, eða

„The Jónsson Symposium.
A Symposium on Algebras, Lattices, and Logic
To Honor Bjarni Jónsson
On the Occasion of his Seventieth Birthday.“

svo sem útlendingarnir nefna það stutt og laggott á móðurmáli þeirra flestra, verður haldið á Laugarvatni dagana 2.-6. júlí nk. Nú liggur fyrir, að hinir erlendu þátttakendur verða um 70 talsins auk um 20 manna fylgdarliðs. Um tveir þriðjungar gestanna eru frá Bandaríkjunum og Kanada, en í heild eru þeir af fjölskrúðugu þjóðerni, því aðrir gestir eru frá Þýzkalandi, Englandi, Spáni, Ungverjalandi, Tékkóslóvakíu, Rússlandi, Ástralíu, Suður-Kóreu, Suður-Afríku og Saudi Arabíu.

Flestir útlendinganna koma hingað til lands sunnudaginn 1. júlí og fara þá þegar austur að Laugarvatni, þar sem málþingið verður sett kl. 9 morguninn eftir. Fyrsta daginn verður kynning á verkum Bjarna Jónssonar og grein gerð fyrir helztu viðfangsefnum um þessar mundir á fræðasviðum hans. Ætlazt er til þess, að dagskráin þennan dag verði aðgengileg stærðfræðingum utan þessara fræðasviða, og er þess vænzt, að sem flestir íslenzkir stærðfræðingar taki þátt í málþinginu a.m.k. þann dag. Gert er ráð fyrir, að fyrirlestur Bjarna sjálfs verði um miðja vikuna.

Alls verða fluttir um 17 fyrirlestrar í sameinuðu málþinginu og að auki rúmlega 30 fyrirlestrar í samhliða fyrirlestraröðum.

Hlé verður gert á málþinginu á hádegi á miðvikudag til síðdegisferðar um uppsveitir Árnessýslu, en því lýkur með sérstökum hátíðarkvöldverði á föstudag. Þátttakendur fara frá Laugarvatni morguninn eftir, og er skipulögð dagsferð fyrir þá, sem þess óska, um Þingvelli, Kaldadal og Borgarfjörð; á heimleið verður væntanlega höfð viðdvöl í Svínadal á fornum slóðum Bjarna Jónssonar.

Fjölmenn undirbúningsnefnd skipuð mönnum víða að hefur starfað að undirbúningi málþingsins undir formennsku George McNulty frá Suður-Carolina-háskólanum í Columbia. Af okkar hálfu annaðist Ragnar Sigurðsson nauðsynlegan undirbúning í fyrstu, og voru þá veigamikil skref stigin, en frá miðju síðasta sumri hefur sá, er hér ritar, annast undirbúning. Auk Íslenzka stærðfræðafélagsins og Háskóla Íslands standa þrír erlendir háskólar að málþinginu, en þeir eru Kaliforníu-háskólinn í Berkeley, Suður-Carolina-háskólinn í Columbia og Vanderbilt-háskólinn í Nashville, þar sem Bjarni Jónsson starfar,

Eins og fyrr segir verður fyrsta degi málþingsins, mánudeginum 2. júlí, varið til að veita yfirlit yfir fræðasvið Bjarna Jónssonar, og verða þá fluttir eftirfarandi sjö fyrirlestrar, en að öðru leyti liggur stundaskráin sjálf ekki fyrir:

J. B. Nation (frá háskólanum í Honolulu):
Jónsson's contributions to lattice theory.
Kirby Baker (frá Kaliforníu-háskóla í Los Angeles):
Jónsson's contributions to universal algebra.
István Németi (frá háskólanum í Budapest):
Jónsson's contributions to the theory of relation algebras.
Ralph McKenzie (frá Kaliforníu-háskóla í Berkeley):
A perspective on the theory of varieties.
Ralph Freese (frá háskólanum í Honolulu):
A perspective on lattice theory.
William Lampe (frá háskólanum í Honolulu):
A perspective on the algebraic representation of lattices.
Roger Maddux (frá ríkisháskóla Iowa í Ames):
A perspective on relation algebras.

Kristín Bjarnadóttir:

14. ÞING NORRÆNNA RAUNGREINAKENNARA Í REYKJAVÍK 25. - 28. JÚNÍ 1990

Þing norrænna raungreinakennara hafa verið haldin á þriggja ára fresti um 40 ára skeið til skiptis á Norðurlöndunum fjórum, Danmörku, Finnlandi, Noregi og Svíþjóð. Nú í 14. skipti er loks komið að Íslandi að fóstra þessa samkomu, sem á Norðurlöndum er nefnd LMFK-þing. Skammstöfunin stendur fyrir Lærere í Matematik, Fysik og Kemi, eins og þessar ágætu námsgreinar eru nefndar á heimsmálunum.

Undirbúningur þingsins hefur staðið alllengi. Árið 1984 héldu Íslendingar til Þrándheims á 12. þingið með það í huga að bjóða til þings á Íslandi árið 1987, en þá urðu Finnar fyrri til. Fulltrúar Íslands í Finnlandi á 13. þinginu árið 1987 buðu svo til þingsins á Íslandi árið 1990. Þá var þegar tekið til við undirbúning, húsnæði fest í húsakynnum Háskóla Íslands, og síðan farið að undirbúa dagskrá og festa fyrirlesara. Snemma kom fram sú hugmynd að tengja efni þingsins íslenskri náttúru, en kennsla í raungreinum er undirstaða náms í náttúruvísindum hvers konar. Raunar er það aðeins á Íslandi, sem kennarar í jarðfræði eru félagar í samtökunum, enda er óvíða jafnmikil kennsla í jarðfræði og í íslenskum skólum.

Undirbúningsnefnd þingsins átti því láni að fagna að þeir, sem hún leitaði til um fyrirlestra, tóku málaleitan hennar mjög vel og sýndu málinu mikinn velvilja. Margir íslenskir vísindamenn, kennarar og sérfræðingar, halda fyrirlestra um efni á sínu sviði, og auk þeirra eru fyrirlesarar frá hverju hinna Norðurlandanna, einn til tveir frá hverju landi.

Strax í upphafi var leitað eftir því að fá hingað einn þeirra Íslendinga, sem gert hafa garðinn frægan erlendis, Sigurð Helgason prófessor í stærðfræði við Tækniháskóla Massachusetts í Boston, og brást hann vel við þeirri bón undirbúningsnefndar að verða annar aðalfyrirlesara þingsins og tala við setningu þess. Hinn aðalfyrirlesarinn er Moshe Rubinstein prófessor við Kaliforníu–háskólann í Los Angeles, en hann hélt námskeið á vegum Félags raungreinakennara árið 1986 við mjög góðan orðstír. Það var einróma álit þeirra nefndarmanna, sem sóttu námskeiðið, að það væri fengur að því að hann talaði á þinginu og hann tók þeirri málaleitan mjög vel.

Nauðsynlegt er að vandað sé til efnis slíkra þinga eins og kostur er, en að því tryggðu er einnig brýnt að sjá þinggestum fyrir umhverfi til almennra kynna, óformlegra viðræðna og skoðanaskipta. Þess vegna var ákveðið að brjóta þingið upp um miðja vikuna og halda í ferðalag. Farið verður að Gullfossi, Geysi, Þingvöllum og Nesjavöllum miðvikudaginn 27. júní, en eftir þingið eiga gestir síðan kost á styttri og lengri ferðum um landið. Þá munu Reykjavíkurborg og menntamálaráðuneytið halda sameiginlega móttöku fyrir þinggesti síðdegis fyrsta dag þingsins, mánudaginn 25. júní, en frá móttökunni verður haldið á kynningarkvöld, þar sem verður léttur kvöldverður, skemmtiatriði og dans. Á þriðjudagskvöld verða skipulagðar gönguferðir um Reykjavík og á fimmtudagskvöld að loknum þingslitum verður svo lokahóf. Það væri ánægjulegt, ef Íslendingar gætu sótt sem flesta þessara viðburða auk þingsins sjálfs.

Menntamálaráðuneyti og Endurmenntun Háskóla Íslands styrkja þingið í því skyni að greiða niður þátttökugjöld Íslendinga. Ákveðið hefur verið að þátttökugjaldið verði 2500 kr. og er þá innifalinn aðgangur að kynningarkvöldi þingsins á mánudeginum. Þátttöku í þinginu þarf að tilkynna til ferðaskrifstofunnar Samvinnuferðir–Landsýn. Er það von undirbúningsnefndarinnar að sem flestir Íslendingar sjái sér fært að sækja þingið og blanda geði við þinggesti, íslenska og erlenda.

Þórður Jónsson:

NORRÆNN SUMARSKÓLI Í KENNILEGRI EÐLISFRÆÐI Á LAUGARVATNI 9.–18. JÚLÍ 1990

Norrænn sumarskóli um nýjustu framfarir í skammtasviðsfræði verður haldinn í Menntaskólanum á Laugarvatni dagana 9. til 18. júlí næstkomandi. Auk mín standa að skólanum þeir Bergfinnur Durhuus við Hafnarháskóla og Antti Kupiainen við Rutgers–háskóla í Bandaríkjunum.

Tilgangur skólans er að kynna framfarir undanfarinna ára í skammtasviðsfræði, einkum svonefnda hornrækna skammtasviðsfræði og hvernig henni er beitt til að lýsa ýmsum tvívíðum kerfum í safneðlisfræði. Hornrækin skammtasviðsfræði tengist ennfremur náið strengjafræði, sem talið er að geti komið að notum við leitina að alsameinaðri kenningu um öreindir. Síðast en ekki síst tengjast þessi fræði ýmsum sígildum verkefnum í stærðfræði, svo sem hnútafræði, fléttufræði og óendanlega víðum algebrum.

Aðalfyrirlesarar eru sjö talsins og koma þeir frá ýmsum heimshornum. Þeir eru D. Friedan frá Bandaríkjunum; G. Mack frá Vestur–Þýskalandi; K. Gawedzki, E. Brezin og J. B. Zuber frá Frakklandi; og A. B. Zamolodchikov og P. B. Wiegmann frá Sovétríkjunum. Ofantaldir verða með 5 fyrirlestra hver, en að auki munu bæði aðalfyrirlesarar og aðrir þátttakendur halda málstofur um afmarkaðri efni.

Þátttakendur eru rúmlega 30 talsins, flestir frá Norðurlöndunum, og er kostnaður þeirra greiddur með styrk frá Nordiska Forskarkurser. Þeir eru flestir virkir í rannsóknum í skammtasviðsfræði, vinna að doktorsverkefni eða eru nýbakaðir doktorar, en þó eru einnig nokkrir eldri þátttakendur.

Endanleg dagskrá skólans með titlum og tímasetningum fyrirlestra mun liggja fyrir um miðjan júní og er hægt að vitja þeirra gagna á Raunvísindastofnun Háskólans. Fyrirlestrarnir á Laugarvatni eru að sjálfsögðu öllum opnir.

STÆRÐFRÆÐIKEPPNI FRAMHALDSSKÓLANEMA 1989–1990

Eins og undanfarin ár hafa Íslenska stærðfærðafélagið og Félag raungreinakennara í framhaldsskólum staðið í sameiningu fyrir þrenns konar stærðfræðikeppni fyrir framhaldsskóla. Um er að ræða Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema, sem er landskeppni, Norrænu ólympíukeppnina og Alþjóðlegu ólympíukeppnina.

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema veturinn 1989–90 var í tveimur hlutum og fór fyrri hluti hennar fram þriðjudaginn 31. október 1989. Allir framhaldsskólanemar landsins gátu tekið þátt í keppninni, og var henni skipt í neðra stig, sem ætlað var nemendum á fyrri tveimur árum framhaldsskólanna, og efra stig, sem ætlað var nemendum á seinni tveimur árum framhaldsskólanna. Alls tóku 488 nemendur úr 16 skólum þátt í keppninni, 208 á efra stigi og 280 á því neðra.

Þegar úrslit lágu fyrir voru 30 nemendur, 15 af hvoru stigi, valdir til að taka þátt í undirbúningi fyrir seinni hluta keppninnar, en hann var í því fólginn, að þátttakendur fengu reglulega send verkefni til að glíma við. Úrlausnirnar voru síðan sendar undirbúningsnefnd keppninnar, sem leiðrétti þær og sendi svör og ábendingar til baka.

Seinni hluti keppninnar var úrslitakeppni, sem var haldin laugardaginn 31. mars 1990 í Háskóla Íslands. Alls mættu 17 nemendur til leiks. Dómnefnd ákvað að veita þremur hæstu keppendunum peningaverðlaun. Fyrirtækin Ístak og Steypustöðin gáfu verðlaunin og stóðu straum af öllum kostnaði við keppnina. Í níu efstu sætunum voru:

1. Frosti Pétursson, Menntaskólanum á Akureyri.
2. Ólafur Örn Jónsson, Fjölbrautaskóla Suðurnesja.
3. Birgir Arnarson, Menntaskólanum á Akureyri.
4. Ásgeir Loftsson, Menntaskólanum í Reykjavík.

5–6. Gunnar Pálsson, Menntaskólanum á Akureyri.
5–6. Höskuldur Hauksson, Menntaskólanum í Reykjavík.

7. Daníel Sigurgeirsson, Fjölbrautaskólanum í Breiðholti.
8. Pétur Matthíasson, Menntaskólanum við Hamrahlíð.
9. Þórður Magnússon, Menntaskólanum við Hamrahlíð.

Það vekur athygli að engin stúlka prýðir þennan ágæta hóp. Við vonum að konur í stærðfræðikennarastétt hvetji nú kynsystur sínar til dáða og að hlutföll kynjanna verði eðlileg þegar við birtum úrslitin í keppninni að ári.

Í úrslitakeppninni fengust keppendurnir við fimm verkefni:

1. Finnið allar náttúrlegar tölur n þannig að talan 8 gangi upp í tölunni $7^n n + 4n + 1$.

2. (i) Látum x vera rauntölu. Gerum ráð fyrir að hægt sé að velja þrjár tölur $a < b < c$ í rununni x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $\ldots$ þannig að $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. Sýnið að x er ræð tala.

(ii) Látum x vera ræða tölu. Sýnið að hægt er að velja þrjár tölur $a < b < c$ í rununni x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $\ldots$ þannig að $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

3. Í skákmóti nokkru voru 20 keppendur og alls tefldar 14 skákir. Sérhver keppandi tefldi a.m.k. eina skák. Sýnið að af skákunum 14 megi finna 6 skákir sem alls 12 keppendur tefldu.

4. Látum x, y, z vera jákvæðar rauntölur og látum k, l, m vera náttúrlegar tölur. Sýnið að

$$\frac{x^k y^l z^m}{(x+y+z)^{k+l+m}} \leq \frac{k^k l^l m^m}{(k+l+m)^{k+l+m}}$$

5. Látum ABC vera þríhyrning innritaðan í hring. Látum P vera skurðpunkt miðlína þríhyrningsins. Framlengjum AP, BP, CP þannig að þær skeri hringinn í A', B', C'. Sýnið að

$$\frac{|AP|}{|A'P|} + \frac{|BP|}{|B'P|} + \frac{|CP|}{|C'P|} = 3.$$

Lausnir er að finna á bls. 41.

Fjórða norræna ólympíukeppnin fór fram fimmtudaginn 5. apríl. Það voru Finnar, sem sáu um keppnina að þessu sinni. Kapparnir níu, sem áður voru upp taldir, kepptu fyrir Íslands hönd, en keppnin var haldin samtímis í skólum þeirra. Af Íslendingunum náði Ólafur Örn Jónsson bestum árangri. Hann varð í 9.-16. sæti.

Að þessu sinni glímdu keppendurnir við fjögur verkefni:

1. Látum m, n og p vera jákvæðar oddatölur. Sýnið að talan n gengur upp í töluna

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m.$$

2. Látum $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vera rauntölur. Sýnið að

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Hvenær gildir jafnaðarmerki?

3. Látum m og n vera hálflínur sem hafa sameiginlegan upphafspunkt A og mynda horn sem er minna en $180°$. Látum P vera punkt innan hornsins. Finnið þá línu l gegnum punktinn P, sem ásamt hálflínunum afmarkar þríhyrning með minnsta mögulegt ummál.

4. Fyrir sérhverja heila jákvæða tölu n leyfum við eftirfarandi aðgerðir:

$$f(n) = 10n, \qquad g(n) = 10n + 4, \qquad h(2n) = n;$$

með öðrum orðum, ef talan n er skrifuð í tugakerfi, er leyfilegt að bæta „0" aftan á töluna, bæta „4" aftan á töluna, eða helminga töluna ef hún er slétt. Sýnið: Ef við byrjum með töluna 4, þá er unnt að búa til hvaða heila jákvæða tölu sem er, með því að beita einni eða fleiri af aðgerðunum f, g og h, endanlega oft og í einhverri röð.

Jæja, lesandi góður, nú skalt þú takast á við þessi dæmi og sjá, hvernig til tekst. Við birtum engar lausnir að þessu sinni.

Nú hefur verið valið í liðið sem keppir á 31. Ólympíukeppninni í Peking í Kína dagana 13.–14. júlí í sumar. Í því verða Frosti Pétursson, Ólafur Örn Jónsson og Birgir Arnarson. Með í Kínaförinni verða Agnethe Kristjánsson fararstjóri og Robert Magnus dómnefndarfulltrúi. Þeir sem hafa haft veg og vanda af keppninni í vetur eru Jón I. Magnússon, Jón Kr. Arason og Robert Magnus fyrir hönd Íslenska stærðfræðafélagsins, og Yngvi Pétursson, Agnethe Kristjánsson og Kristín Halla Jónsdóttir fyrir hönd Félags raungreinakennara í framhaldsskólum.

STÆRÐFRÆÐIVERÐLAUN Á STÚDENTSPRÓFI

Svo sem tíðkast hefur um áratuga skeið við brautskráningu stúdenta ákvað Íslenzka stærðfræðafélagið nú í vor að veita nokkrum þeirra sérstaka viðurkenningu fyrir ágætan námsárangur í stærðfræði á stúdentsprófi. Var þeim öllum afhent bók að gjöf með áritaðri staðfestingu á verðlaununum.

Þeir nýstúdentar, sem hlutu verðlaun að þessu sinni, eru

Gunnar Pálsson, Menntaskólanum á Akureyri;
Hrafnkell Kárason, Menntaskólanum við Sund;
Hrund Ólöf Andradóttir, Menntaskólanum við Hamrahlíð;
Kristján Leósson, Menntaskólanum í Reykjavík;
Sigurður Björnsson, Fjölbrautaskólanum á Sauðárkróki; og
Una Björk Ómarsdóttir, Verzlunarskóla Íslands.

Raunar verður að taka fram, að Menntaskólanum á Akureyri mun ekki enn hafa verið slitið, þegar fyrstu lesendur þessa Fréttabréfs fá það í hendur, og er því fyrsta nafnið að ofan birt hér sem trúnaðarmál fram til 17. júní!

Við brautskráningu stúdenta nú á miðjum vetri hlaut einn nýstúdent bókaverðlaun frá félaginu og var það

Þorsteinn Stefánsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð.

Svo fjárvana sem félagið er um þessar mundir hafði það ekki fjárráð til að kaupa verðlaunabækur að þessu sinni nema sérstakar ráðstafanir yrðu gerðar. Af því tilefni var leitað til þriggja verkfræðistofa um fjárstuðning í þessu skyni, og veittu þær fúslega ríflegan styrk, sem mun væntanlega endast til verðlaunaveitinga í tvö ár. Fyrirtækin, sem veittu styrkinn, eru

Verkfræðistofa Guðmundar & Kristjáns;
Verkfræðistofa Sigurðar Thoroddsen h.f.; og
Verkfræðistofan Rafteikning h.f.

Íslenzka stærðfræðafélagið kann þessum verkfræðistofum beztu þakkir fyrir stuðninginn, og óskar hinum verðlaunuðu nýstúdentum góðs árangurs á næsta þrepi á námsbrautinni.

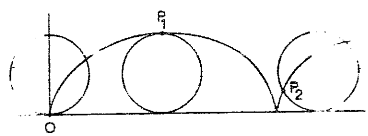
Reynir Axelsson:

„ORÐ MÉR AF ORÐI“

3. þáttur

Í þessum þætti veltum við því einkum fyrir okkur hvað gerist þegar eitthvað veltur á einhverju öðru. Gerum okkur fyrst grein fyrir almennasta tilfellinu. Hugsum okkur tvo ferla, m í sléttunni E og b í sléttunni F. Leggjum sléttuna E ofan á sléttuna F þannig að ferlarnir m og b snertist í einhverjum punkti. Hreyfum síðan ferilinn m og sléttuna E með honum þannig að m velti eftir ferlinum b án þess að renna til. Látum P vera einhvern punkt í sléttunni E. Hann hreyfist þá um leið og sléttan E og ritar feril í sléttunni F. Við þurfum raunar ekki að hugsa okkur að öll sléttan E hreyfist. Í stað þess getum við gert ráð fyrir að punkturinn P sé með einhverjum hætti festur við ferilinn m og hreyfist með honum. En punkturinn þarf þó ekki að liggja á ferlinum. Í þessu almenna tilfelli er ferillinn m kallaður ***moving curve*** á ensku, ferillinn b kallaður ***base line*** og ferillinn sem punkturinn P ritar kallaður ***roulette.*** Orðin sem okkur hafa dottið í hug fyrir þessi fyrirbæri eru ***völtur*** fyrir ***moving curve***, ***veltibraut*** fyrir ***base line*** og ***veltiferill*** fyrir ***roulette.*** Þannig veltur völturinn eftir veltibraut og ritar veltiferil.

Allt er þetta mjög almennt, og algengara er að athuga sérstök tilfelli. Þekktasta tilfellið er að völturinn sé hringur og veltibrautin annaðhvort bein lína eða hringur.

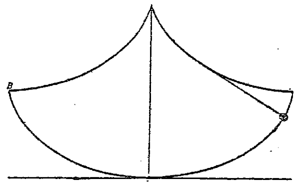


Hjólferill

Athugum fyrst tilfellið þegar hringur veltur á beinni línu. Við getum þá hugsað okkur að punkturinn P sé festur við hálflínu sem liggur út frá miðju hringsins og snýst um leið og hann. Lögun veltiferilsins er háð því hvort punkturinn P er á hringferlinum, utan við hann eða innan í honum. Á ensku er hringurinn sem veltur kallaður ***generating circle*** eða ***rolling circle***, en á íslenzku virðist eðlilegast að kalla hann einfaldlega ***hjól***. Þegar punkturinn P er á sjálfum hjóljaðrinum er veltiferillinn kallaður ***cycloid***, og mun nafnið vera komið frá sjálfum Galileo Galilei. Það er dregið af gríska orðinu ***kyklos***, sem þýðir ***hringur***. Þetta hefur verið kallað ***hjólferill*** á íslenzku. Hjólferill er settur saman úr óendanlega mörgum bogum sem mætast tveir og tveir í punktum á línunni sem hjólið veltur eftir. Bogarnir standa hornrétt á línuna, og þannig myndast hvassir oddar í punktunum. Lengd hvers boga er áttfaldur geisli hjólsins.

Hjólferlar hafa ýmsa merka eiginleika og hafa hlotið önnur nöfn af þeim. Gerum ráð fyrir að línan sem hjólið veltur eftir sé lárétt og að hjólið velti neðan á línunni, þannig að oddar hjólferilsins snúa upp. Búum nú til pendil úr bandspotta og lóði og hengjum hann í einn af þessum oddum. Hugsum okkur að hjólferillinn sé búinn til úr einhverju föstu efni þannig að bandspottinn leggst eftir hjólferlinum þegar pendillinn sveiflast. Lóðið hreyfist þá eftir ákveðnum ferli. Þessum ferli má raunar einnig lýsa sem veltiferli þar sem veltibrautin er hjólferillinn, völturinn er bein lína, og punkturinn sem ritar ferilinn liggur á línunni; við komum aftur að þessu seinna. Í bókinni ***Horologium Oscillatorium*** frá árinu 1673 lýsir Christian Huygens þeirri athyglisverðu uppgötvun sinni að fyrir slíkan pendil af lengd sem er fjórfaldur geisli hjólsins (og því helmingur af boga hjólferilsins) hreyfist lóðið eftir öðrum hjólferli, sem er eins og hinn fyrri. Pendillinn hefur þá þann eiginleika að sveiflutími hans er óháður útslaginu. Slíkur pendill er kallaður ***cycloidal pendulum***. Hjólferillinn hlaut nú nýtt nafn og var kallaður ***tautochrone*** eða ***isochrone***. Fyrra orðið er myndað af gríska forskeytinu ***tauto-*** eða ***samur*** og nafnorðinu *chronos* eða *tími*, en forskeytið í seinna orðinu er dregið af gríska orðinu ***isos*** eða *jafn*. Bæði orðin eru auðvitað dregin af því að sveiflutíminn er ávallt hinn sami. Hefur einhver tillögu um þýðingar á heitunum ***cycloidal pendulum*** og ***tautochrone*** eða ***isochrone***? Kæmi til greina að nota orðið *jafntímaferill* fyrir ***tautochrone***?

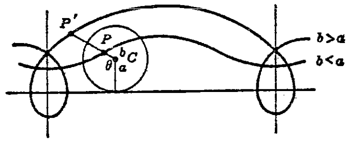
Í *Acta Eruditorum* í júlí 1696 lagði Johann Bernoulli þraut fyrir lesendurna. Gerum ráð fyrir að massapunktur renni eftir braut frá punkti S að punkti T sem er neðar en punkturinn S, en þó ekki beint undir



Cycloidal pendulum

honum. Hvernig á brautin að vera til að massapunkturinn komist til T á sem skemmstum tíma? (Áður hafði Galileo sett þessa þraut fram og gefið ranga lausn; hann hélt að brautin væri hluti af hring.) Fimm réttar lausnir bárust og voru birtar næsta ár í maíheftinu af *Acta Eruditorum*. Höfundarnir voru engir aðrir en Newton, Leibniz, L'Hospital, Johann Bernoulli sjálfur og Jakob eldri bróðir hans. Niðurstaðan var sú að ferillinn væri hluti af hjólferli. Þetta varð til þess að hjólferillinn hlaut nú þriðja nafnið og var kallaður *brachistochrone*; fyrri hluti orðsins kemur af *brachistos* eða *skemmstur* á grísku. Mætti kalla þetta *skammtímaferil* á íslenzku?

Athugum aftur veltiferil sem myndast þegar hjól veltur eftir beinni línu, en gerum nú ekki nauðsynlega ráð fyrir að punkturinn sem ritar veltiferilinn sé á hjóljaðrinum. Veltiferillinn er þá kallaður *trochoid*, og nafnið er dregið af gríska orðinu *trochos*, sem þýðir *hjól*, og eðlilegt hefði verið að þýða það sem *hjólferil*, ef það orð hefði ekki þegar verið notað fyrir *cycloid*, sem er sérstök gerð af *trochoid*. Við höfum ekkert íslenzkt orð yfir *trochoid*. *Trochoid* sem er ekki hjólferill hefur tvær gerðir eftir því hvort punkturinn P er utan við hjólið eða innan í því. Ef hann er utan við hjólið er veltiferillinn kallaður *extended cycloid*, en sé hann innan í hjólinu er veltiferillinn kallaður *contracted cycloid*. Til aðgreiningar frá þessum ferlum er venjulegur hjólferill stundum kallaður *common cycloid*. *Extended cycloid* er einnig kölluð *prolate cycloid* eða *prolate trochoid*, og *contracted cycloid* er kölluð *curtate cycloid* eða *curtate trochoid*. Því miður er þessum orðum líka stundum stundum snúið við: Sumir nota *prolate* þar sem aðrir nota *curtate* og öfugt. Við lýsum nú eftir heitum



Prolate cycloid og *curtate cycloid*

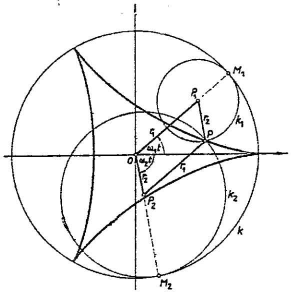
fyrir *trochoid, extended cycloid* og *contracted cycloid.*

Snúum okkur nú að tilfellinu þegar hjól veltur á hring. Hér eru tveir kostir; annað hvort veltur hjólið innan á hringnum eða utan á honum. Athugum fyrra tilfellið fyrst. Það er ljóst að hjól sem veltur innan á föstum hring verður að vera minna en hringurinn. Ef punkturinn sem ritar veltiferilinn er á hjóljaðrinum er veltiferillinn kallaður *hypocycloid*, og það mætti kalla *innhjólferil* á íslenzku. Innhjólferill liggur allur innan í og á hringnum sem hjólið veltur á. Hann hefur odda sem liggja á hringnum og eru tengdir með bogum. Ef hlutfallið milli geisla hjóls og hrings er ræð tala, þá er veltiferillinn lokaður.

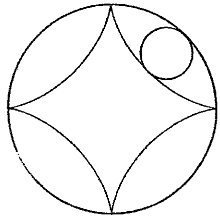
Nokkur sértilfelli af lokuðum innhjólferlum hafa fengið sérstök nöfn. Við getum fyrst tekið eftir að í einfaldasta tilfellinu, þegar geisli hjólsins er helmingur af geisla hringsins, er innhjólferillinn einfaldlega beint strik. Ef geisli hjólsins er þriðjungur af geisla hringsins er innhjólferillinn kallaður *deltoid*, vegna þess að hann minnir á gríska stafinn Δ. Kannski mætti kalla hann *deltaferil?* Á þýzku er þessi ferill stundum kallaður *Steinersche Hypozykloide*, því að Jakob Steiner skrifaði um hann merka grein árið 1857. Ef geisli hjólsins er fjórðungur af geisla hringsins er innhjólferillinn kallaður *asteroid*, en á íslenzku heitir hann *stjörnuferill.*

Við getum einnig athugað veltiferla sem myndast þegar hjól veltur innan á hring, en punkturinn sem ritar veltiferilinn er ekki á jaðri hjólsins. Þá er veltiferillinn kallaður *hypotrochoid*, en fyrir það höfum við ekkert íslenzkt orð. Slíka ferla má teikna með verkfæri sem er kallað *trochoidograph.* Þess má geta að þegar geisli hjólsins er hálfur geisli fasta hringsins, þá er veltiferillinn sporbaugur.

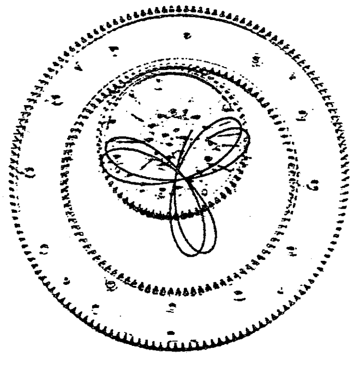
Athugum næst það tilfelli að hjólið velti utan á fasta hringnum. Þessu tilfelli má raunar aftur skipta í tvennt: Í fyrsta lagi getur það gerzt að hjól og hringur snertist að utanverðu, þannig að hvorugt er innan í



Deltaferill



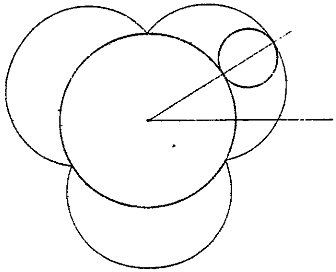
Stjörnuferill



Trochoidograph

hinu. Þetta er það tilfelli sem oftast er athugað. Ljóst er að nú getur hlutfallið milli geisla hjóls og hrings verið hvað sem er. Í öðru lagi getur hjólið verið stærra en fasti hringurinn og umlukið hann. Athugum fyrst tilfellið þegar hjól og hringur snertast að utanverðu.

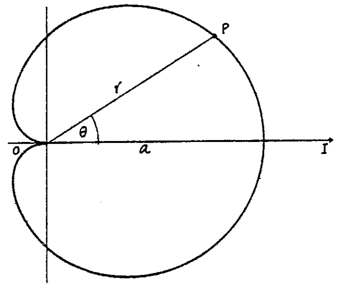
Ef punkturinn sem ritar veltiferilinn er á hjóljaðrinum er veltiferillinn kallaður *epicycloid*. Það hefur verið þýtt sem *úthjólferill*. Ef punkturinn sem ritar ferilinn er ekki nauðsynlega á jaðri úthjólsins, þá fæst ferill sem kallast *epitrochoid.* Við höfum enga þýðingu á því orði og lýsum eftir tillögum.



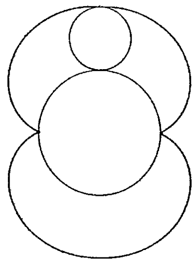
Úthjólferill

Þessir ferlar koma víða við sögu. Frægasta notkun þeirra er í heimsmynd fornaldar, þar sem þeir voru notaðir til að lýsa hugsaðri hreyfingu reikistjarnanna umhverfis jörðu, sem þá var álitin vera í miðju alheimsins. Það var Apollóníus frá Perga sem athugaði þá fyrstur, og Ptólemaíos tók þá einnig upp í heimsmynd sína. Þeir hugsuðu sér fastan hring. Eftir þessum fasta hring hreyfðist miðja minni hrings með jöfnum hraða, og jafnframt snerist minni hringurinn með jöfnum hraða. Ferillinn sem punktur á jaðri minni hringsins ritar er *epitrochoid.* Minni hringurinn var kallaður *epicycle,* en fasti hringurinn *deferent.* Í *Heimsmynd á hverfanda hveli* notar Þorsteinn Vilhjálmsson orðin *aukahringur* og *aðalhringur* fyrir *epicycle* og *deferent.* Hefur einhver aðra tillögu?

Úthjólferill liggur allur utan við hringinn sem hjólið veltur á, nema hvað hann hefur odda sem liggja á hringnum og eru tengdir með bogum. Ef hlutfallið milli geisla hjóls og hrings er ræð tala, þá er ferillinn lokaður. Sértilfelli af því er þegar hjólið hefur sama geisla og hringurinn. Þá er aðeins einn bogi og einn oddur. Í þessu tilfelli er úthjólferillinn hjartalaga og kallaður *cardioid,* sem mætti þýða *hjartaferill.* Annað tilfelli er þegar geisli hjólsins er helmingur af geisla hringsins. Þá eru tveir bogar og tveir oddar, og ferillinn er kallaður *nephroid* eða *nýraferill.*



Hjartaferill

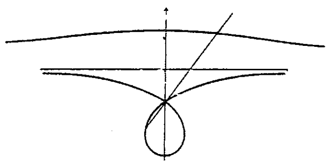


Nýraferill

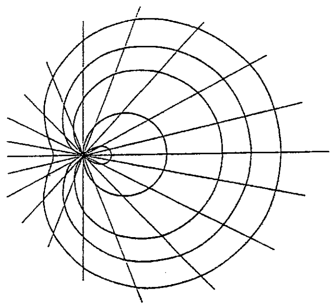
Því má skjóta hér inn að hjartaferill er einnig sértilfelli af annarri almennri gerð ferla. Látum c vera feril, O vera fastan punkt og $\lambda > 0$ vera fasta rauntölu. Látum punktinn Q hreyfast eftir ferlinum c og látum P og P' vera punktana á línunni gegnum O og P þannig að $PQ = QP' = \lambda$. Þá hreyfast P og P' eftir ferli sem hefur tvær greinar. Þessi ferill er kallaður *conchoid* ferilsins c með tilliti til punktins O. Nafnið er dregið af gríska orðinu fyrir *skel*, svo að við höfum skýrt þetta *skelferil.* Ef c er bein lína og punkturinn O er utan við c, þá fæst *skelferill Nikómedesar.* Hann hefur verið notaður til að tvöfalda tening og þrískipta horni. Ef c er hringur og punkturinn O liggur á hringferlinum, þá er ferillinn kallaður *limaçon*, sem þýðir *snigill*, eða *limaçon of Pascal.* Þetta mætti því kalla *snigil* eða *snigilferil Pascals.* Snigilferill er ekkert annað en *epicycloid* eða *epitrochoid* þar sem geisli hjólsins er jafn geisla hringsins sem það veltur á. Þegar fastinn λ er jafn þvermáli hringsins c höfum við úthjólferil, og þá er snigill Pascals ekkert annað en hjartaferill.

Mynd af snigilferli má finna í bókinni *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* eftir Albrecht Dürer frá 1525. Þessi mynd er sýnd á baksíðu þessa fréttabréfs. Í bókinni er ferillinn kallaður *Spinnenlinie* eða *kóngulóarferill*, vegna þess að brotnar hjálparlínur sem Dürer notar við teikninguna minna á kóngulóarfætur.

Að lokum má athuga tilfellið þegar hjólið umlykur hringinn sem það veltur á. Ef punkturinn sem ritar veltiferilinn er á hjóljaðrinum er velti-



Skelferill

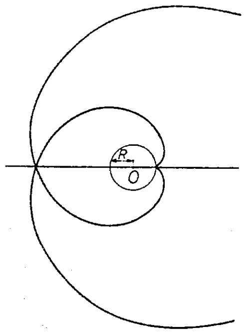


Snigilferlar

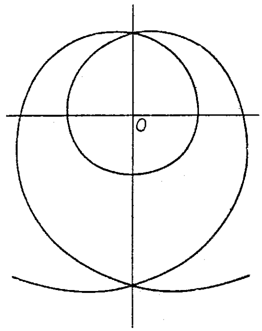
ferillinn stundum kallaður *pericycloid.* En í raun gefur þetta ekkert nýtt: *Pericycloid* þar sem geisli fasta hringsins er R og geisli hjólsins er r, þar sem $r > R$, er ekkert annað en *epicycloid* fyrir sama fasta hring þar sem geisli hjólsins er $r - R$.

Ekki má skilja við þessa ferla án þess að minnast á að formlega má ímynda sér að hjólið sem veltur á föstum hring hafi geisla sem er tvinntala. Samt sem áður getur punktur á hringferlinum ritað venjulegan raunferil. Hann kallast *paracycloid.* Ef við auk þess gerum formlega ráð fyrir að geisli fasta hringsins sé þvertala, eða það sem stundum er nefnt „hrein ímynduð tala“, þá er veltiferillinn kallaður *hypercycloid.* Ekki höfum við íslenzk heiti yfir þessi fyrirbæri.

Í athugun á pendli Huygens kom í ljós að eðlilegt var að athuga veltiferla þar sem völturinn er bein lína. Gerum ráð fyrir að bein lína velti á ferli c. Fastur punktur á línunni ritar feril k, sem kallast *involute* ferilsins c, og ferillinn c kallast þá *evolute* ferilsins k. Annað orð fyrir *involute* er *evolvent.* Fyrir *involute* hefur íslenzka orðið *sveipferill* verið notað. Það má hugsa sér að sveipferill myndist þegar tvinna er vafið ofan af ferlinum c og haldið strekktum; endinn á tvinnanum fer þá eftir sveipferli. Þetta skýrir orðið, sem kemur af latneska orðinu *involutus*, sem þýðir *uppvafinn* eða *undinn.* Ferilinn c má endurgera úr sveipferlinum k. Ef P er fastur punktur á ferlinum k og Q er annar punktur á k nálægt P, þá skerast



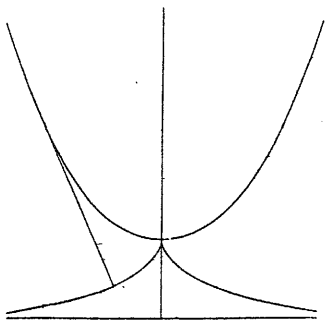
Paracycloid



Hypercycloid

þverlar ferilsins í punktunum P og Q í punkti O. Þegar Q stefnir á P, þá stefnir O á punkt sem kallast *centre of curvature* ferilsins k í punktinum P. Hringurinn gegnum P með miðju í O kallast *circle of curvature* eða *osculating circle* ferilsins k í punktinum P. Ef r er geisli þessa hrings, þá kallast r^{-1} *curvature* ferilsins k í punktinum P. Á íslensku er *curvature* kallað *krappi* eða *sveigja*, *centre of curvature* heitir þá *krappamiðja* eða *sveigjumiðja*, og *circle of curvature* heitir *krappahringur*, *sveigjuhringur* eða *hjúfurhringur* ferilsins k í punktinum P. Ef k er sveipferill ferilsins c og P hreyfist eftir k, þá hreyfist krappamiðja ferilsins k í punktinum P eftir ferlinum c. Því mætti kalla c *krappamiðjuferil* ferilsins k. Taka má eftir að gefinn ferill k hefur aðeins einn krappamiðjuferil, en ferill c hefur óendanlega marga sveipferla; ef l er snertill við ferilinn c þá ritar sérhver punktur á l sveipferil þegar l veltur eftir c. Allir þessir sveipferlar hafa hins vegar sama krappamiðjuferil, nefnilega ferilinn c. Orðin *involute* og *evolute* eru augljóslega skyld og sýna skyldleika hugtakanna sem um er verið að ræða. Þetta verður ekki sagt um orðin *sveipferill* og *krappamiðjuferill*, og það má telja galla á orðunum. Hefur einhver betri tillögur?

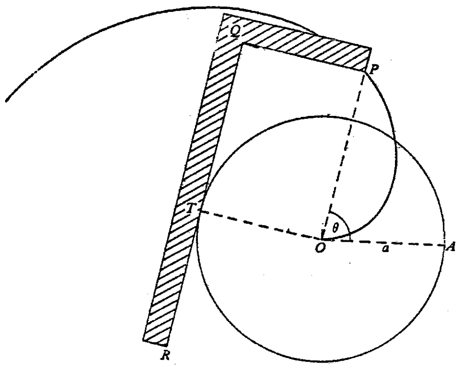
Það er ágæt æfing að reikna út sveipferla gefinna ferla. Tökum sem dæmi feril sem kallaður er *catenary* og hefur jöfnuna $y = \cosh \dfrac{x}{c}$. Orðið er dregið af latneska orðinu *catena*, sem þýðir *keðja*, og ferillinn hefur verið kallaður *keðjuferill*. Nafnið kemur af því að keðja sem er hengd upp í tveimur punktum lagar sig eftir keðjuferli. En keðjuferill er raunar einnig veltiferillinn sem brennipunktur fleygboga ritar þegar fleygboginn veltur á beinni línu. Athugum nú (lóðrétta) snertilinn l í lægsta punkti keðjulínunnar P og sveipferilinn sem P ritar þegar l veltur eftir keðjuferilinum. Hann hefur jöfnuna $x = \operatorname{Arcosh}\frac{c}{y} - \sqrt{c^2 - y^2}$ og er kallaður *tractrix*. Mætti kalla hann *dráttarferil*? Hugsum okkur að við stöndum í upphafspunkti hnitakerfisins, leggjum þungan hlut í punktinn P, bindum við hann snæri og höldum því strekktu, göngum síðan eftir x-ásnum og drögum hlutinn á eftir okkur. Hann dregst þá eftir dráttarferlinum.



Keðjuferill og dráttarferill

Dráttarferillinn hefur þann merka eiginleika að sé honum snúið í þrívíðu rúmi um x-ásinn, þá myndast snúðflötur sem hefur fastan neikvæðan krappa. Þessi flötur hefur verið kallaður *pseudosphere*. Bein þýðing á því orði væri *gerfikúla*. Hefur einhver betri tillögu?

Við getum einnig athugað veltiferla sem myndast þegar lína veltur á gefinni veltibraut, en punkturinn sem ritar veltiferilinn liggur utan við línuna sem veltur. Tökum dæmið þegar veltibrautin er hringur og punkturinn sem ritar veltiferilinn hefur fjarlægð jafna geisla hringsins frá línunni sem veltur og er sömu megin við hana og hringurinn sem hún veltur á. Þá er veltiferillinn hinn frægi ferill sem varð Arkimedesi að efni í heila bók og nefnist ***spiral of Archimedes***. Hann hefur verið nefndur *gormur*, ***kuðungur***, ***kuðungsferill*** eða ***kuðungslína Arkimedesar***. En nú höfum við fengið þá tillögu að kalla hann ***vefju Arkimedesar***. Hvernig líkar lesendum það?



Vefja Arkimedesar sem veltiferill

Robert Magnus:

JAFNHLIÐA ÞRÍHYRNINGAR

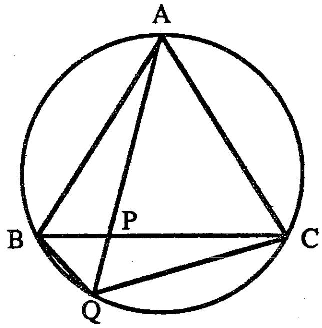
What immortal hand or eye
Could frame thy fearful symmetry?
William Blake, The Tyger

Fyrsta setning í bókinni ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (Elementin) eftir Evklíð staðfestir að jafnhliða þríhyrningur sé til, og lýsir jafnframt aðferð til að reisa slíkan þríhyrning með gefið strik sem grunnlínu. Aðferðin sem höfundurinn lýsti fyrir 2500 árum er sú sem er kennd í skólum nú á dögum. Evklíð notaði þessa setningu strax til þess að sanna næstu setningu, sem fullyrðir að til sé strik sem hefur fyrirfram gefinn endapunkt og er jafnlangt fyrirfram gefnu striki. Þetta sýnir glögglega hversu mikilvæg staða jafnhliða þríhyrninga var í huga Evklíðs.

Margir hafa hrifist af fullkomleika og samhverfu jafnhliða þríhyrninga. Ekki síst Napoleon Bonaparte, sem mun hafa verið áhugamaður um rúmfræði. Á eftir lítum við á fallega setningu þar sem fjórir jafnhliða þríhyrningar koma við sögu. Niðurstaðan er stundum kennd við Napoleon. Mér þykir samt ólíklegt að Napoleon hafi sannað þessa setningu því sönnunin er frekar erfið; ef til vill hefur hann þó giskað á hana með því að teikna flatarmyndir. Vitað er að Napoleon hafði gaman af því að ræða við stærðfræðingana Lagrange og Laplace, en einu sinni sagði Laplace við hann: „Síst af öllu þurfum við að fá kennslustund í rúmfræði hjá yður, mon général.“ Í framhaldi af þessu skipaði Napoleon Laplace í stöðu aðalherverkfræðings.

Við skulum líta á nokkur dæmi þar sem jafnhliða þríhyrningar koma við sögu. Sum þeirra eru lítt þekkt og koma lesandanum ef til vill á óvart. Öll eru þau bæði falleg og skemmtileg, en meira getum við varla krafist!

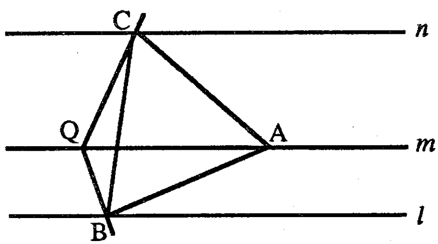
Við byrjum á því að líta á jafnhliða þríhyrning ABC sem er innritaður í hring (sjá mynd 1). Látum P vera hvaða punkt sem er á hliðinni BC og framlengjum strikið AP þangað til það sker hringinn. Köllum skurðpunktinn Q. Nú er það staðreynd að hornið $\angle CQB$ er $120°$ og línan QA helmingar það. Útskýringin er einföld: Hornin $\angle CQA$ og $\angle CBA$ eru



Mynd 1

ferilhorn sem spanna sama streng CA. Þau eru því jöfn. Fyrst $\angle CBA = 60°$ fæst einnig $\angle CQA = 60°$. Á hliðstæðan hátt fæst $\angle BQA = 60°$.

Þetta var bæði einfalt og augljóst en niðurstöðuna má nota til þess að leysa þraut sem er ekki alveg jafnt augljós: Teikna skal, með hringfara og reglustiku, jafnhliða þríhyrning sem hefur horn sín á þremur gefnum samsíða línum.

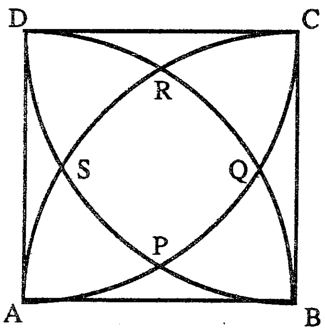


Mynd 2

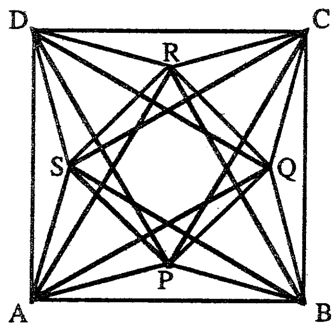
Köllum línurnar l, m og n og gerum ráð fyrir að m liggi á milli l og n (sjá mynd 2). Veljum punkt Q á m og drögum tvær hálflínur út frá

Q, hvora sínu megin við m, þannig að hvor um sig myndi 60° horn við m og hornið milli þeirra sé 120°. Önnur hálflínan sker l í punkti B og hin sker n í punkti C. Umritum hring um QBC. Hann sker línuna m í punkti A. Þríhyrningurinn ABC er jafnhliða. Punktinn A má einnig finna með því að reisa jafnhliða þríhyrning á BC.

Næsta dæmið er einnig lítil og skemmtileg þraut. Teiknum ferning og köllum hornpunkta hans A, B, C og D. Teiknum boga, með miðju A og geisla AB, sem tengir D og B. Teiknum svipaða boga með miðju í hinum hornpunktum ferningsins. Þá fást fjórir skurðpunktar þessara boga, P, Q, R og S, innan í ferningnum (sjá mynd 3).



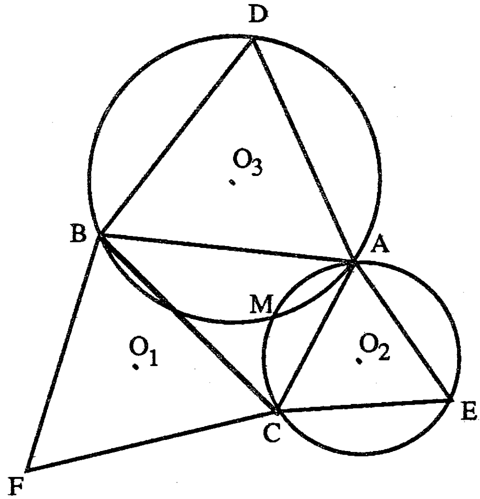
Mynd 3



Mynd 4

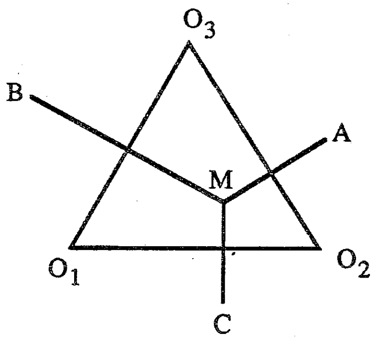
Myndin inniheldur því átta punkta, en þessir punktar mynda átta jafnhliða þríhyninga (sjá mynd 4). T.d. eru APS og AQD tveir þeirra. Sönnun á þessu getur lesandinn örugglega fundið. Nú er spurt: Ef hliðarlengd í ferningnum er jöfn 1, hvert er flatarmál þeirra níu svæða sem bogarnir skipta ferningnum í? Við látum lesandann glíma við þessa þraut, en gefum ekki svarið hér.

Nú snúum við okkur að setningu Napoleons sem getið var áðan. Látum ABC vera hvaða þríhyrning sem er, og reisum utanvert á hverri hlið hans jafnhliða þríhyrning, sem hefur þá hlið sem grunnlínu. Látum O_1, O_2 og O_3 vera miðjur þessara jafnhliða þríhyrninga (sjá mynd 5). Þá er það staðreynd að punktarnir O_1, O_2 og O_3 mynda jafnhliða þríhyrning. (Þegar um jafnhliða þríhyrning er að ræða getum við talað ótvírætt um miðju hans því að massamiðja, hæðamiðja, miðja umritaðs hrings og miðja innritaðs hrings eru einn og sami punkturinn.)



Mynd 5

Látum M vera skurðpunkt umrituðu hringanna um þríhyrningana ABD og ACE sem liggur innan í ABC. Við höfum að $\angle AMB = 120° = \angle AMC$ því mótlæg horn rásaðs ferhyrnings eru frændhorn (ferhyrningur er rásaður, ef hann er innritanlegur í hring). Þá fæst að $\angle CMB$ er einnig $120°$, en þá er ferhyrningurinn $CMBF$ einnig rásaður; með öðrum orðum, þá skerast umrituðu hringirnir um þríhyrningana ABD, BCF og CAE í einum punkti M. Þegar tveir hringir skerast, stendur línan sem tengir miðpunkta þeirra hornrétt á sameiginlega strenginn. Af þessu leiðir að O_1O_2 er hornrétt á CM, O_2O_3 er hornrétt á AM og O_3O_1 er hornrétt á BM (Sjá mynd 6). En hornin $\angle AMB$, $\angle BMC$ og $\angle CMA$ eru öll $120°$. Af því leiðir að hornin $\angle O_1O_2O_3$, $\angle O_2O_3O_1$ og $\angle O_3O_1O_2$ eru öll $60°$.



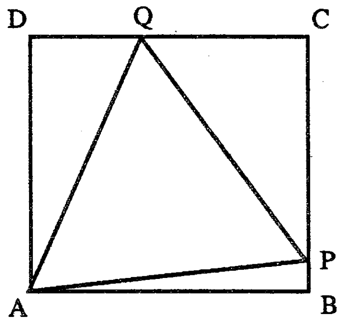
Mynd 6

Fleira er áhugavert í þessu dæmi, t.d. í sambandi við svokallaðan Fermat–punkt þríhyrnings, en við ætlum ekki að víkja frá því markmiði okkar hér að fjalla einungis um jafnhliða þríhyrninga.

Fyrir tveimur árum var sett fram í úrslitum stærðfræðikeppni framhaldsskólanema á Íslandi eftirfarandi dæmi: Látum $ABCD$ vera rétthyrning. Við innritum í $ABCD$ jafnhliða þríhyrning APQ þannig að P liggi á strikinu BC og Q liggi á strikinu CD. Sanna skal að flatarmál þríhyrningsins PQC sé jafnt samanlögðu flatarmáli þríhyrninganna AQD og APB (sjá mynd 7).

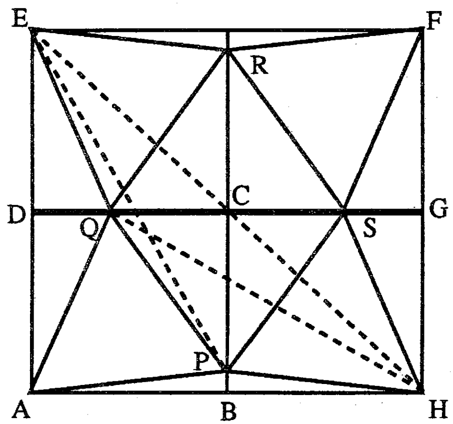
Einfaldasta lausn sem við þekktum byggðist á hornafræði. Sjaldan er hornafræðilausn falleg í augum hins sanna rúmfræðings! Stuttu seinna fundum við lausn sem byggðist á reglu Pýþagórasar. En sú lausn krafðist flókinnar algebru. Taldist hún þá ekki nógu rúmfræðileg.

Í leitinni að rúmfræðilegri lausn hefur maður hliðsjón af sönnun Evklíðs á reglu Pýþagórasar (Elementin I.47). Skýringarmynd Evklíðs sýnir glögglega hvernig ferningurinn á langhliðinni skiptist í tvo rétthyrninga sem eru hvor um sig jafn ferningnum á annarri hinna hliðanna. Þessi sönnun er ekki sú stysta sem þekkt er (stuttar sannanir á reglu Pýþagórasar byggjast á hlutfallareikningi og einslaga þríhyrningum sem Grikkir treystu ekki til fullnustu), en í henni er ekkert falið.



Mynd 7

Einn dag var höfundurinn að skoða mynd 4, og datt þá í hug að svipuð mynd, þar sem rétthyrningur kæmi í stað fernings, gæfi rúmfræðilega lausn á þessari þraut í anda Evklíðs.



Mynd 8

Speglum mynd 7 um línuna CB og speglum svo um línuna DC. Við fáum mynd 8. Takið eftir að tigull $PQRS$ myndast í miðjunni. Í formúlunum sem hér fylgja táknum við flatarmál marghyrnings með svigum. T.d. er flatarmál þríhyrningsins ABC táknað með (ABC). Snúum okkur að sönnuninni. Í stað þess að sanna að

$$(ABP) + (ADQ) = (PCQ),$$

nægir okkur að sanna að

$$(EFR) + (HFS) = 2(PCQ).$$

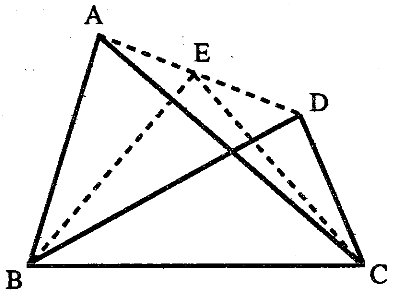
Nú sýnum við að þríhyrningarnir EFR og EPQ eru eins, og einnig að þríhyrningarnir HFS og HQP eru eins. Lítum á seinna parið. Ef við snúum strikinu HS rangsælis 60° um punktinn H, lendir HS á HP. Ef við snúum strikinu SF rangsælis 60° um punktinn S, lendir SF á SR. Hins vegar, ef við snúum strikinu SF rangsælis 60° *um punktinn* H, lendir það á striki, sem er jafn langt og strikið SR og samsíða því, en hefur endapunkt í P; þ.e. SF lendir á PQ. Þetta sýnir að 60° snúningur rangsælis um punktinn H varpar þríhyrningnum HFS á þríhyrninginn HQP; þessir þríhyrningar eru því eins. Á hliðstæðan hátt varpar 60° snúningur réttsælis um punktinn E þríhyrningnum EFR á þríhyrninginn EPQ. Þeir eru því eins. Okkur nægir því að sanna að

$$(PQE) + (PQH) = 2(PQC),$$

með öðrum orðum, að flatarmálið (PQC) sé hreint meðaltal flatarmálanna (PQE) og (PQH). Meginkosturinn við þetta er sá að allir þrír þríhyrningarnir sem koma hér fram hafa sameiginlega hlið.

Að lokum beitum við eftirfarandi hjálparsetningu: Látum ABC og DBC vera þríhyrninga með sameiginlega grunnlínu BC þannig að topppunktar þeirra A og D liggi sömu megin við BC (sjá mynd 9). Þá er meðalflatarmál þríhyrninganna ABC og DBC jafnt flatarmáli þríhyrningsins EBC þar sem E er miðpunktur striksins AD.

Lesandinn getur örugglega fundið sönnun á þessari niðurstöðu. Þá er einungis eftir að beita henni í mynd 8. Samkvæmt henni gildir í



Mynd 9

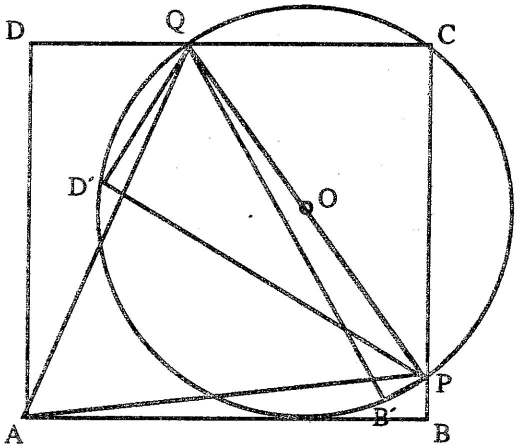
mynd 8 að flatarmálið (PQC) er hreint meðaltal flatarmálanna (PQE) og (PQH), því að C er miðpunktur striksins EH.

En sagan er ekki öll. Nýlega var ég að skoða bókina ***Mathematical Gems*** III eftir Ross Honsberger og hún hefur að geyma aðra lausn á þessu dæmi. Höfundurinn skrifar að hann sendi stærðfræðingi að nafni Edsger Dijkstra dæmið, en sá síðastnefndi sendi það til áttræðrar móður sinnar. Með næstu póstsendingu barst eftirfarandi lausn frá frú Dijkstra: Í mynd 7 snúum við þríhyrningnum ADQ $60°$ rangsælis um punktinn Q. Þá lendir A á P. Á svipaðan hátt snúum við þríhyrningnum ABP $60°$ réttsælis um P. Þá lendir A á Q. Látum D' og B' tákna punktana þar sem D og B lenda. Nú nægir okkur að sýna að

$$(PQC) = (PQD') + (PQB').$$

Takið eftir að hringurinn sem hefur PQ sem miðstreng inniheldur punktana C, D' og B', vegna þess að PQ spannar rétt horn í þessum þremur punktum. En hornið $\angle CQD'$ er $120°$. Hornið $\angle CB'D'$ er því $60°$. Á hliðstæðan hátt er hornið $\angle CB'D'$ einnig $60°$. Með öðrum orðum höfum við jafnhliða þríhyrning $CB'D'$ innritaðan í hring sem hefur miðstrenginn PQ (sjá mynd 10). Látum u, v og w vera lengdir lóðlínanna frá B', D' og C (í þessari röð) á strikið PQ. Okkur nægir að sanna að $u + v = w$.

Samkvæmt frú Dijkstra eigum við næst að hengja lóð með sama massa í punktana C, D' og B'. Massamiðja þessarar massaþrennu er punkturinn O, miðpunktur striksins PQ og jafnframt miðja umritaðs hrings



Mynd 10

þríhyrningsins $CB'D'$. Massaþrennan væri því í jafnvægi ef við settum hana á hnífsegg undir strikinu PC. En þessi niðurstaða er jafngild jöfnunni $u + v = w$. Réttilega kallar Honsberger þetta merkilega lausn!

Heimildir:

Euclid's Elements, volume 1. Dover Publications, New York.

Ross Honsberger, ***Mathematical Gems*** III, The Mathematical Association of America.

H.S.M. Coxeter og S.L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America.

AF GÕMLUM BLÕÐUM

Í síðasta fréttabréfi var birt grein eftir dr. Ólaf Daníelsson frá árinu 1929. Grein þessi, sem var sýnishorn af skrifum hans í Tímarit Verkfræðingafélagsins frá þessum tíma, hefur vakið forvitni sem ritstjórninni þykir rétt að svala með því að birta næstu grein hans, en hún kom út tæpu ári síðar og er raunar framhald þeirrar fyrri, sem ekki mun hafa framkallað neinar ritdeilur, svo ótrúlegt sem það nú er. Deilur um trúmál, stjórnmál og menningarmál voru á þessum árum illskeyttar og persónulegar, og því er það ekki trúlegt að þögnin við umræðu dr. Ólafs hafi stafað af því að hann kveði á stundum fast að orði. Hitt er trúlegra að engan hafi langað til að skylmast við hann á ritvellinum, en gefum honum nú orðið í annað sinn.

Grein eftir dr. Ólaf Daníelsson frá 1930:

TUNGUMÁLAFARGANIÐ

Síðan ég ritaði grein mína „Húmaníóra“ hér í tímaritið, hef ég oft átt tal við ýmsa málsmetandi menn um deildirnar í menntaskólanum og virðist mér það vera ætlun flestra, að stúdentar frá máladeild skólans séu sérstaklega vel að sér í málum, og telja ýmsir það ef til vill næga undirstöðu undir æðri menntun. Standa ekki bókmenntirnar opnar þeim sem málin kunna? Það gera þær nú að vísu ekki, ekki nema þá „bókmenntirnar“, dömulitteratúrinn. En um deildirnar í skólanum er það að segja, að það eru nákvæmlega sömu málin kennd í báðum, máladeild og stærðfræðideild, að latínu einni undantekinni. Í frakknesku, þýzku og íslenzku hefir kenslan meira að segja verið sameiginleg í báðum deildum, þangað til nú síðastliðinn vetur, að henni var skift, en tímafjöldinn var sá sami. Í ensku og dönsku eru tímarnir færri í stærðfræðideild, en þau mál eru bæði kennd í gagnfræðaskólunum.

Ég ber nú að vísu mikla respekt fyrir latínu sem skólanámsgrein, en þó því aðeins, að hún sé tekin strax fyrir, svo að latneska málfræðin geti orðið undirstaða málfræðikennslunnar. En þetta á sér enganvegin stað, eins og nú er, og latínan hefir þess vegna nú misst þá þýðingu, sem hún hafði áður fyrir skólanámið. Og svo er það enn eitt: Þegar við „busastoffin“ vorum að byrja latínu-nám hér fyr meir, fannst okkur víst mörgum, að við værum þegar komnir í nokkurskonar sálufélag með lærðum mönnum; ég man það frá því að ég var að læra undir skóla hjá honum séra Hálfdáni í Goðdölum, þeim góða kennara, núverandi biskupi Hólastiftis. Það kann að vera, að maður hafi einhverntíma tárast yfir Madvigs grammatík, en mikil var upphefðin, slíkt og þvílíkt! Nú horfir þetta allt öðruvísi við. Upphefðin er fyrir bí, og latínan er satt að segja orðin bara forngripur, ég get ekki annað sagt. Kunnáttan í henni er þá ekki heldur orðin meiri en svo, nú orðið, að mér er sagt, að einn piltur í skóla geti lesið latínu versíónarlaust undir tíma og sé hann frægur fyrir meðal meðal skólabræðra sinna, sem von er. Nei, latínukunnáttan setur ekki lengur neinn svip á íslenska menntamenn, og gerir það sjálfsagt aldrei framar.

Ég átti fyrir nokkuru tal við alkunnan íslenzkan fræðimann um ýmislegt, sem að þessum efnum lýtur, og var það helzt að heyra á honum, að honum væri alveg sama um allt, sem hann hefði lært í latínuskólanum, nema ensku og þýzku. En það veit trúa mín, að dýrt myndi ég þá þykjast keypt hafa vatnsdrykkinn, ef ég í þau sex ár, sem ég var við skólanám, hefði ekkert lært nema ensku og þýzku. Já, og mikið mega þá okkar húmanistísku menntamenn öfunda þjónana á Hótel Borg, sem spjalla ensku og þýzku eins og að drekka, og ef til vill frönsku líka, en hafa þó líklega aldrei gengið í latínuskóla. Þeir hafa sparað sér öll sex árin og undirbúningsárin líka, en kunna ensku og þýzku samt.

Það er annars yfirgengilegt, að upplýstir menn skuli telja það gerlegt, að senda unglinga í skóla hálfa og heila áratugi, til þess að læra eintóm mál, en eiginlega ekkert efni, er heitið geti. Hvað ætli að Þjóðverjar t.d. séu að gera í skóla í níu eða tíu ár? Ætli þeir séu altaf að læra ensku og frönsku? Ég skal að vísu játa, að við þörfnumst meiri málakunnáttu en aðrar þjóðir, bæði af því að enginn skilur okkar mál, og þó einkum vegna hins, hvað bókmenntir vorar eru átakanlega fábreyttar og einhliða. En ég hefði haldið, að menn gengju í skóla til þess að læra undirstöðuatriði þeirra þekkingargreina, sem hljóta að verða grundvöllur framhaldsnáms, til þess að þroska vit sitt á því að fást við verkefni af ýmsu tæi, við unglinga hæfi, til þess að læra að lesa með nokkurri athygli og dómgreind – sem verður ekki lært á því að lesa dömulitteratúr – til þess að læra að skrifa ljóst og skilmerkilega um kunnugt efni, þó að á það sé að vísu engin áherzla lögð hér í skólunum nú sem stendur, nú, og náttúrlega til þess að læra mál og reyndar til svo margs annars. Enginn skilji orð mín svo, að ég hafi á móti málakennslu; ég hef aðeins á móti málakennslu *svo að segja einni saman*, málakennslu, sem ríður skólanum á slig, svo að allt drukknar í tómu málastagli og stúdentarnir verða eins og sigldar píur að kunnáttu og andlegum þroska. Og að hvaða gagni kæmi það stúdentunum, þó að þeir gætu talað ensku, þýzku og frönsku, sem þeir að vísu geta ekki, ef þeir vegna þekkingarleysis og skilningsleysis tala tóma vitleysu á öllum málunum?

Vanþekkingin er mögnuð í latínuskólanum, hún ríður ekki við einteyming, hún er satt að segja alveg blöskranleg. Ég get ekki fundið þessum orðum stað, án þess að taka hversdagsleg dæmi. Í vor kom það fyrir á stúdentsprófi í máladeild, að breyta þurfti 1/4 í tugabrot. Þetta próblem reyndist gersamlega óleysanlegt, þó að langur umhugsunarfrestur væri gefinn (3 til 5 mínútur). Þið skuluð ekki halda, að ég fari hér með staðlausa stafi! Á þetta hlustuðu rektor skólans, tveir kennarar, stjórnskipaður censor og ýmsir fleiri, og þótti víst flestum pilturinn sæmilega vel að sér, ég held að hann hafi fengið laud. Reynið að spyrja málastúdent um terrestriska kóordínata, um það, hvað átt sé við með lengd staðar eða breidd; hann veit það ekki í níu tilfellum af tíu og tæpast í því tíunda heldur. Og þó að hann kynni að nefna gráður eða stig, eða eitthvað þess háttar, mundi hann enga hugmynd tengja við orðið. Veggir máladeildarinnar eru impregneraðir með „bókmenntum", þeir eru orðnir ísólerandi, þeir hindra aðstreymi af þekkingu. Það var að vísu ofurlítill gluggi á máladeildinni, þar sem mathematíkin var, en það er búið að byrgja hann. Nú týrir þar á kvæða– og smásögu–rusli.

Máladeild menntaskólans hefir frá því 1908 og þangað til nú fyrir fáum árum, verið ein um að útskrifa íslenska stúdenta, og væri þá ekki úr vegi að gera sér grein fyrir því, hvernig hún hafi leyst af hendi þetta ábyrgðarmikla hlutverk. Að vísu treysti ég mér ekki til að gefa neina heildarlýsingu á íslenzkri menntamannastétt, en þó eru ýms fyrirbrigði, sem naumast orka tvímælis og benda eindregið í lakari áttina. Ég á hér helzt við blöðin. Skynbærum mönnum ber nokkurnvegin saman um, að þau séu vond, verri en við þyrfti að búast, og að tónninn í blaðadeilunum sé ekki menntuðum mönnum samboðinn. Flest tímaritin eru fábreytt og ófróðleg. Þau byrja oftast með *kvæði*. Svo kemur kannske grein eins og „Trúarhugtakið", svo aftur kvæði, líklega eftir Vestur–Íslending, svo smásaga, sem heitir „Í rökkrinu", svo enn kvæði: „Stúlkan brjóstveika" o.s.frv. Þetta er alveg satt, þessar fyrirsagnir standa virkilega í tímaritsræksni, sem ég fann í bókarusli inni í skáp –. Eitt er enn, sem bendir til þess, að íslenzkir menntamenn séu ver upplýstir en sæmilegt má kalla.

Það er hin feykilega trúgirni, þeir eru um það eins og Bjarni á Leiti, þeir trúa bezt öllu því, sem vitlausast er. Það eru ekki til svo fáránleg hindurvitni, að þau eigi sér ekki forsvarsmenn meðal menntamanna þjóðarinnar. Þetta er alveg alkunnugt og sannanlegt. Það þarf ekki annað en minna á fjárdrápið norður í Húnavatnssýslu, hérna um árið, sem fjöldi menntaðra manna kenndi draugum eða huldufólki, já, eða furðuljósin, sem blöðin sáu tvisvar í viku, og draugaflugvélarnar, því að nú eru draugarnir hættir að ganga sig upp að hnjám, eins og í gamla daga, þeir þeytast nú í flugvélum landshornanna á milli, og helmingur skólagenginna manna trúir á þá. Það væri synd að segja, að þeir séu krítiskir, okkar yngri menntamenn af máladeildarkynslóðinni, þeir eru lýriskir í staðinn, en ég ætla nú að láta lýrikina í friði í þetta sinn.

Onei annars, ég læt hana ekkert í friði, úr því ég minntist á hana á annað borð. Lýrikin okkar er eitt auðvirðilegasta fyrirbrigði andlegrar starfsemi. Hún er ger af IV hlutum: Af músík villimannsins og af vísindum þess þekkingarlausa og af list klaufans og af heimskingjans fílósófi. Hún eitrar málið, gerir það óskýrt og heimskt og loðið og teygjanlegt og mér fjandsamlegt, hún velur orðin eftir því, á hvaða staf þau byrja, eða eftir því, hvernig endasamstöfur þeirra eru, en skiftir sér miklu síður af hinu, hvað þau þýða, já og stundum er hún bara endileysa, bara galtóm langavitleysa, alvizkuhlutfallahljómur! Þetta snilldarorð er eftir hann Matthías gamla, hann ber upp tvær gátur í sömu andránni: Hvað þýða höpp og fár? Hvað eru þúsund ár? Nú skyldi maður halda, að ráðningarnar væru tvær, sín á hvorri, því að höpp og fár þýða vissulega allt annað en þúsund ár. En það er bara ein ráðning: Alvizkuhlutfallahljómur. Það er billegt að vera spekingur á Íslandi. Svo á maður að hampa dellunni á tungunni og velta vöngum yfir kúnstinni: Al–vizk–u–hlut–fall–a–hljóm–ur. „Andríki", segja þeir, „fegurð"! Ætli það sé ekki nóg að kalla það „hegurð", það er orð, sem þeir á Akureyri hafa búið til. „Megurð" er aftur á móti klassískt.

Já, ég segi það satt, þeir eru brjóstumkennanlegir aumingjarnir, sem eru fordæmdir til þess að lifa alla sína æfi á tómum dömulitteratúr. Svo verða þeir að halda þessu á lofti, eins og það væri eitthvað, já meira að segja eins og það væri það eina sáluhjálplega, þeim fer líkt og Skrælingjunum á Grænlandi, sem kalla sjálfa sig „innuk", það kve þýða „mannkynið", ég hef lesið það í einhverri bók. „Við erum innuk", segja þeir, mannkrílin.

Jæja, svo að ég sleppi nú skáldskapnum okkar og „bókmenntunum" og því öllu, þá er meira en grátlegt til þess að vita, að við, sem gjarnan viljum láta kalla okkur menntaþjóð, skulum standa svo lágt, að eiga „lærðan" skóla, þar sem ekki er minnst á megin-fræðigreinar nútímans heldur en þær væru ekki til, já og „háskóla" líka, það mátti ekki minna vera. Aðrir eins skólar eru víst ekki til meðal hvítra manna, og naumast þó að víðar væri leitað. Því er nú mjög haldið á lofti, að þeim skjátlist þeim lærðu, alþýðuhyggjuvitið setji þá í gapastokkinn. En ef lærdómurinn dugar ekki, þá verður að læra meira. Ég býst ekki við að neinn annar vegur sé fær, sízt sá, að setja lærdómsstimpilinn á þá ólærðu og láta eins og vísindin séu viðfangsefni útlendinga og komi okkur ekki við. Nú stendur yfir öld skjótra breytinga og stórstígra framfara, mannvitið ryður nýjar brautir til meiri þekkingar og lífsþæginda, en skólarnir okkar draga sig þegjandi út úr, snúa rassinum í framfarirnar og kenna mál og fornfræði. Nú er mest þörf fyrir sögu Rómverja, svo skildist mér á stúdentinum í Morgunblaðinu um daginn, mest þörf á dálítið meiri latínu og meiri fornfræði. Ég hef annars ætíð undrast gáfur þeirra manna, sem geta sannað það, að Oddur Sigurgeirsson sé kominn af Upplendingakonungum, en geta hinsvegar ekki leitt nokkur skynsamleg rök að því, að talan 6 gangi upp í pródúkt þriggja talna, sem standa saman í talnaröðinni – sem virðist þó vera svo miklu auðveldara en hitt.

Meiri fornfræði og fleiri mál. Ég hef verið þar sem saman voru komnir tíu fullorðnir menn, eða fleiri, og ræddu um þarfir Menntaskólans. Hnigu tillögurnar helzt að því, að bæta við þremur málum, grísku, spönsku og sænsku. Þetta mála-delirium er ólæknað enn, sem sjá má af því, að bætt hefir verið við máladeildina fjórum tímum á viku í frönsku, til þess að láta það eitthvað heita nú, þegar stærðfræðinni er sleppt og þar með svo mörgu öðru, því að það er ekki nema nafnið, að greinum eins og eðlisfræði og stjörnufræði sé haldið í skólanum, þegar stærðfræðin er farin. Skilningurinn á öllu slíku verður henni áreiðanlega samferða.

Annars vil ég ekki láta skilja mig svo, að ég sjái eftir stærðfræðinni úr latínuskólanum eingöngu vegna hinna annara námsgreina, sem með henni hljóta að hverfa. Ég sé eftir henni vegna hennar sjálfrar. Mér sárnar að menn hér heima á Íslandi skuli öðlast stúdents-nafnbót, án þess að vera svo mikið sem gatistar í þeirri máttugu fræðigrein, hvað þá heldur meira, það setur svo mikinn skrælingjasvip á skólann. Það er nú að vísu svo um mathematíkina – og hefir víst verið svo frá alda öðli[1] – að hún skilur sauðina frá höfrunum, hún setur mennska menn í klassa fyrir ofan húsdýr og semínarista, asnarnir geta ekki lært hana, en þeir eiga ekki heldur að verða stúdentar, það ofbýður minni akademisku sál! Náttúrlega er nytsemi stærðfræðinnar, eða réttara sagt nauðsyn, hafin yfir allan efa, allra mest vegna hennar sjálfrar. Hérna er citat, sem ég rakst á fyrir nokkru, úr bréfi frá Jacobi til Legendre: „Il est vrai, que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir, *que le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain*, et que sous ce titre une question de nombre vaut autant qu'une question du système du monde."[2] Ég þegi nú bara sjálfur.

Máladeildin hefir sett ofan við það að sleppa stærðfræðinni, þeir vita það, sem að henni standa, nemendurnir hygg ég að viti það, að minnsta kosti. Það er ekki víst, þegar allt kemur til alls, að máladeildar-stúdentar verði svo miklu betur að sér í málum heldur en hinir. Þeir eru það líklega í fyrstu, en trúað gæti ég því, að stærðfræðideildar-stúdentar læsu fullt svo mikið á útlendum málum þegar fram í sækir, margir hverjir. Hinir hafa sem sé ekkert fengið í veganesti frá latínuskólanum, að heitið geti, nema eintóman málagrautinn, óbættan. Og svo koma þessir málastúdentar, þessir semínaristisku gæsalappa-„stúdentar" ofan í innréttinguna við Austurvöll og fara að lesa íslenzku, fara nú að stúdera „íslenzku", sem þeir læra þó aldrei á við meðal-Þingeying, taka svo eftir hæfilega mörg ár próf í Símoni Dalaskáldi, já, og lifa síðan langa æfi og deyja í þeirri trú, að þeir hafi verið menntamenn. Ætli þeir verði sáluhólpnir upp á hana?

Ólafur Daníelsson

---

1 Í mínum gamla latneska Euklids-doðranti stendur (á eftir reglunni, að hornalína og hlið í kvaðrati séu ekki „sammælanlegar") þessi klausa: Celebratissimum est hoc theorema apud veteres Philosophos, adeo ut qui hoc nesciret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret.

2 „Það er rétt, að herra Fourier var þeirrar skoðunar að höfuðmarkmið stærðfræðinnar væri að nýtast almenningi og að skýra fyrirbrigði náttúrunnar. En heimspekingur eins og hann hefði átt að vita, *að eina markmið vísindanna er að efla heiður mannsandans*, og í ljósi þess er talnaþraut jafn mikils verð og gátan um heimskerfið allt." (Lausleg þýðing R.S.)

LAUSNIR Á DÆMUNUM Í STÆRÐFRÆÐIKEPPNINNI

1. Við notum leifareikning. Fyrst $7 \equiv -1 \pmod 8$ gildir að $7^n \equiv (-1)^n \pmod 8$. Ef n er slétt tala þá fæst

$$7^n n + 4n + 1 \equiv n + 4n + 1 \equiv 5n + 1 \pmod 8.$$

En $5n+1$ er þá oddatala og því ekki deilanleg með 8. Það er því útilokað að fá lausn sem er slétt tala. Gerum ráð fyrir að n sé oddatala. Þá fæst

$$7^n n + 4n + 1 \equiv -n + 4n + 1 \equiv 3n + 1 \pmod 8$$

Nú gildir að $3 \cdot 5 + 1 \equiv 0 \pmod 8$, og því eru allar lausnir á leifajöfnunni

$$3n + 1 \equiv 0 \pmod 8$$

af gerðinni $n = 5 + 8k$. Svarið er því: Allar tölur ef gerðinni $5 + 8k$ þar sem k er náttúrleg tala.

2. (i) Látum $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, þ.e.a.s. $b^2 = ac$, þar sem $a = x + k$, $b = x + l$ og $c = x + m$ og $k < l < m$. Þá fæst $x^2 + 2lx + l^2 = x^2 + (k+m)x + km$, og þar með $(k + m - 2l)x = l^2 - km$. Ef $k + m - 2l = 0$, þ.e.a.s. $k + m = 2l$, þá væri líka $l^2 - km = 0$, þ.e.a.s. $km = l^2$. En þá fengist $(k - m)^2 = (k + m)^2 - 4km = (2l)^2 - 4l^2 = 0$, í mótsögn við $k < m$. Því er $k + m - 2l \neq 0$ og

$$x = \frac{l^2 - km}{k + m - 2l}.$$

(ii) Ef fullyrðingin er rétt fyrir $x' = x + u$, þar sem u er náttúrleg tala, þá er hún líka rétt fyrir x, því að runan $x', x' + 1, x' + 2, \ldots$ er hluti af rununni $x + 1, x + 2, \ldots$. Af þessu leiðir að við megum gera ráð fyrir að $x > 0$. Við skrifum nú $x = \frac{p}{q}$ með náttúrlegum tölum p og q. Við látum $a = x$, $b = x + p$ og $c = x + 2p + pq$.

3. Látum k vera hámarksfjölda skáka, sem $2k$ keppendur tefldu. Hinir $20 - 2k$ keppendurnir tefldu a.m.k. eina skák hver og engir tveir þeirra tefldu saman, því annars gætum við fundið $k+1$ skák, sem $2(k+1)$ keppendur tefldu, í mótsögn við að k er hámarksfjöldi slíkra skáka. Af þessu sést að $(20 - 2k) + k \leq 14$, sem jafngildir $k \leq 6$.

4. Samkvæmt reglunni um venjulegt meðaltal og rúmfræðilegt meðaltal gildir

$$\left(\frac{x}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^l \cdot \left(\frac{z}{m}\right)^m \leq \left(\frac{k \cdot \frac{x}{k} + l \cdot \frac{y}{l} + m \cdot \frac{z}{m}}{k+l+m}\right)^{k+l+m}$$
$$= \left(\frac{x+y+z}{k+l+m}\right)^{k+l+m},$$

svo að

$$\frac{x^k \cdot y^l \cdot z^m}{(x+y+z)^{k+l+m}} \leq \frac{k^k \cdot l^l \cdot m^m}{(k+l+m)^{k+l+m}}.$$

5. Við höfum $\dfrac{|AP|}{|A'P|} = \dfrac{|AP|^2}{|AP||AP|}$ og $|AP||A'P|$ er veldi punktsins P miðað við hringinn. En þetta veldi er líka jafnt $(r - |OP|)(r + |OP|) = r^2 - |OP|^2$ þar sem r er geisli hringsins og O er miðpunktur hans. Með því að gera það sama við hin hlutföllin tvö og lengja svo með $r^2 - |OP|^2$ sjáum við að jafnan í dæminu er jafngild jöfnunni $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = 3(r^2 - |OP|^2)$. Þessa jöfnu er einfalt að sanna með vigurreikningi. Við höfum

$$|AP|^2 = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}||^2 = |OP|^2 - 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} + |OA|^2 = |OP|^2 - 2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} + r^2.$$

Með því að reikna $|BP|^2$ og $|CP|^2$ á sama hátt, leggja saman og draga saman liði fæst að

$$|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = 3|OP|^2 - 2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + 3r^2.$$

En nú er $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, svo að $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3\overrightarrow{OP}$. Með því að setja það inn fæst

$$|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = 3|OP|^2 - 6\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP} + 3r^2$$
$$= 3|OP|^2 - 6|OP|^2 + 3r^2 = (r^2 - |OP|^2).$$

Jón Magnússon og Robert Magnus:

GÁFNASKERPIR

Við félagarnir höfum tekið að okkur heilabrotadálk fyrir fréttabréfið, og verður hann fastur þáttur í fréttabréfinu eftirleiðis. Hlutverk hans er að sjá áhugasömum lesendum fyrir uppbyggilegum stærðfræðiþrautum af ýmsum toga. Við munum víða leita fanga og mest af því efni sem við setjum fram hefur sést áður. En fyrst og fremst reynum við að velja skemmtileg og áhugaverð viðfangsefni, sem unnt er að leysa án mikillar stærðfræðiþekkingar. Af þessu má *ekki* draga þá ályktun að þrautirnar verði alltaf mjög einfaldar!

Sá háttur verður hafður á, að hverjum nýjum þrautaskammti fylgja lausnir þrautanna úr næsta tölublaði á undan. Lesendur eru eindregið hvattir til að senda okkur lausnir. Munum við birta nöfn þeirra, sem senda inn réttar lausnir, ásamt þeim lausnum sem okkur þykja eftirtektarverðastar. Ennfremur þætti okkur vænt um að lesendur sendu okkur stærðfræðileg verkefni sem vakið hafa áhuga þeirra, til dæmis þrautir sem þeir hafa búið til sjálfir, hvort sem þeir hafa lausnir á þeim eða ekki. Þannig gæti Gáfnaskerpir orðið ósvikinn flóamarkaður fyrir skemmtilegar stærðfræðiþrautir. Við vonum að fyrsti skammturinn fari vel í ykkur, og hér kemur hann:

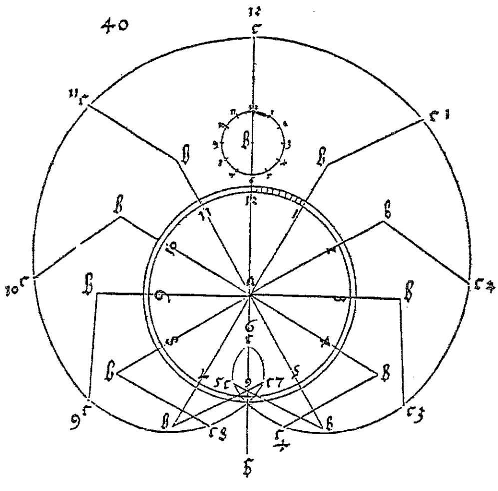
1. Lítið á mynd 3 á bls. 28 í grein Roberts um jafnhliða þríhyrninga. Hvert er flatarmál svæðisins $PQRS$?

2. Punktar P og Q eru gefnir innan í þríhyrningi ABC. Gefið er að $\angle PAC = \angle QAB$ og $\angle PBA = \angle QBC$. Sannið að $\angle PCA = \angle QCB$.

3. Fyrir hvaða heilar tölur $n \geq 3$ er til reglulegur n-hyrningur í hnitasléttunni $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sem hefur þann eiginleika að allir hornpunktar hans hafa einungis heilar tölur sem hnit?

Góða skemmtun.

Aber ein andre lini/die sey genant ein spinnen lini/darum dz sie im aufreissen/dardurch mans macht schier einer spinnen enlich ist/die mach ich durch ein zwifache bewegung also/Jch reis eyn aufrechte lini.a.b.daran setz ich ein andre lini der end sey.c.vñ die lini.a.b.laß ich im end a stet bleiben/Aber das end.b.für ich in zirckels weis herumb/wie ich dañ der end im umblauf vberal mit b.vertzeichent hab/Damach soll im end.b.die ander daran gestossen lini.c. mit jrem hyndern ende im puncktem.b.auch stett bleiben/aber das förder end.c.soll in zirckels weiß herum gefürt werden/So dañ die erst lini umgefürt/vnd die ander anstosset auch sonderlich herum gefürt wirdet/so zeichent das end c.ein sonderliche lini/damit aber dise lini gewyß gefürt werd/so setz ich eyn zirckel mit dem ein fuß in dẽ punckte.a.vñ reiß mit dem andern fuß eyn zirckellini vnder dem/b/die gradir ich auch in theyl mit ziffern/dardurch die lini.a.b.von punckt zů punckt gewyß gee/Des gleichẽ thů ich im auch im punckte.b. vnnd so offt ich mit der lini.a.b.eyn grad gee / so oft gee ich auch ein grad im zirckel.b.mit der lini.c.so zeichnet das end.c.die puncktẽ zwischen den jr lini zůsamen soll getzogen werden/die ich vberall mit.c verzeichent hab/wie das nachfolgett aufgeryssen ist.



Íslenska stærðfræðafélagið
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Fjölritunarstofa
Daníels Halldórssonar