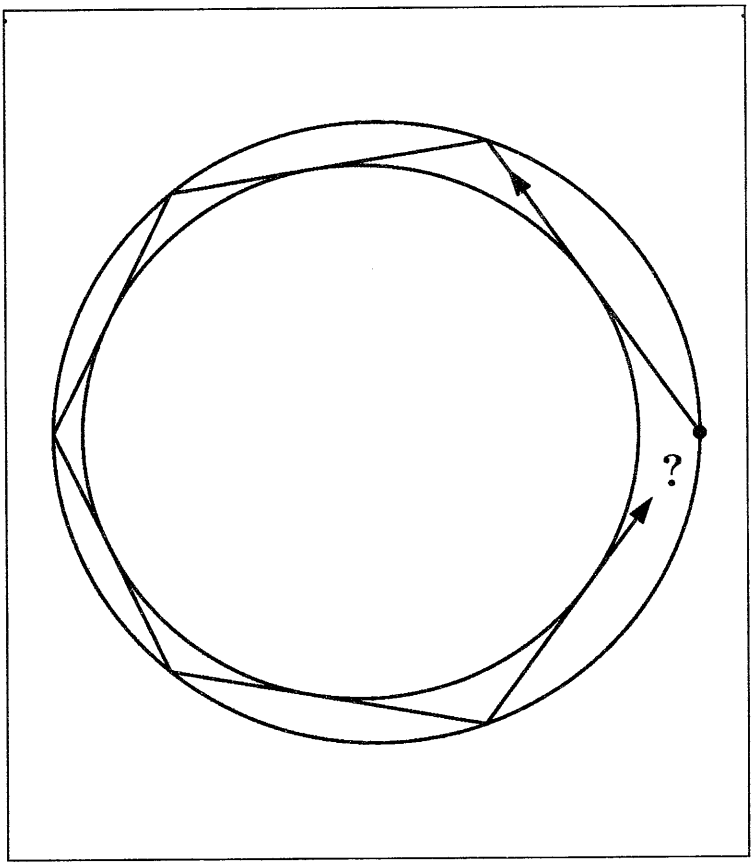
# FRÉTTABRÉF

# ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGSINS

**1. tbl. 3. árg.** **Ágúst 1991**



**Fréttabréf Íslenzka stærðfræðafélagsins**

*Ritstjóri:* Jón Ragnar Stefánsson

*Stjórn Íslenzka stærðfræðafélagsins:*
Jón Ragnar Stefánsson, *formaður*
Jón Hafsteinn Jónsson, *gjaldkeri*
Sven Þ. Sigurðsson, *ritari*

*Póstfang:*
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

## Efni



**Forsíðumyndin:** Lendum við aftur á byrjunarpunktinum? Ef svo vill til um einhvern byrjunarpunkt, þá gildir það einnig um sérhvern annan byrjunarpunkt á ytri hringnum. Jafnframt gildir þá, að strengirnir í ytri hringnum, sem um leið eru snertlar innri hringsins, verða jafnmargir, hvar svo sem byrjað er. Sigurður Helgason leiðir lesandann í allan sannleika um þetta efni í þessu *Fréttabréfi*.

**Baksíðumyndin:** Tökum einhvern byrjunarhring, sem snertir yzta hringinn að innanverðu og innsta hringinn að utanverðu. Bætum öðrum slíkum hring við, sem að auki snertir fyrsta hringinn. Höldum þannig áfram. Svissneski stærðfræðingurinn Jacob Steiner (1796–1863) sannaði, að ef þessu lýkur, þannig að hringjarunan lokast, þá er sama hvar byrjunarhringurinn er valinn: Hringjarunan lokast alltaf. Um þetta má lesa t.d. í grein í *Normat, Nordisk Matematisk Tidskrift*, frá 1989.

# LEIFUR ÁSGEIRSSON

Leifur Ásgeirsson, heiðursfélagi Íslenzka stærðfræðafélagsins, lézt hinn 19. ágúst 1990 á 88. aldursári, og var hann jarðsunginn frá Fossvogskirkju 6. september. Við kistu hins látna var lagður blómsveigur frá Íslenzka stærðfræðafélaginu. Úr kirkju báru kistuna fimm félagsmenn, Björn Bjarnason, Guðmundur Arnlaugsson, Halldór I. Elíasson, Jón Ragnar Stefánsson og Magnús Magnússon, og ennfremur Sigmundur Guðbjarnason, Unnsteinn Stefánsson og Þórir Kr. Þórðarson.

Eftirmæli birtust í dagblöðum eftir sjö félagsmenn: Eggert Briem, Guðmund Arnlaugsson, Halldór I. Elíasson og Sigurð Helgason í *Morgunblaðinu* 6. september, Magnús Magnússon í *Morgunblaðinu* og *Tímanum* sama dag, Björn Birni í *Tímanum* 8. september og *Morgunblaðinu* 9. september og Jón Ragnar Stefánsson í *Morgunblaðinu* 9. september. Í greinunum er með margvíslegu móti brugðið upp mynd af hinum látna, starfi hans lýst og gerð nokkur grein fyrir verkum hans.

Einnig birtust fróðleg og athyglisverð eftirmæli eftir Jón H. Magnússon, Pál V. Daníelsson og Þóri Kr. Þórðarson í *Morgunblaðinu* 6. september, Helgu Kristjánsdóttur og Jónas Kristjánsson í *Tímanum* sama dag og Jens Ó. P. Pálsson í *Morgunblaðinu* 7. október. Þá er hluti *Reykjavíkurbréfs Morgunblaðsins* 9. september helgaður Leifi Ásgeirssyni.

Áður en fyrirlestur Sigurðar Helgasonar hófst í þéttsetnum sal í Odda 4. október sl. minntist formaður félagsins Leifs Ásgeirssonar með svofelldum orðum:

> Þetta er fyrsti fundur í Íslenzka stærðfræðafélaginu eftir að Leifur Ásgeirsson lézt hinn 19. ágúst síðastliðinn. Hann var einn af stofnendum félagsins fyrir 43 árum og máttarstólpi þess alla tíð. Allt fram á hin allra síðustu misseri sótti hann nánast hvern fund og lagði ætíð til holl ráð um velgengni félagsins. Hann var kjörinn heiðursfélagi Íslenzka stærðfræðafélagsins á sjötugsafmæli sínu fyrir sautján árum. Ég bið fundarmenn um að minnast Leifs Ásgeirssonar með því að rísa úr sætum.

Vel fór á, að svo skyldi vilja til, að þegar Leifs Ásgeirssonar var minnzt, skyldi fundur svo fjölsóttur, en samkvæmt fundargestabók voru þar alls 128 manns.

*Jón Ragnar Stefánsson:*

# MÁLÞINGIÐ Á LAUGARVATNI 1990

Í síðasta tölublaði *Fréttabréfs*, sem kom út um miðjan júní 1990, var greint ítarlega frá fyrirhuguðu **málþingi á Laugarvatni til heiðurs Bjarna Jónssyni sjötugum**, en lokaspretturinn í undirbúningsvinnunni var þá rétt að hefjast.

Málþingið, sem stóð yfir frá mánudagsmorgni 2. júlí til föstudagskvölds 6. júlí, fór í meginatriðum fram eins og skýrt var frá í *Fréttabréfinu*, og verður það ekki endurtekið hér. Einmuna veðurblíða hélzt á Laugarvatni allan tímann og varð hún til að auka mjög á ánægju hinna erlendu þátttakenda, en ekki varð vart við annað en að þeim líkaði hið bezta aðbúnaður allur og viðurgjörningur á Laugarvatni.

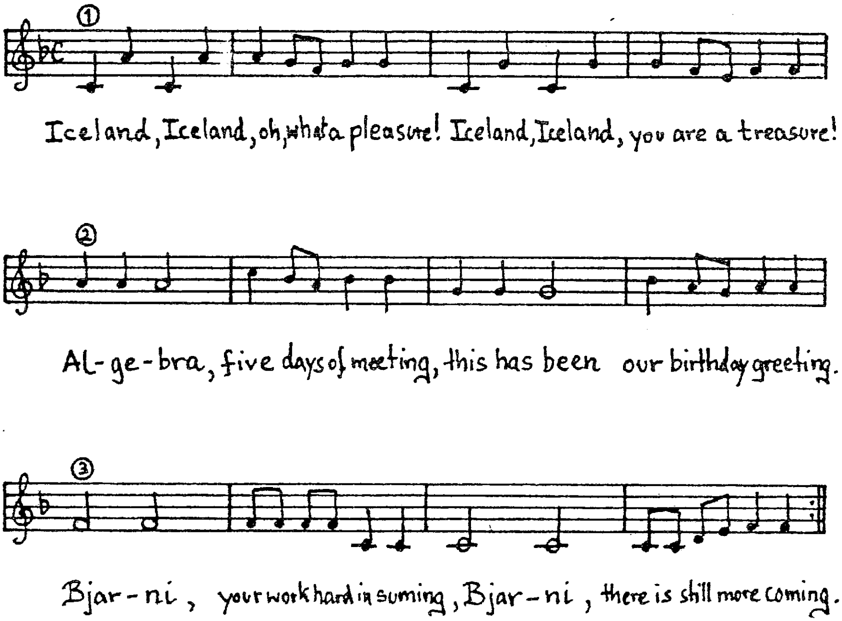
Málþinginu voru gerð nokkur skil opinberlega. Auk sérstakrar fréttatilkynningar til fjölmiðla var í *Morgunblaðinu* 3. júlí grein um það og Bjarna Jónsson sjálfan eftir Jón Ragnar Stefánsson, að stofni til samhljóða greinunum í síðasta *Fréttabréfi*, og í *Þjóðviljanum* 6. júlí voru viðtöl annars vegar við Bjarna og hins vegar við George McNulty, en hann stjórnaði málþinginu af hálfu útlendinganna. Í *Morgunblaðinu* 12. júlí birtust svo fréttamyndir frá málþinginu.

Lokahóf málþingsins var í rauninni síðbúin afmælisveizla til heiðurs Bjarna Jónssyni og voru ræðuhöld mikil og kátína undir borðum, en alls sátu hófið um 90 manns. Af íslenzkri hálfu ávarpaði formaður Stærðfræðafélagsins hina erlendu gesti og svo Bjarna Jónsson sérstaklega. Meðal gjafa, sem Bjarna voru færðar, var hefti, þar sem lærisveinar hans til doktorsprófs á undanförnum áratugum röktu endurminningar um samskipti sín við hann, en flestir þeirra tóku þátt í málþinginu.

Að ræðuhöldum loknum hófst almennur söngur og var þá frumfluttur óður til Bjarna, algebrunnar og Íslands, en hvort tveggja var samið á staðnum, lag og texti. Að loknum allmörgum æfingum tókst þrískiptur keðjusöngur með hinum mestu ágætum, og jókst gleði manna við hvern flutning á þessum dýrðaróð, sem birtur er hér á opnunni á frummálinu.

Að morgni laugardags yfirgáfu gestir Laugarvatn og fóru þá um tveir þriðju hlutar þeirra í dagsferð um Kaldadal og Borgarfjörð. Á suðurleið var farið um Svínadal, þar sem fyrirhuguð var síðdegisáning nærri bernskustöðvum Bjarna. Um þær mundir sem þangað kom, tók að rigna

# Bjarni's Birthday Canon



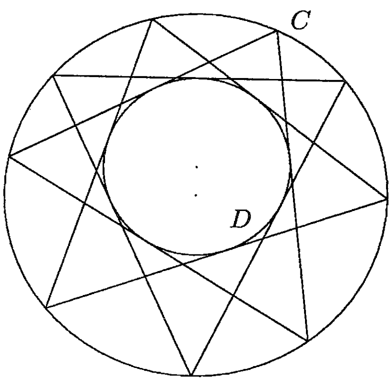

á ferðalangana — í fyrsta sinn eftir vikudvöl hér á landi. Í Kornahlíð bar svo við, að þeim var veitt fyrirsát, því tvö systkina Bjarna biðu þar ásamt mökum sínum og buðu til stofu á Geitabergi. Þar voru reiddar fram nýbakaðar pönnukökur með rjóma og rabarbarasultu, og gerðu gestirnir sextíu veitingunum hin beztu skil. Þessu óvænta heimboði var tekið með miklum fögnuði, og þökkuðu menn fyrir sig með því að taka upp keðjusönginn frá kvöldinu áður. Tók nú undir í þéttskipuðum stofunum á Geitabergi, enda söngurinn æfður til fulls, og þótti gestum að hér lyki með verðugum hætti málþinginu til heiðurs Bjarna Jónssyni.

*Sigurður Helgason:*

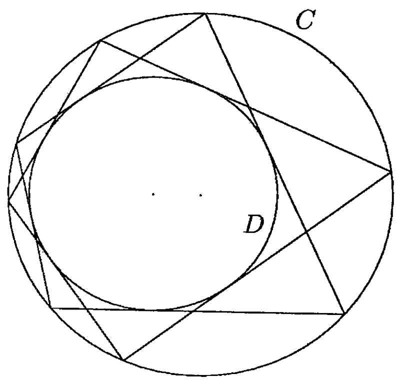
# TVEIR TÖFRAMENN RÚMFRÆÐINNAR, PONCELET OG JACOBI

**1. Inngangur.** Aðalefni þessa fyrirlestrar[1] er setning eftir Frakkann Jean-Victor Poncelet, sem birtist í bók hans *Traité des propriétés projectives des figures*, sem kom út árið 1822, þegar Poncelet var 34 ára.

**Setning („Pórismi" Poncelets).**[2] *Ef tveir hringar $C$ og $D$ hafa þann eiginleika, að til er einn $n$-hyrningur innritaður í $C$ og umritaður um $D$, þá eru til óendanlega margir slíkir $n$-hyrningar.*




1. *mynd*: $n = 3$




2. *mynd*: $n = 4$

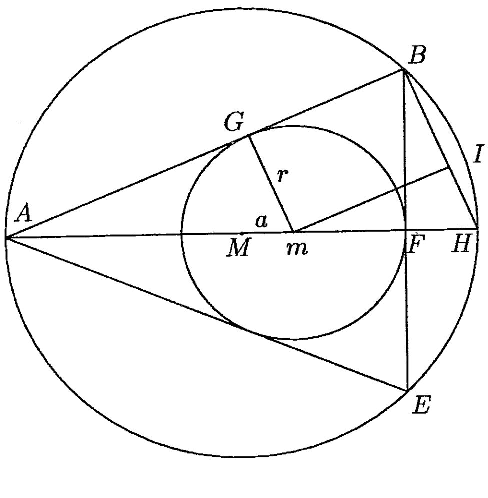
Nánar tiltekið gildir þá, að *sérhver* punktur $P$ á $C$ er hornpunktur á $n$-hyrningi, sem er innritaður í $C$ og umritaður um $D$. Á 1. og 2. mynd er þetta fyrirbrigði sýnt fyrir þríhyrninga og ferhyrninga.

[1] Fyrirlestur í Íslenzka stærðfræðafélaginu 4. október 1990.

[2] Orðabók Websters skýrir orðið *porism* svo í lauslegri þýðingu: „Setning, sem segir um tiltekið verkefni, að unnt sé að finna skilyrði þess, að það sé óákvarðað eða að það hafi óteljanlega margar lausnir." Setning Steiners (sbr. baksíðumyndina) er annað dæmi um slíka setningu. (Ritstj.)

Poncelet var einn af aðalbrautryðjendum varparúmfræðinnar („prójektívgeometríu“). Í verkum sínum notaði hann mikið hugtakið um óendanlega fjarlægan punkt á hverri línu, þannig að tvær línur í fletinum skerast alltaf í einum punkti, hvort sem þær eru samsíða eða ekki; einnig innleiddi hann komplexar tölur í rúmfræðina og hafði þannig mikil áhrif á algebrulega rúmfræði síðari tíma.

Örlög Poncelets voru óvenjuleg. Hann var liðsforingi í herferð Napóleons til Rússlands 1812. Eins og kunnugt er neyddist Napóleon til að gefast upp við þá herferð og sneri við í Moskvu, þegar borgin var í björtu báli. Í orrustunni við Krasnoi særðist Poncelet, að því er haldið var til ólífis, en fannst síðar af tilviljun og var látinn ganga í hörkufrosti í fimm mánuði austur að Volgufljóti, þar sem hann var settur í fangelsi í Saratov. Sér til dundurs í fangelsinu fór hann að rifja upp allan sinn stærðfræðilærdóm og þannig skapaðist síðan uppistaðan í bók hans, sem áður var getið. Meðal annars uppgötvaði hann „pórisma“-setninguna í fangelsinu 1813–1814.




*3. mynd*

Áður en ég fer út í sönnun á setningunni skulum við líta á nokkrar afleiðingar. Tökum fyrst tilfellið $n = 3$ (sjá 3. mynd). Af öllum þeim þríhyrningum, sem eru innritaðir í $C$ og umritaðir um $D$, tökum við annan þríhyrninganna, sem hefir einn hornpunkt $A$ á tengilínu miðpunkta hringanna, $m$ og $M$. Látum $r$ og $R$ tákna radíusa hringanna og $a$ lengdina á tengilínu miðpunktanna. Fellum lóðlínur $mG$ á $AB$, $mI$ á $BH$ og $BF$ á $AH$. Myndin sýnir, að línustrikin $GB$, $mI$ og $BF$ hafa sömu lengd og þess vegna hafa $BH$ og $mH$ sömu lengd. Með því að athuga þríhyrningana $AmG$ og $AHB$ fæst því

$$\frac{r}{R+a} = \frac{R-a}{2R},$$

svo að

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+a} + \frac{1}{R-a}. \tag{1}$$

Næst lítum við á tilfellið $n = 4$ (sjá 4. mynd). Aftur skoðum við ferhyrning innritaðan í $C$ og umritaðan um $D$, sem hefir einn hornpunkt $A$ á tengilínu miðpunkta hringanna, $m$ og $M$. Aftur tákna $r$ og $R$ radíusana og $a$ táknar lengd miðtengilínunnar. Ef við fellum lóðlínur $mG$ og $mH$ frá $m$ á hliðarnar $AB$ og $BE$, fæst með því að athuga þríhyrningana $AmG$ og $mEH$, að

$$\frac{\sqrt{(R-a)^2 - r^2}}{R-a} = \frac{r}{R+a}.$$

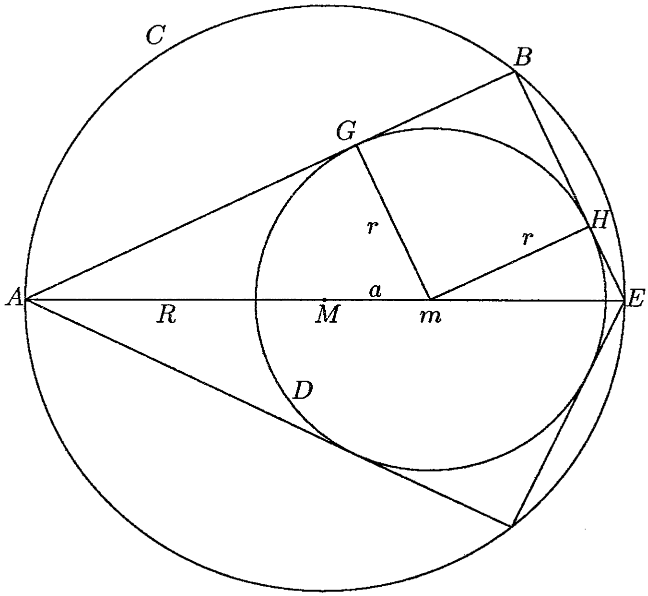
Eftir einfalda útreikninga fæst úr þessu, að

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+a)^2} + \frac{1}{(R-a)^2}. \tag{2}$$

Formúlurnar (1) og (2) eru sláandi líkar og er því nærliggjandi að geta sér til um, að svipaðar formúlur fyrir $r$, $R$ og $a$ gildi fyrir $n = 5$, $n = 6$ o.s.frv. Því miður er þessu ekki svo farið. Stærðfræðingurinn Steiner sannaði þó, að

$$r\frac{R-a}{R+a} = \sqrt{(R-r)^2 - a^2} + \sqrt{2R(R-r-a)} \qquad (n=5),$$

$$3\left(R^2 - a^2\right)^4 = 4r^2\left(R^2 + a^2\right)\left(R^2 - a^2\right)^2 + 16r^4a^2R^2 \qquad (n=6).$$




*4. mynd*

Poncelet sannaði „pórisma“-setninguna fyrst í fangelsinu með flóknum útreikningum. Síðar sannaði hann setninguna með aðferðum varparúmfræðinnar og sú sönnun gildir einnig, ef $C$ og $D$ eru ellipsur. Slíkar sannanir má finna í [2] og [9].

Það var Brynjólfur Stefánsson tryggingastærðfræðingur, sem fyrst sagði mér frá setningu Poncelets fyrir löngu (1946); ég tók þá eftir afleiðingunum (1) og (2) og lék því hugur á að sjá sönnun á setningunni. Sönnun Jacobis, sem fer hér á eftir, finnst mér bera vott um snilligáfu þessa 24 ára stærðfræðings. Þess má geta, að Poncelet sjálfur var einnig 24 ára, þegar hann uppgötvaði setninguna.

**2. Hringavendir.** Ef $C_1$ og $C_2$ eru tveir hringar, sem ekki eru sammiðja, er til nákvæmlega ein lína $l$, sem myndast af þeim punktum, sem hafa snertla til $C_1$ og $C_2$ af sömu lengd. Ef hringarnir skerast, er $l$ tengilína skurðpunktanna. Almennt sést þetta bezt með því að skrifa hring $C$ með radíus $r$ og miðpunkti $(a, b)$ á forminu

$$C: \quad P(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Þá sést með reglu Pýþagórasar, að ef punkturinn $(x', y')$ liggur utan við $C$, þá er $P(x', y')$ kvaðratið af lengd snertlanna frá $(x', y')$ til hringsins. Ef $C_1$ og $C_2$ hafa líkingarnar $P_1(x, y) = 0$ og $P_2(x, y) = 0$, þá er

$$P_1(x, y) - P_2(x, y) = 0$$

líkingin fyrir $l$. Línan $l$ heitir *radíkalás* hringanna eða *miðalína*.[3] Það er auðséð, að $l$ er hornrétt á tengilínu miðpunkta hringanna.

Hugsum okkur aftur, að hringurinn $D$ liggi innan í hringnum $C$. Látum $A$ tákna skurðpunkt radíkalássins við tengilínu miðpunktanna $m$ og $M$. Ef $s$ er lengd snertlanna frá $A$ og $d$ er fjarlægðin frá $M$ til $A$, fæst samkvæmt reglu Pýþagórasar (sjá 5. mynd)

$$s^2 + R^2 = d^2 \quad \text{og} \quad s^2 + r^2 = (d - a)^2$$

og þess vegna

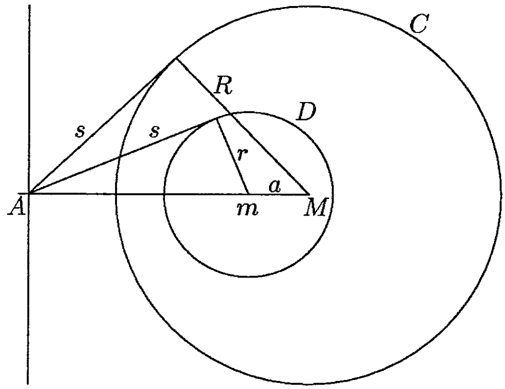
$$d = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}. \tag{3}$$

Ef $C_1$ og $C_2$ eru tveir hringar með radíkalás $l$, er safnið af hringunum

$$\{D \mid C_1 \text{ og } D \text{ hafa } l \text{ sem radíkalás}\}$$

kallað *hringavöndur*. Ef $C_1$ og $C_2$ skerast, er hringavöndurinn safnið af öllum hringum gegnum skurðpunktana.

[3] Sjá bók Ólafs Daníelssonar: *Um flatarmyndir. Kennslubók í rúmfræði.* Reykjavík, 1920.




*5. mynd*

**Hjálparsetning.** *Gerum ráð fyrir eftirfarandi:*
*(1) $C$ er hringur og $D$ og $D'$ eru hringar innan í $C$.*
*(2) Radíkalás $C$ og $D$ = radíkalás $C$ og $D'$.*

*Ef $D$ og $D'$ hafa sameiginlegan snertil $t$, þá gildir, að $D = D'$.*

Ef $P$ er skurðpunktur radíkalássins $l$ og snertilsins $t$, þá er lengd snertlanna frá $P$ til hringanna $C$, $D$ og $D'$ sú sama. Þess vegna snertast hringarnir $D$ og $D'$. En $l$ er hornrétt á miðtengilínu $C$ og $D$ og einnig á miðtengilínu $C$ og $D'$. Af þessu sést, að $D = D'$.

**3. „Elliptísk" föll.** Nú víkur sögunni að hinum mikla stærðfræðingi Jacobi, sem var fæddur 1804. Verk hans liggja öll á mjög háu plani, og af þeim ástæðum er nafn hans ekki á jafnmargra vörum eins og t.d. nafn Gauss. Jacobi og Abel voru aðalbrautryðjendur kenninganna um „elliptísk" föll og vil ég nú drepa á nokkur atriði þar, sem koma til með að tengjast „pórisma" Poncelets.

Látum $0 < k < 1$ vera vissa tölu, setjum

$$u = F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}\, dt,$$

og skilgreinum föllin am, sn og cn með

$$\begin{aligned}\mathrm{am}(u) &= \varphi,\\ \mathrm{sn}(u) &= \sin(\mathrm{am}(u)),\\ \mathrm{cn}(u) &= \cos(\mathrm{am}(u)).\end{aligned}$$

Þá eru am og sn ójöfn föll en fallið cn er jafnt. Við skilgreinum svo fallið dn með

$$\mathrm{sn}'(u) = \mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u).$$

(Lesandinn sanni til æfingar, að fallið dn er jafnt og pósitíft og

$$k^2\mathrm{sn}^2(u) + \mathrm{dn}^2(u) = 1.)$$

Um föllin sn og cn gilda summuformúlur, sem eru svipaðar summuformúlum um hornaföllin *sinus* og *cosinus*:

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v) + \mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)} \tag{4}$$

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v) - \mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)} \tag{5}$$

Við komum að sönnunum síðar.

Af formúlunum (4) og (5) er auðvelt að sanna, að

$$\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+c) + \mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+c)\mathrm{dn}(c) = \mathrm{cn}(c), \tag{6}$$

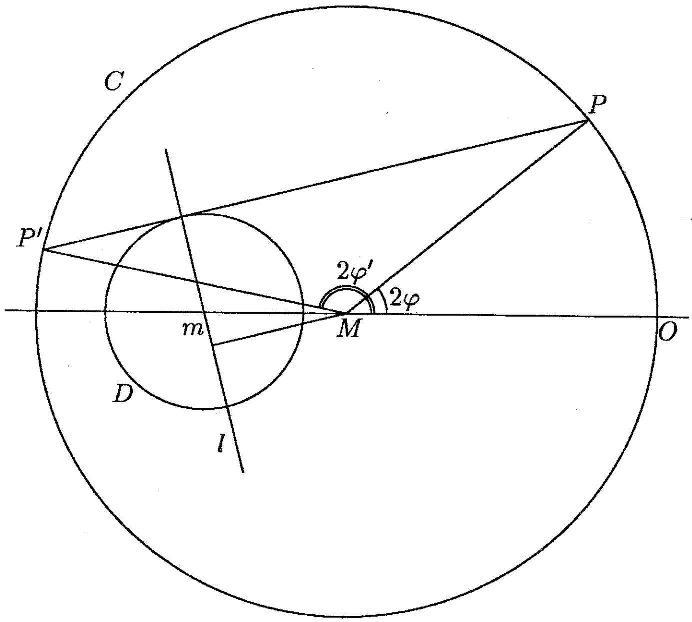
og ef við setjum inn $\varphi = \mathrm{am}(u)$, $\varphi' = \mathrm{am}(u+c)$ og $\chi = \mathrm{am}(c)$, verður (6) að

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{1 - k^2\sin^2\chi} = \cos\chi. \tag{7}$$

**4. Sönnun Jacobis á „pórisma“-setningunni.** Árið 1828 kom út í *Crelles Journal* grein Jacobis (sem þá var 24 ára) *Über die Anwendung der elliptischer Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie.* Þar kemur Jacobi með nýja sönnun á setningu Poncelets, sem byggist á „elliptískum" föllum. Það virðist sem Steiner hafi hvatt hann til að reyna slíka aðferð. En hvernig í ósköpunum koma „elliptísk" föll inn í spilið?

Lítum nú á hringinn $D$ innan í hringnum $C$ með miðpunktum $m$ og $M$. Punkturinn $O$ er annar skurðpunkta $C$ og miðtengilínunnar $mM$ og $a$ táknar lengd $mM$. Ef $P$ er punktur á $C$, teiknum við snertil til $D$ frá $P$, sem sker svo $C$ í punktinum $P'$. Vörpuninni $P \mapsto P'$ (sjá 6. mynd) er lýst með

$$OMP = 2\varphi, \qquad OMP' = 2\varphi'.$$




*6. mynd*

Með því að ofanvarpa á línuna $l$, sem er lóðlína frá $m$ á $PP'$, fæst auðveldlega

$$R\cos(\varphi' - \varphi) + a\cos(\varphi' + \varphi) = r,$$

sem má skrifa

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\frac{R-a}{R+a} = \frac{r}{R+a}. \tag{8}$$

Hér er auðsjáanlega mjög merkilegt samband milli formúlanna (7) og (8). Þetta reynist lykillinn að sönnuninni.

Við ákveðum nú $\chi$ og $k$ með

$$\cos\chi = \frac{r}{R+a} \quad \text{og} \quad 1 - k^2\sin^2\chi = \left(\frac{R-a}{R+a}\right)^2, \tag{9}$$

sem gefur

$$k^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2}. \tag{10}$$

Formúla (3) fyrir $d$ sýnir því, að

$$k^2 = \frac{2R}{R+d}. \tag{11}$$

Þetta þýðir, að ef hringurinn $D'$ er settur í stað $D$, þannig að $D'$ er í hringavendinum, sem ákveðst af $C$ og $D$, þá er $k$ óbreytt (því $d$ breytist ekki).

Vörpunin $W\colon \varphi \mapsto \varphi'$ er því samkvæmt ofanrituðu á forminu

$$W(\mathrm{am}(u)) = \mathrm{am}(u+c), \quad \text{þar sem} \quad \cos(\mathrm{am}(c)) = \frac{r}{R+a}. \tag{12}$$

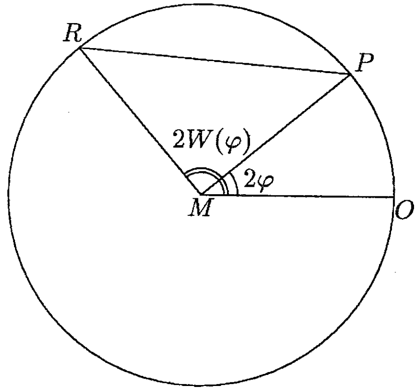
**Hið gagnstæða gildir einnig:** *Ef við skilgreinum fyrir eitthvert $c$ (en sama $k$) vörpunina $W$ með*

$$W(\varphi) = \mathrm{am}(u+c), \quad \text{þar sem} \quad \varphi = \mathrm{am}(u), \tag{13}$$

*þá eru strengirnir $PR$ (þar sem $OMP = 2\varphi$ og $OMR = 2W(\varphi)$ á 7. mynd) snertlar hrings $D$ frá hringavendinum, sem ákveðst af $C$ og $k$ samkvæmt (11).*

**Sönnun.** Tökum $\chi = \mathrm{am}(c)$ og ákveðum $a$ og $r$ með

$$\left(\frac{R-a}{R+a}\right)^2 = 1 - k^2\sin^2\chi, \qquad \frac{r}{R+a} = \cos\chi.$$




*7. mynd*

Þetta ákveður hring $D$, sem liggur innan í $C$. Fyrst þessar formúlur, sameinaðar við jöfnu (11), leiða af sér (3), er auðséð, að $D$ tilheyrir hringavendinum, sem ákveðst af $C$ og $k$. Við skilgreinum svo vörpunina

$$W_D(\varphi) = \mathrm{am}(u + c), \qquad \mathrm{am}(u) = \varphi,$$

og þá er augljóst, að $W = W_D$.

**Aðalsetning.** *Gerum ráð fyrir, að $C, D_1, D_2, \ldots, D_n$ séu hringar frá sama hringavendi, þannig að $D_1, D_2, \ldots, D_n$ eru allir innan í $C$. Tökum punkt $P$ á $C$. Myndum punktana $R_1, R_2, \ldots, R_n$ á $C$, þannig að strengirnir*

$$PR_1, R_1R_2, \ldots, R_{n-1}R_n$$

*séu (í sömu röð) snertlar við hringana*

$$D_1, D_2, \ldots, D_n.$$

*Að síðustu teiknum við strenginn $R_nP$. Þegar $P$ hreyfist á $C$, eru strengirnir $R_nP$ allir snertlar við fastan hring $D_0$ frá sama hringavendi.*

**Sönnun.** Látum $R$ tákna radíus hringsins $C$, $r_i$ radíus $D_i$, og $a_i$ lengd miðtengilínu $C$ og $D_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Setjum $OMP = 2\varphi$ og $\varphi = \mathrm{am}(u)$ og skilgreinum varpanirnar $W_{D_i}$ með

$$W_{D_i}(\varphi) = \mathrm{am}(u + c_i), \quad \text{ef} \quad \cos(\mathrm{am}(c_i)) = \frac{r_i}{R + a_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Við setjum svo

$$\varphi_1 = W_{D_1}(\varphi), \quad \varphi_2 = W_{D_2}(\varphi_1), \quad \dots, \quad \varphi_n = W_{D_n}(\varphi_{n-1}).$$

Þá er

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \mathrm{am}(u + c_1), \\
&\varphi_2 = W_{D_2}(\varphi_1) = W_{D_2}(\mathrm{am}(u + c_1)) = \mathrm{am}(u + c_1 + c_2), \\
&\ \vdots \\
&\varphi_n = \mathrm{am}(u + c_1 + c_2 + \cdots + c_n) = \mathrm{am}(u + c) \quad \text{með} \quad c = c_1 + \cdots + c_n.
\end{aligned}$$

Strengurinn $PR_n$ samsvarar vörpuninni

$$W : \varphi \mapsto \varphi_n, \quad \text{þ.e.a.s.} \quad W(\varphi) = \mathrm{am}(u + c).$$

Eins og sannað var um (13) að framan eru strengirnir $PR_n$ snertlar hrings $D_0$ úr sama hringavendi. Q.E.D.

**Sönnun á „pórisma"-setningunni.** Nú tökum við $D_1 = \cdots = D_n = D$ í aðalsetningunni. Samkvæmt henni eru strengirnir $R_nP$ allir snertlar við hring $D_0$ úr hringavendinum, sem er ákveðinn af $C$ og $D$. Hins vegar hafa hringarnir $D$ og $D_0$ *einn* sameiginlegan snertil, nefnilega $P_0R_n$ (ef $P_0$ er samkvæmt forsendum „pórisma"-setningarinnar hornpunktur í einum $n$-hyrningi innrituðum í $C$ og umrituðum um $D$). Samkvæmt hjálparsetningunni að ofan er $D = D_0$, og þar með er setningin sönnuð.

Sönnun á summuformúlunum má finna í ýmsum aðgengilegum bókum (sjá t.d. [4] og [10]) og því ekki ástæða til að endurtaka hana hér. Það má til sanns vegar færa, að „pórisma"-setning Poncelets sé rúmfræðileg túlkun á þessum summuformúlum, sem ber að eigna Abel og Jacobi.

Aðra sönnun á setningu Poncelets fann Cayley; grein Griffiths og Harris [6] er nútímaútfærsla á aðferð Cayleys. Sömu höfundar hafa einnig fundið útvíkkun á setningunni yfir í þrívítt rúm [5].

Setning Poncelets með sönnun Jacobis er gott dæmi um fjársjóð, sem finna má í stærðfræði, sem orðin er aldagömul. [4]

## Heimildir


1. E. T. Bell, *Men of Mathematics*, 1937, Pelican Books útgáfa 1953.
2. M. Berger, *Geometry II*, Springer-Verlag, 1987.
3. H. Bos, C. Kers, F. Oort og D. Raven, *Poncelet's Closure Theorem*, Expositiones Mathematicae **5** (1987), 289–364.
4. E. T. Copson, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford Univ. Press, 1935.
5. P. A. Griffiths og J. Harris, *A Poncelet theorem in space*, Comm. Math. Helv. **52** (1977), 145–160.
6. ———, *On Cayley's explicit solution of Poncelet's porism*, l'Enseignement Math. **24** (1978), 31–40.
7. C. G. J. Jacobi, *Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie*, J. reine angew. Math. **3** (1828), 376–389.
8. J-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822.
9. P. Samuel, *Projective Geometry*, Springer-Verlag, 1987.
10. E. T. Whittaker og G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1927.


[4] Myndir þær, sem fylgja greininni, teiknaði Sverrir Örn Þorvaldsson eftir frumgerð höfundar. Þær eru reikningslega réttar og eru byggðar á jöfnum á bls. 8 og 16. Forritið *Mathematica* var notað til verksins. (Ritstj.)

*Robert Magnus:*

## ÓLYMPÍULEIKARNIR Í STÆRÐFRÆÐI 1990

Þrítugastu og fyrstu Alþjóðlegu ólympíuleikarnir í stærðfræði fóru fram dagana 8.–19. júlí 1990 í Peking (Beijing) í Kína. Íslendingar sendu þrjá keppendur ásamt fararstjóra og dómnendarfulltrúa. Við náðum góðum árangri: Einn keppandi, Frosti Pétursson, nemandi í Menntaskólanum á Akureyri, fékk bronsverðlaun.

Keppendur voru auk Frosta, Ólafur Örn Jónsson, Fjölbrautaskóla Suðurnesja, og Birgir Örn Arnarson, Menntaskólanum á Akureyri. Fararstjóri var Agnethe Kristjánsson, kennari við Menntaskólann við Hamrahlíð, og dómnefndarfulltrúi var Robert Magnus, stærðfræðingur við Raunvísindastofnun Háskólans.

Keppnin var talin með erfiðara móti í þetta sinn. Samt sem áður hlutu fjórir þátttakendur fulla stigagjöf, þ.e. 42 stig. Tveir þeirra voru Kínverjar, einn var Frakki og einn var frá Sovétríkjunum, og vakti sá mesta athygli, en það var 15 ára stúlka, Evgenia Malinnikova, sem keppti nú í þriðja sinn. Velgengni Kínverja vakti einnig athygli. Kínverska liðið vann með miklum yfirburðum annað árið í röð.

Frosti lenti í 96. sæti af 308 alls og hlaut 20 stig. Þess má geta, að 16 stig nægðu til bronsverðlauna og 23 til silfurverðlauna, þannig að litlu munaði að hann fengi silfurverðlaun. Þess má einnig geta, að frá 19 þátttökulöndum af 54 náði enginn keppandi 20 stigum. Þetta er í annað sinn, sem íslenskur þátttakandi fær verðlaun á Ólympíuleikunum í stærðfræði, því árið 1988 fékk Guðbjörn Freyr Jónsson, þá nemandi í Menntaskólanum á Akureyri, bronsverðlaun í Canberra í Ástralíu.

Hér á eftir fylgja verkefnin úr keppninni. Keppnin sjálf stóð í tvo daga og voru fyrstu þrjú dæmin til úrlausnar fyrri daginn, en hin dæmin seinni daginn. Hvorn dag stóð keppnin í fjórar og hálfa klukkustund.

**1. dæmi.** Tveir strengir $AB$ og $CD$ í hring skerast í punkti $E$ innan í hringnum. Látum $M$ vera innri punkt striksins $EB$. Snertillinn í punktinum $E$ við hringinn gegnum $D$, $E$ og $M$ sker línurnar $BC$ og $AC$ í punktunum $F$ og $G$ (í þessari röð). Ef $AM/AB = t$, ákvarðið $EG/EF$ sem fall af $t$.

**2. dæmi.** Látum $n \geq 3$ og látum $E$ vera mengi $2n-1$ ólíkra punkta á hring. Lita á $k$ þessara punkta svarta. Við notum nafngiftina *litun á* $E$ til að merkja, að $k$ punktar eru valdir úr $E$ og litaðir svartir. Litun á $E$ kallast *góð*, ef hægt er að finna tvo svarta punkta, þannig að annar hvor boginn, sem þeir ákvarða, innihaldi nákvæmlega $n$ punkta úr $E$ og enginn þeirra sé endapunktur bogans.

Ákvarðið minnsta gildi á $k$, þannig að allar litanir á $E$ séu góðar.

**3. dæmi.** Ákvarðið allar heilar tölur $n > 1$, þannig að $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ sé heil tala.

**4. dæmi.** Látum $\mathbb{Q}^+$ vera mengi allra jákvæðra ræðra talna. Búið til fall $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, þannig að

$$f\left(xf(y)\right) = \frac{f(x)}{y} \qquad \text{fyrir öll } x \text{ og } y \text{ í } \mathbb{Q}^+.$$

**5. dæmi.** Tveir menn $A$ og $B$ leika eftirfarandi leik: Heil tala $n_0 > 1$ er tiltekin. $A$ og $B$ velja náttúrulegar tölur $n_1$, $n_2$, $n_3$, ... til skiptis samkvæmt þessum reglum: Fyrst velur $A$ tölu $n_1$, sem uppfyllir $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$. Þá velur $B$ tölu $n_2$, þannig að $n_1/n_2$ er heilt veldi af frumtölu. Almennt: Þegar $B$ er búinn að velja $n_{2k}$, velur $A$ tölu $n_{2k+1}$, þannig að $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$. Þá velur $B$ tölu $n_{2k+2}$, þannig að $n_{2k+1}/n_{2k+2}$ er heilt veldi af frumtölu. $A$ vinnur leikinn, ef honum tekst að velja töluna 1990. $B$ vinnur, ef honum tekst að velja töluna 1.

Ákvarðið öll gildi á $n_0$, þannig að:

(a) $A$ geti tryggt sér vinning.

(b) $B$ geti tryggt sér vinning.

(c) Hvorugur geti tryggt sér vinning.

**6. dæmi.** Sannið, að til er kúptur marghyrningur með 1990 hliðum, sem hefur eftirfarandi tvo eiginleika:

(a) Öll horn eru jöfn.

(b) Lengdir hliðanna eru $1^2$, $2^2$, $3^2$, ..., $1989^2$, $1990^2$ í einhverri röð.

Lausnir á Ólympíudæmunum 1990 eru birtar á bls. 28–35. En vitaskuld er lesandinn hvattur til að spreyta sig á dæmunum sjálfum áður en hann gluggar í lausnirnar.

## STÆRÐFRÆÐIKEPPNI FRAMHALDSSKÓLANEMA 1990–91

Fyrri hluti í stærðfræðikeppni framhaldsskólanema sl. vetur fór fram 23. október og var þá keppt á tveimur stigum. Á neðra stigi kepptu nemendur á fyrri tveimur árunum í framhaldsskóla, en nemendur á seinni tveimur árunum á efra stigi. Alls tóku 249 nemendur þátt í keppninni á neðra stigi og 193 á efra stigi og voru þeir úr tuttugu skólum alls.

Tuttugu efstu keppendum á hvoru stigi í fyrri hlutanum var svo boðið að taka þátt í lokakeppninni, sem fór fram 23. marz sl. Þátttakendur voru 30 og hlutu þrír hinna efstu verðlaun, en þeir voru Birgir Örn Arnarson og Frosti Pétursson, nemendur í Menntaskólanum á Akureyri, og Gunnar Valur Gunnarsson, nemandi í Fjölbrautaskóla Suðurlands.

Í framkvæmdanefnd keppninnar voru að þessu sinni Jón Kr. Arason, Jón Ingólfur Magnússon og Robert Magnus frá Íslenzka stærðfræðafélaginu og Agnethe Kristjánsson, Eygló Guðmundsdóttir og Yngvi Pétursson frá Félagi raungreinakennara. Fyrirtækin Ístak hf. og Steypustöðin hf. studdu keppnina dyggilega í þetta sinn og báru af henni allan kostnað.

Hér fara á eftir dæmin í lokakeppninni. Veittar voru fjórar stundir til að leysa þau.

**1. dæmi.** Nemendur frá þremur skólum hittast til að tefla skák. Frá skóla $A$ koma $x$ nemendur, frá skóla $B$ koma $y$ nemendur og frá skóla $C$ koma $z$ nemendur. Þeir vilja tefla samtímis á þann hátt að engir tveir nemendur frá sama skóla tefli saman.

Sýnið, að til þess að þetta sé hægt, þurfi eftirfarandi tvö skilyrði að vera uppfyllt:

(a) $x + y + z$ er slétt tala.

(b) $x \leq y + z$, $y \leq z + x$ og $z \leq x + y$.

Sýnið einnig, að þetta er hægt, ef skilyrðin eru uppfyllt.

**2. dæmi.** Sýnið, að

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$$

fyrir allar jákvæðar rauntölur $a$, $b$ og $c$.

**3. dæmi.** Hversu margar náttúrulegar tölur eru minni en eða jafnar 1991 og eru ósamþátta 1991?

**4. dæmi.** Þríhyrningur $ABC$ er innritaður í hring. Látum $D$ vera miðpunkt bogans milli $A$ og $B$, sem inniheldur $C$. Línan $AD$ er framlengd að punkti $P$ þannig að $AD = DP$. Línan $AC$ er framlengd að punkti $Q$ þannig að $BC = CQ$.

(a) Sýnið, að $\angle PQA$ er rétt horn.

(b) Ef punkturinn $C$ er hreyfanlegur á boganum milli $A$ og $B$, hvernig á þá að velja $C$ til þess að summan $AC + CB$ sé mest? Rökstyðjið svarið.

**5. dæmi.** Finnið allar jákvæðar heilar tölur $n$, sem hafa þann eiginleika, að unnt sé að skipta tölunum $1, 2, \ldots, n$ í tvo flokka, þannig að summa talnanna í hvorum flokki fyrir sig sé sú sama.

Fimmtán efstu keppendur í lokakeppninni tóku svo þátt í **fimmtu norrænu stærðfræðikeppninni,** sem haldin var í skólum keppenda 10. apríl sl. Beztum árangri þeirra náði Frosti Pétursson, en hann hlaut 19 stig af 20 alls. Þrír erlendir keppendur hlutu fulla stigagjöf.

Eftirfarandi dæmi voru lögð fyrir keppendur til að leysa á fjórum klukkustundum.

**1. dæmi.** Ákvarðið tvo síðustu tölustafi tölunnar

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots 2^{5^{1991}}$$

eins og hún er rituð í tugakerfi.

**2. dæmi.** Í trapizunni $ABCD$ er hliðin $AB$ samsíða hliðinni $CD$ og $E$ er tiltekinn punktur á hliðinni $AB$. Ákvarðið punkt $F$ á hliðinni $CD$ þannig að flatarmál svæðisins, sem er sameiginlegt þríhyrningunum $ABF$ og $CDE$, sé sem mest.

**3. dæmi.** Sýnið, að

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$$

fyrir öll $n \geq 2$.

**4. dæmi.** Látum $f(x)$ vera margliðu með heiltölustuðlum. Um hana er vitað, að fyrir ákveðna heila tölu $k > 0$ eru til $k$ heilar tölur í röð, $n, n+1, \ldots, n+k-1$, þannig að engin talnanna $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$ sé deilanleg með $k$. Sýnið, að margliðan $f(x)$ hefur engar heiltölurætur.

*Kristín Halla Jónsdóttir:*

## ÓLYMPÍULEIKARNIR Í STÆRÐFRÆÐI 1991

Alþjóðlegir ólympíuleikar í stærðfræði voru haldnir í þrítugasta og annað sinn nú í sumar. Að þessu sinni voru þeir haldnir í Sigtúnum í Svíþjóð og tóku keppendur frá 56 þjóðum þátt í þeim. Íslendingar sendu fullskipað lið til leikanna í fyrsta sinn, sex keppendur alls, og voru það þeir Ásbjörn Ólafsson úr Verzlunarskóla Íslands, Bjarni V. Halldórsson úr Menntaskólanum í Reykjavík, Frosti Pétursson úr Menntaskólanum á Akureyri, Gestur Guðjónsson úr Fjölbrautaskóla Suðurlands og Grétar Karlsson og Hersir Sigurgeirsson úr Menntaskólanum við Hamrahlíð.

Fararstjóri íslenzku sveitarinnar var Sverrir Örn Þorvaldsson, sem lauk BS–prófi í stærðfræði frá Háskóla Íslands nú í vor, en hann keppti á sínum tíma þrisvar sinnum á þessum Ólympíuleikum. Dómnefndarfulltrúi af hálfu Íslands var Kristín Halla Jónsdóttir, dósent við Kennaraháskóla Íslands.

Íslenzka sveitin lenti í 50. sæti og veldur það vissulega vonbrigðum og bendir til þess, að við þurfum að taka okkur á við þjálfun liðsins. Einn keppandanna, Frosti Pétursson, stóð sig að vísu ágætlega. Hann hlaut 23 stig af 42 alls, og hlaut þar með bronsverðlaun annað árið í röð, en í þetta sinn þurfti 19 stig til að hljóta þau, en 31 stig þurfti til silfurverðlauna. Má með sanni segja, að Frosti hafi verið stolt sveitarinnar.

Hér á eftir fylgja verkefnin úr keppninni. Keppnin sjálf stóð í tvo daga, 17. og 18. júlí, og voru fyrstu þrjú dæmin til úrlausnar fyrri daginn, en hin dæmin seinni daginn. Hvorn dag stóð keppnin í fjórar og hálfa klukkustund.

**1. dæmi.** Látum $ABC$ vera þríhyrning og $I$ miðju í innrituðum hring hans. Innri helmingalínur hornanna $A$, $B$ og $C$ skera mótlægar hliðar í $A'$, $B'$ og $C'$. Sannið ójöfnuna

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

**2. dæmi.** Látum $n > 6$ vera heila tölu og $a_1, a_2, \ldots, a_k$ allar þær náttúrulegar tölur, sem eru minni en $n$ og ósamþátta $n$. Sannið, að ef

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

þá sé $n$ frumtala eða veldi af tveimur (þar sem veldisvísirinn er heil tala).

**3. dæmi.** Látum $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Finnið minnstu heilu töluna $n$ með eftirfarandi eiginleika:
Sérhvert $n$-staka hlutmengi í $S$ inniheldur fimm stök, þannig að sérhver tvö þeirra eru ósamþátta.

**4. dæmi.** Látum $G$ vera samhangandi net með $k$ leggjum. Sannið, að unnt sé að tölusetja leggina með tölunum frá 1 upp í $k$, þannig að um sérhvern hnút gildi: Ef hnúturinn tilheyrir tveimur eða fleiri leggjum, þá er talan 1 stærsti samdeilir talnanna, sem þeim voru gefnar.

[*Net* $G$ er mengi punkta, sem kallast *hnútar*, ásamt mengi *leggja*, sem tengja saman tilteknar tvenndir af ólíkum hnútum. Sérhver tvennd af hnútum tilheyrir í mesta lagi einum legg. Netið $G$ er *samhangandi*, ef fyrir sérhverja tvennd $(x, y)$ af ólíkum hnútum er til runa af hnútum $x = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = y$, þannig að sérhver tvennd $(v_i, v_{i+1})$, $0 \leq i < m$, er tengd saman af legg í $G$.]

**5. dæmi.** Látum $ABC$ vera þríhyrning og $P$ punkt innan í honum. Sannið, að minnst eitt af hornunum $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ er minna en eða jafnt og $30°$.

**6. dæmi.** Óendanleg runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ af rauntölum kallast *takmörkuð*, ef til er fasti $C$, þannig að $|x_i| \leq C$ fyrir öll $i \geq 0$.

Látum $a > 1$ vera rauntölu. Búið til takmarkaða, óendanlega, runu $x_0, x_1, x_2, \ldots$, þannig að

$$|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$$

fyrir allar heilar tölur $i, j \geq 0$, $i \neq j$.

Lausnir á Ólympíudæmunum 1991 eru ekki birtar í *Fréttabréfi* að þessu sinni.

## STÆRÐFRÆÐIVERÐLAUN Á STÚDENTSPRÓFI

Að venju ákvað Íslenzka stærðfræðafélagið að veita nokkrum þeirra stúdenta, sem brautskráðust nú í vor, sérstaka viðurkenningu fyrir ágætan námsárangur í stærðfræði á stúdentsprófi. Var þeim öllum afhent bók að gjöf með áritaðri staðfestingu á verðlaununum.

Þeir nýstúdentar, sem hlutu verðlaun að þessu sinni, eru Adam Johan Eliasen og Auður Skúladóttir, Fjölbrautaskólanum í Garðabæ, Birgir Örn Arnarson og Frosti Pétursson, Menntaskólanum á Akureyri, Hersir Sigurgeirsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð, Kristín Friðgeirsdóttir, Menntaskólanum í Reykjavík, og Úlfar Erlingsson, Verzlunarskóla Íslands.

Við brautskráningu stúdenta nú á miðjum vetri hlaut einn nýstúdent bókaverðlaun frá félaginu og var það Ragnhildur Geirsdóttir, Menntaskólanum við Hamrahlíð.

Félagið hlaut í fyrra fjárstyrk frá þremur verkfræðistofum til að kaupa verðlaunabækur, og var hann svo ríflegur, að hann hefur nú enzt til verðlaunaveitinga í tvö ár. Auk þess barst félaginu í vetur sérstakur styrkur í þessu skyni frá einum félagsmanni, Sigurði Helgasyni, prófessor.

Verkfræðistofurnar, sem veittu styrkinn í fyrra, eru Verkfræðistofa Guðmundar & Kristjáns, Verkfræðistofa Sigurðar Thoroddsen hf. og Verkfræðistofan Rafteikning hf.

Íslenzka stærðfræðafélagið þakkar þann stuðning, sem því hefur verið veittur til þessara verðlaunaveitinga, og óskar hinum verðlaunuðu nýstúdentum góðs árangurs á næsta þrepi á námsbrautinni.

## ALÞJÓÐASAMBAND STÆRÐFRÆÐINGA

Á aðalfundi Alþjóðasambands stærðfræðinga, sem haldinn var í Kobe í Japan dagana 18. og 19. ágúst 1990, var ákveðið að taka boði Svisslendinga um að halda næsta Alþjóðaþing stærðfræðinga í Zürich árið 1994, og hafa þeir nú tilkynnt, að það muni standa dagana 3.–11. ágúst.

Jafnframt var hugað að fjarlægari framtíð, sem þó skellur yfir fyrr en varir, því framkvæmdanefnd sambandsins var falið að hefja undirbúning að því, að aldamótanna verði minnzt með viðeigandi myndarskap svo sem David Hilbert gerði um síðustu aldamót með hinum fræga fyrirlestri sínum á Alþjóðaþingi stærðfræðinga í París.

# RITFREGN

Athygli lesenda er vakin á, að í síðasta hefti *Skírnis* (vorhefti 1991, bls. 209–228) er greinin *Er stærðfræði ómaksins verð?* eftir Kristínu Höllu Jónsdóttur. Greinin er ítarleg umsögn um tvö lærdómsrita Hins íslenzka bókmenntafélags, *Málsvörn stærðfræðings* eftir Godfrey Harold Hardy í þýðingu Reynis Axelssonar, sem kom út 1972, og *Undirstöður reikningslistarinnar* eftir Gottlob Frege í þýðingu Kristjáns Kristjánssonar, en það rit kom út í hittiðfyrra.

Af þessu má sjá, að innan Bókmenntafélagsins beinist athygli í auknum mæli að stærðfræði, og er vonandi að ekki hafi komið upp kurr meðal félagsmanna þess eins og fyrir réttum sex áratugum, þegar það tók upp á því að gefa út til viðbótar öllum dömulitteratúrnum *Stærðfræðina* eftir A. N. Whitehead í þýðingu Guðmundar Finnbogasonar. Önnur eins ósköp höfðu þá ekki verið á borð borin fyrir þá síðan félagið gaf út *Tölvísi* Björns Gunnlaugssonar meira en sex áratugum þar áður — og lauk raunar ekki við, því seinna bindið var aldrei gefið út. En þetta var nú útúrdúr í anda Ólafs Daníelssonar, sem skrifaði einmitt fræga umsögn um fyrrnefnda þýðingu Guðmundar Finnbogasonar, og upphófst hún svo:

> Hananú, þarna kom þá frá Bókmenntafélaginu ný bók, sem á ekkert skylt við sýslumannaæfir og prestatöl, né heldur rímnakveðskap eða fornfræði, bók, sem ekki er í nema eitt kvæði, og það í styttra lagi, læsileg bók um merkilegt efni, hver skyldi trúa? Jú, hún er nú komin, og bókmenntaspekingarnir, þeir víðsýnu, fornfræðaþulirnir, allir eru þeir hneykslaðir alveg niður í tær, hvað á þetta að þýða, les nokkur þetta? segja þeir, innilega sannfærðir um það með sjálfum sér, að árangurslaust muni vera að leita anda sínum svölunar annars staðar en í Hávamálum eða Íslendingasögum, þar er saman komið mannvit allt og málspeki, hvað þurfum við þá meira? Ef nokkurn snefil skyldi þar upp á vanta, væri hans líklega helzt að leita í vísupörtum eftir íslenzka húsganga. Já, það var þessi bók. Hún er nokkuð góð.

Og úr því að lærdómsrita Bókmenntafélagsins var getið að ofan má líka bæta við, að tveir félagsmenn Stærðfræðafélagsins standa saman að nýlegu riti í þeim flokki. *Saga tímans* eftir Stephen W. Hawking kom út í þýðingu Guðmundar Arnlaugssonar með inngangi eftir Lárus Thorlacius.

*Jón Ragnar Stefánsson:*

## „SÁ ÞRIÐJI FINNUR SIG SJÁLFUR“

Í Árnastofnun er að finna handritsbrot með hendi Björns Jónssonar á Skarðsá frá því um 1620 (*AM 214 8vo bl. 34r.*), þar sem sagt er frá reikningslist þriggja manna, sem sitja að sumbli. Blaðið er rifið að ofan þannig að efstu línurnar eru horfnar eða skertar. Stefán Karlsson, handritafræðingur, færði mér þennan texta fyrir mörgum árum og er hann birtur hér svo sem hann gekk frá honum:

... / lat hann summuna adde[ra]
Huad þa er lat seigia þier / tak þar
af 60 huad þa af geingur / skipt þ[ui]
j 8 stadj / þar af weÿstu / huar af sa
firsti hefur druckid / nu huad A vantar
sÿner þier huar af / sa annar hefur druckit
sa þridie finnur sig sialfur /

Exemplum

3 menn sitia vid j bord hafa fyrer
sier 3 staup / sa firsti dreckur af þui
firsta / þad multp / hann med tueimur
facit / 2 / Annar dreckur af audru / St
þad / multip / hann : 9 : facit 18 / Hinn
3 dreckur af þui 3 staupinu / þad / m /
hann med / 10 / facid 30 / addera til
samanns suo sem : 2 : 18 : 30 : summa facit
tak af : 60 : Brestur : 10 : skipt þeim
: 10 : j : 8 : facit [hdr.: sacit] j ganga : 2 : af / þar
af aligtta ad sa hinn firsti hefur
druckid af þui f(irst)a / sa : 2 af : 2 / 3
af 3

Í ljós kom svo, að þetta er einmitt sá texti, sem Viggo Brun fjallaði um og endursagði á norsku í riti sínu um reikningslist í Noregi til forna, (*Regnekunsten i det gamle Norge*, Universitetsforlaget, Oslo–Bergen, 1962, bls. 39–40), en Jón Helgason, prófessor í Kaupmannahöfn, hafði vakið athygli hans á þessu gamla reikningsdæmi. Af þessari ástæðu einni saman virðist ekki úr vegi, að frumtextinn sé birtur, þótt efnið geti nú ekki talizt háfleygt. Svo virðist sem hér sé stærðfræði sett fram með sígildu kennslubókarsniði: Fyrst kemur hin fræðilega umfjöllun, þar sem illu heilli einungis niðurlagið er varðveitt, en síðan kemur hin heimfærða stærðfræði, þar sem tekið er fyrir hugstætt viðfangsefni úr daglega lífinu.

Viggo Brun rekur í smáatriðum, hvernig leysa á dæmið, og gæti lesandinn auðvitað gert það hjálparlaust. Segjum, að mennirnir hafi drukkið $x$ staup sá fyrsti, $y$ staup annar og $z$ staup sá þriðji. Þá á að finna heilar tölur $h$ og $r$, þannig að

$$60-(2x+9y+10z)=8h+r, \quad 0\leq r<8.$$

Af þessu á að álykta, að $x=h$ og $y=r$, en $z$ „finnur sig sjálf"! Í ljós kemur raunar fyrirhafnarlaust, að þetta stenzt því aðeins að $x+y+z=6$, og má vera að það hafi verið tekið fram í hinum almennu fræðum, sem glatazt hafa. En Viggo Brun bendir einnig á, að hugsanlega hafi staupin verið svo stór, að útilokað sé, að drukkin hafi verið fleiri en sex alls!

## STÆRÐFRÆÐINGAÞING NÆSTA SUMAR

*Tuttugasta og fyrsta norræna stærðfræðingaþingið* verður haldið í Luleå í Svíþjóð. Athygli er vakin á, að það verður haldið á óvenjulegum tíma, dagana 8.–12. júní, en undanfarna sjö áratugi hefur slíkt þing ávallt verið haldið síðsumars. Önnur tilkynning um þingið með skráningargögnum kemur í ársbyrjun og á að senda beiðni um hana til: 21. Nordiska matematikerkongressen, Tekniska högskolan i Luleå, Avdelningen för tillämpad matematik, S-95187 Luleå, Sverige.

*Fyrsta evrópska stærðfræðingaþingið* verður haldið í París dagana 6.–10. júlí. Þriðja tilkynning með skráningargögnum verður send í nóvember. Beiðni um hana á að senda til: Congrés Europèen de Mathématiques, Collége de France, 3 rue d'Ulm, Paris (5e), France. Netfang: eucm@frmap711.bitnet.

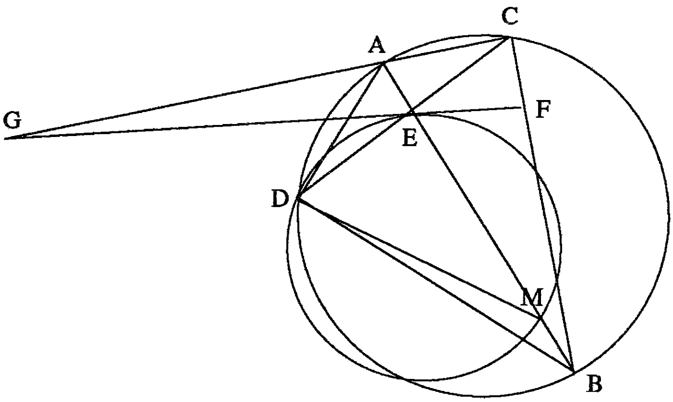
*Sjöunda alþjóðaþing um stærðfræðimenntun* verður haldið í Québecborg í Kanada dagana 16.–23. ágúst. Önnur tilkynning með skráningargögnum hefur þegar verið send út. Beiðni um hana á að senda til: Congrés ICME-7 Congress, Université Laval, Québec QC, Canada G1K 7P4. Netfang: icme-7@lavalvml.bitnet.

*Robert Magnus:*

# LAUSNIR Á ÓLYMPÍUDÆMUNUM 1990

Hér á eftir sýnum við lausnir á dæmunum frá Ólympíuleikunum í stærðfræði 1990, sem birt eru á bls. 18–19 að framan.

## Lausn á 1. dæmi




Við höfum, að $\angle CEF = \angle GED = \angle DMA$ og $\angle ECF = \angle DCB = \angle DAB = \angle DAM$. Þá fæst $ECF \sim MAD$. Þess vegna gildir

$$\frac{EC}{EF} = \frac{MA}{MD} \tag{1}$$

Einnig höfum við $\angle GCE = \angle ACD = \angle ABD = \angle MBD$ og $\angle DMB = \angle MDE + \angle MED = \angle MEF + \angle AEC = \angle GEA + \angle AEC = \angle GEC$. Af því leiðir að $CEG \sim BMD$. Þess vegna gildir

$$\frac{EG}{EC} = \frac{MD}{MB} \tag{2}$$

Með því að margfalda jöfnur (1) og (2) fæst nú

$$\frac{EG}{EF} = \frac{MA}{MB} = \frac{MA}{AB - MA} = \frac{t}{1-t}.$$

## Lausn á 2. dæmi

Heimsækjum punktana í $E$ samkvæmt eftirfarandi kerfi: Byrjum í hvaða punkti sem er; förum rangsælis framhjá $n$ punktum en nemum staðar í $(n+1)$-ta punktinum. Höldum svo áfram. Að lokum lendum við aftur á fyrsta punktinum. Mengi þeirra punkta, sem við höfum þannig heimsótt, köllum við *braut*. Við segjum um tvo punkta í sömu brautinni, að þeir séu *samliggjandi*, ef annar þeirra hefur verið heimsóttur næst á eftir hinum. Fram koma tveir möguleikar, sem við lýsum í stuttu máli hér, en nánar verður fjallað um þá á eftir:

(i) Við höfum heimsótt alla punktana. Þetta gerist, ef $n+1$ og $2n-1$ eru ósamþátta. Þar sem $2(n+1)-(2n-1)=3$, er ljóst að stærsti samdeilir talnanna $n+1$ og $2n-1$ er annað hvort 1 eða 3. Í þessu tilviki er hann þá jafn 1, og skilyrði þess er greinilega að $n \not\equiv 2 \pmod 3$.

(ii) Við höfum ekki heimsótt alla punktana. Skilyrði þess er $n \equiv 2 \pmod 3$. Við höfum reyndar heimsótt þriðjung allra punktanna úr $E$. Til eru þrjár ólíkar, sundurlægar, brautir. Hver þeirra inniheldur $\frac{1}{3}(2n-1)$ punkta.

Skýring á þessum fullyrðingum er sem hér segir: Við lendum fyrst aftur á upphafspunktinum eftir $k$ skref, ef $k$ er minnsta náttúrulega talan, þannig að $k(n+1)$ er deilanlegt með $2n-1$. Þá er $k$ jafnt $\dfrac{2n-1}{d}$, þar sem $d$ er stærsti samdeilir talnanna $n+1$ og $2n-1$.

Við getum nú séð, hvernig unnt er að búa til litun, sem er ekki góð litun, en er þannig að sérhver litun með fleiri svarta punkta er góð. Við verðum að lita punktana, þannig að engir tveir samliggjandi punktar séu svartir, en svartir punktar samt eins margir og hægt er.

Í fyrra tilvikinu (i) er $d=1$, og þá er ein braut með $2n-1$ punkta. Þegar brautin er mynduð, litum við annan hvern punkt svartan en með þeirri undantekningu þó, að á einum stað látum við tvo samliggjandi punkta vera ólitaða. Fjöldi svartra punkta er því $\frac{1}{2}(2n-1-1)=n-1$. Litun, sem hefur $n$ svarta punkta, er því alltaf góð.

Í seinna tilvikinu (ii) er $d=3$, og þá eru $\frac{1}{3}(2n-1)$ punktar í hverri braut. Hámarksfjöldi svartra punkta í litun, sem er ekki góð, er $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(2n-1)-1\right)=\frac{1}{3}(n-2)$ í hverri braut, þ.e. $n-2$ punktar alls. Litun með $n-1$ punkt er því alltaf góð.

Svarið er því sem hér segir: Þegar $n \not\equiv 2 \pmod 3$, er $k = n$. Þegar $n \equiv 2 \pmod 3$, er $k = n - 1$.

**Lausn á 3. dæmi**

Markmið okkar er að sanna um heila tölu $n > 1$, að $n^2$ gangi upp í $2^n + 1$, ef og aðeins ef $n = 3$. Ljóst er, að $3^2$ gengur upp í $2^3 + 1$. Vandamálið er að sýna, að $n = 3$ er eini möguleikinn.

Gerum ráð fyrir, að $n^2$ gangi upp í $2^n + 1$. Látum $p$ vera minnstu frumtölu, sem gengur upp í $n$. Beitum leifareikningi og mátum við $p$. Við höfum $2^n \equiv -1 \pmod p$, en þetta leiðir til $2^{2n} \equiv 1 \pmod p$. Samkvæmt setningu Fermats gildir $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (ljóst er, að $p \neq 2$). Látum $a$ vera minnsta veldisvísinn, þannig að $2^a \equiv 1 \pmod p$. Þá gengur $a$ upp í báðar tölurnar $2n$ og $p - 1$. Með hliðsjón af því, að $p$ er minnsti frumþáttur tölunnar $n$ og $a$ gengur upp í $p - 1$, getum við ályktað að $a$ og $n$ eru ósamþátta. Þar sem $a$ gengur upp í $2n$, ályktum við að $a = 2$. En nú fæst $2^2 \equiv 1 \pmod p$, þannig að $p = 3$.

Næsta skref er að sýna, að hærri veldi af 3 gangi ekki upp í $n$. Í þeim tilgangi sönnum við litla **hjálparsetningu:**

*Hæsta veldi af 3, sem gengur upp í* $2^{3^m} + 1$, *er* $3^{m+1}$.

Við notum þrepun. Niðurstaðan gildir augljóslega, þegar $m = 0$. Gerum ráð fyrir, að hún gildi um tiltekna tölu $m$. Við höfum

$$2^{3^{m+1}} + 1 = (2^{3^m})^3 + 1 = (2^{3^m} + 1)(2^{2\cdot 3^m} - 2^{3^m} + 1).$$

Samkvæmt þrepunarforsendunni er $3^{m+1}$ hæsta veldi af 3, sem gengur upp í $2^{3^m} + 1$. Lítum nánar á seinni þáttinn. Beitum leifareikningi og mátum við 3:

$$2^{2\cdot 3^m} - 2^{3^m} + 1 \equiv 1 - (-1) + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

en þegar mátað er við 9, gildir

$$2^{2\cdot 3^m} - 2^{3^m} + 1 \equiv 8^{2\cdot 3^{m-1}} - 8^{3^{m-1}} + 1 \equiv 1 - (-1) + 1 \equiv 3 \pmod 9,$$

þannig að talan 3 gengur upp í seinni þáttinn, en talan 9 ekki. Hjálparsetningin hefur því verið sönnuð.

Víkjum aftur að meginverkefninu. Við höfum sýnt, að ef $n^2$ gengur upp í $2^n + 1$, þá er 3 minnsti frumþáttur tölunnar $n$. Látum $3^\alpha$ vera hæsta veldi af 3, sem gengur upp í $n$, og skrifum $n = 3^\alpha d$, þar sem $d$ er ekki deilanlegt með 3. Talan $d$ er auðvitað oddatala. Við höfum þá

$$2^n + 1 = 2^{3^\alpha d} + 1 = (2^{3^\alpha} + 1)\left(2^{3^\alpha(d-1)} - 2^{3^\alpha(d-2)} + 2^{3^\alpha(d-3)} - \cdots + 1\right).$$

Ef við mátum við 3, jafngildir seinni þátturinn

$$1 - (-1) + 1 - (-1) + \cdots + 1 \equiv d \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Talan 3 gengur því ekki upp í seinni þáttinn. Við ályktum, að $3^{2\alpha}$ gengur upp í $2^{3^\alpha} + 1$. Samkvæmt hjálparsetningunni fæst $2\alpha \leq \alpha + 1$, sem leiðir til $\alpha = 1$.

Við höfum nú að $n = 3t$, þar sem $t$ er oddatala, sem er ekki deilanleg með 3. Markmiði okkar verður náð, ef okkur tekst að sýna, að forsendan $t \neq 1$ leiðir til mótsagnar. Gerum nú ráð fyrir, að $t \neq 1$, og látum $q$ vera minnsta frumþátt tölunnar $t$. Við vitum að $q > 3$. Látum $b$ vera minnsta veldisvísinn þannig að $2^b \equiv 1 \pmod q$. Eins og áðan getum við sýnt að $b$ gengur upp í báðar tölurnar $2n$ og $q - 1$. Eini sameiginlegi frumþáttur talnanna $b$ og $n$ er 3, en talan 9 gengur ekki upp í $b$. Talan $b$ er því 2, 3 eða 6. Ef $b = 2$, þá fæst $2^2 \equiv 1 \pmod q$, sem leiðir til $q = 3$. Þetta er útilokað. Ef $b = 3$, þá fæst $q = 7$. Ef $b = 6$, þá fæst að $q$ gengur upp í $2^6 - 1 = 63$, þannig að aftur fæst $q = 7$ (þar sem $q \neq 3$). Fyrst $q$ gengur upp í $2^n + 1$, ályktum við að $2^n \equiv -1 \pmod 7$. En þetta er mótsögn, þar sem $-1$ er ekki veldi af 2 (mod 7). Sannreynið það!

**Athugasemd.** Þetta er mjög erfitt dæmi. Auðvitað krefst það mikilla hæfileika að leysa það á þeim tíma, sem leyfður var í keppninni, og jafnframt þarf óbifandi sjálfstraust til að rekja alla þræðina til enda. Ef til vill þekktu sumir keppendur bókina *Elementary Number Theory* eftir Waclaw Sierpinski. Á einum stað þar (bls. 235) stendur:

> Auðvelt er að sjá, að til eru óendanlega margar tölur $n$, þannig að $n$ gengur upp í $2^n+1$; til dæmis hafa tölurnar $n = 3^k$ þennan eiginleika fyrir $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Ef til vill þekktu sumir keppendanna hjálparsetninguna, sem við studdumst við.

## Lausn á 4. dæmi

Við leiðum út nokkra eiginleika fallsins $f$ áður en við búum til dæmi um slíkt fall. Jafnan, sem $f$ á að uppfylla, er

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y} \quad \text{fyrir öll } x \text{ og } y \text{ í } \mathbb{Q}^+. \tag{1}$$

Setjum $x = 1$. Þá fæst

$$f(f(y)) = \frac{f(1)}{y} \quad \text{fyrir öll } y \text{ í } \mathbb{Q}^+. \tag{2}$$

Þessi jafna sýnir, að $f$ er eintækt fall. Setjum $y = 1$ í jöfnu (1):

$$f(xf(1)) = f(x) \quad \text{fyrir öll } x \text{ í } \mathbb{Q}^+.$$

En þar sem $f$ er eintækt, ályktum við að $xf(1) = x$ fyrir öll $x$ í $\mathbb{Q}^+$, svo að $f(1) = 1$. Jafna (2) gefur þá

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \quad \text{fyrir öll } y \text{ í } \mathbb{Q}^+. \tag{3}$$

Jafna (3) sýnir, að fallið $f$ er átækt. Látum $x$ og $y$ vera stök í $\mathbb{Q}^+$. Þá er til $z$ í $\mathbb{Q}^+$ þannig að $f(z) = y$, og við fáum

$$f(xy) = f(xf(z)) = \frac{f(x)}{z} = f(x)f(f(z)) = f(x)f(y).$$

Við höfum því sýnt, að $f$ uppfyllir líka jöfnuna

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{fyrir öll } x \text{ og } y \text{ í } \mathbb{Q}^+. \tag{4}$$

Á hinn bóginn er auðfengið, að ef fallið $f$ uppfyllir jöfnur (3) og (4), þá uppfyllir það líka jöfnu (1).

Við búum til dæmi um fall $f$, sem fullnægir jöfnum (3) og (4). Látum $\mathbb{P}$ vera mengi allra frumtalna og skiptum því í tvö óendanleg mengi. Setjum þessi mengi fram sem runur: $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ og $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$. Við skilgreinum $f$ fyrst í stað á menginu $\mathbb{P} \cup \{1\}$ sem hér segir:

$$f(1) = 1, \quad f(r_k) = s_k \quad \text{og} \quad f(s_k) = \frac{1}{r_k} \quad \text{fyrir öll } k \in \mathbb{N}.$$

Nú er einungis ein leið til að skilgreina $f$ á $\mathbb{Q}^+$, þannig að (4) sé fullnægt. Tökum $x \in \mathbb{Q}^+$ og skrifum

$$x = \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}}{q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}},$$

þar sem $p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ og $q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ eru frumtölur. Við eigum ekki annars kost en að setja

$$f(x) = \frac{f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdots f(p_n)^{\alpha_n}}{f(q_1)^{\beta_1} f(q_2)^{\beta_2} \cdots f(q_m)^{\beta_m}}. \tag{5}$$

Nú er auðvelt að sjá, að $f$ uppfyllir jöfnu (4); einnig er jafna (3) uppfyllt, ef $y$ er frumtala. Beitum loks $f$ á $f(x)$ í jöfnu (5) og fáum

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{f(f(p_1))^{\alpha_1} f(f(p_2))^{\alpha_2} \cdots f(f(p_n))^{\alpha_n}}{f(f(q_1))^{\beta_1} f(f(q_2))^{\beta_2} \cdots f(f(q_m))^{\beta_m}} \\ &= \frac{q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

svo að jafna (3) er uppfyllt.

### Lausn á 5. dæmi

Ef talan $n_0$, sem valin var í upphafi, uppfyllir $45 \leq n_0 \leq 1990$, þá getur $A$ valið strax 1990 og hann vinnur. Ef $n_0 < 45$, þá á $A$ að reyna að velja ákveðnar lykiltölur, sem hafa marga ólíka frumþætti, til þess að $B$ hafi ekki möguleika á því að minnka töluna mjög mikið. Tölurnar 12, 20, 30 og 60 hafa marga þætti miðað við stærð. Ef $A$ getur valið $7 \cdot 60 = 420$, þá getur $B$ ekki farið niður fyrir 60 og $A$ vinnur. $A$ getur valið 420, ef $21 \leq n_0 \leq 44$. Ef $A$ getur valið $7 \cdot 30 = 210$, þá getur $B$ ekki farið niður fyrir 30 og $A$ vinnur. $A$ getur valið 210, ef $15 \leq n_0 \leq 20$. Ef $A$ getur valið $7 \cdot 20 = 140$, þá getur $B$ ekki farið niður fyrir 20 og $A$ vinnur. $A$ getur valið 140, ef $12 \leq n_0 \leq 14$. Ef $A$ getur valið $5 \cdot 12 = 60$, þá getur $B$ ekki farið niður fyrir 12 og $A$ vinnur. $A$ getur valið 60, ef $8 \leq n_0 \leq 11$. Við höfum því sýnt, að $A$ getur tryggt sér vinning, ef $8 \leq n_0 \leq 1990$.

Gerum ráð fyrir, að $n_0 \geq 1990$. Við sýnum að $A$ getur valið $n_1$, þannig að $B$ sé neyddur til þess að velja tölu $n_2$ í bilinu $8 \leq n_2 < n_0$. Með því að endurtaka þetta hlýtur $B$ að lokum að velja tölu milli 8 og 1990 og $A$ getur tryggt sér vinning. $A$ á að velja sem hér segir: Til er náttúruleg tala $k$, þannig að $n_0 \leq 11 \cdot 13 \cdot 2^k < 2n_0$. $A$ á að velja $n_1 = 11 \cdot 13 \cdot 2^k$. Það er ljóst að, hvernig sem $B$ velur, mun $n_2$ uppfylla $11 \leq n_2 < n_0$. Við höfum þá sýnt, að $A$ getur tryggt sér vinning, ef $n_0 \geq 8$.

Ljóst er, að $B$ vinnur í eftirfarandi tilvikum: Ef $n_0 = 2$ (hann getur unnið í fyrsta leiknum); ef $n_0 = 3$ (ef $A$ velur 6 velur $B$ 2); ef $n_0 = 4$ (ef $A$ velur 15 eða 12 velur $B$ 3 og ef $A$ velur 10 velur $B$ 2); ef $n_0 = 5$ (ef $A$ velur 18 velur $B$ 2; ef $A$ velur 21 eða 24 velur $B$ 3; ef $A$ velur 20 velur $B$ 4).

Ef $n_0 = 6$, tapar $A$ nema hann velji 30. En þá tapar $B$ nema hann velji 6. Þetta leiðir til jafnteflis, þar sem þeir velja 30 og 6 til skiptis. Ef $n_0 = 7$, þá tapar $A$ nema hann velji 30 eða 42. Ef $A$ velur 42, þá verður $B$ að velja 6, annars tapar hann. Þetta er jafntefli.

Að lokum: $A$ getur tryggt sér vinning, ef $n_0 \geq 8$. $B$ getur tryggt sér vinning, ef $2 \leq n_0 \leq 5$. Hvorugur getur tryggt sér vinning, ef $n_0 = 6$ eða $n_0 = 7$.

## Lausn á 6. dæmi

Fram hefur komið falleg lausn á þessu dæmi, en hún krefst meiri stærðfræðilegs þroska en ætla má, að keppendur hafi öðlast. Hér er um að ræða alhæfingu á dæminu.

Látum $n$ vera náttúrulega tölu og látum $x$ vera frumstæða $n$-tu rót af einum. Við athugum skilyrði þess að $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0$, því þá er til marghyrningur með $n$ hliðar $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ og öll horn eins.

Gerum ráð fyrir, að $n = pqr$, þar sem $p$, $q$ og $r$ eru ólíkar frumtölur. Auðvelt er að sjá, að leifaflokkar talnanna $pq\alpha + qr\beta + rp\gamma \pmod{n}$ eru ólíkir, þegar $0 \le \alpha < r-1$, $0 \le \beta < p-1$ og $0 \le \gamma < q-1$. Látum $f$, $g$ og $h$ vera föll skilgreind á menginu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ með tvinntalnagildi. Þá fæst

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=0}^{r-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\sum_{\gamma=0}^{q-1}[f(\alpha,\beta)+g(\beta,\gamma)+h(\gamma,\alpha)]x^{pq\alpha+qr\beta+rp\gamma} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{r-1}\sum_{\beta=0}^{p-1} f(\alpha,\beta)x^{pq\alpha+qr\beta}\sum_{\gamma=0}^{q-1} x^{rp\gamma} \\
&+ \sum_{\beta=0}^{p-1}\sum_{\gamma=0}^{q-1} g(\beta,\gamma)x^{qr\beta+rp\gamma}\sum_{\alpha=0}^{r-1} x^{pq\alpha} \\
&+ \sum_{\alpha=0}^{r-1}\sum_{\gamma=0}^{q-1} h(\gamma,\alpha)x^{pq\alpha+rp\gamma}\sum_{\beta=0}^{p-1} x^{qr\beta} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

vegna þess að

$$\sum_{\gamma=0}^{q-1} x^{rp\gamma} = \sum_{\alpha=0}^{r-1} x^{pq\alpha} = \sum_{\beta=0}^{p-1} x^{qr\beta} = 0.$$

Takið eftir, að veldin $x^{pq\alpha+qr\beta+rp\gamma}$ eru veldin $x^k$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) í einhverri röð. Við höfum hér almenna niðurstöðu, og eftir er einungis að finna hæfileg föll $f$, $g$ og $h$, sem munu sjá til þess, að við getum leyst dæmið.

Auðvelt er að sjá, að tölurnar $pq\alpha + q\beta + \gamma$ taka öll gildi frá 0 upp í $n-1$, þegar $0 \le \alpha < r-1$, $0 \le \beta < p-1$ og $0 \le \gamma < q-1$. En það er augljóst, að ferningstöluna $(pq\alpha + q\beta + \gamma + 1)^2$ er unnt að skrifa sem summu af taginu $f(\alpha,\beta) + g(\beta,\gamma) + h(\gamma,\alpha)$ og það á marga mismunandi vegu. Við ályktum, að til er marghyrningur með hliðar $1^2$, $2^2$, $\ldots$, $n^2$ í einhverri röð og öll horn eins.

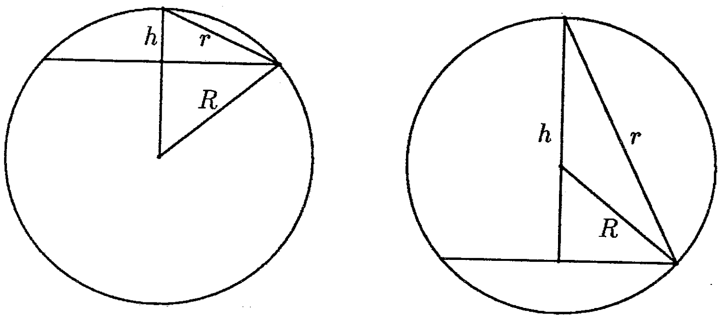
Að lokum bendum við á, að $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$ er frumþáttun tölunnar 1990.

*Jón Ragnar Stefánsson:*

# $\pi r^2$

Auðvitað veit hvert mannsbarn, hvað í fyrirsögninni felst. En ef til vill hafa ekki allir lesendur *Fréttabréfs* veitt því athygli, að í henni felst meira en það, sem allir vita.

Einhvern tíma hefur lesandinn væntanlega reiknað sjálfur, að *flatarmál kúluhatts* er $2\pi Rh$, þar sem $R$ táknar geisla kúlunnar og $h$ táknar hæð kúluhattsins, $0 \leq h \leq 2R$. Þannig virðist niðurstaðan jafnan sett fram. Hafi fyrnzt yfir hana í huga lesandans, er auðvelt að kalla hana fram, hafi því þá verið veitt athygli, að í henni felst, að kúluhatturinn hefur sama flatarmál og jafnhátt belti á sívalningsfletinum, sem er umritaður um kúluna.




En niðurstöðuna má líka setja fram með öðru móti og athyglisverðu, því af reglu Pýþagórasar fæst viðstöðulaust, að $2Rh = r^2$, þar sem $r$ táknar (evklíðsku) fjarlægðina frá miðpunkti hattsins út á brún. Flatarmál kúluhattsins er þá einmitt $\pi r^2$. Hér mætti svo kalla $r$ *geisla* kúluhattsins, því hann er leg þeirra punkta á kúlufletinum, sem hafa fjarlægð frá miðpunkti hattsins minni en $r$ eða jafna $r$.

Svo getur lesandinn leikið sér að því að láta geisla kúlunnar ($R$) stefna á óendanlegt en haldið geisla kúluhattsins ($r$) föstum, og sér hann þá, að meðan á þessu stendur hafa allir kúluhattarnir sama flatarmál, $\pi r^2$, en þeir fletjast út og verða að lokum að hringskífu með geisla $r$.

# FÉLAGATAL ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGSINS

Langt er um liðið síðan félagsmenn fengu félagatal síðast í hendur, og er löngu tímabært að bæta úr því.

Á skrá þeirri, sem fer hér á eftir, eru alls 123 félagsmenn, og eru birtar svo sem við á neðangreindar upplýsingar um hvern þeirra:

*Nafn*, prófgráða, starfsheiti/stöðuheiti, stofnun/fyrirtæki; póstfang; heimasími, vinnusími, netfang. *Inngönguár í félagið.*

Í mörgum tilvikum hefur stjórn félagsins ekki fyllri upplýsingar en fram koma í skránni, og tekur hún þá fúslega við viðbótum svo sem við á. Einnig kunna að vera hér rangar upplýsingar eða úreltar, og er beðizt velvirðingar á því, en þess þá jafnframt óskað, að leiðrétting berist.

Margir félagsmenn dveljast erlendis og er hjá sumum þeirra einnig tilgreint póstfang hérlendis, og eru fundarboð þá send þangað.

Til fróðleiks er látið fylgja með, hvenær menn gengu í félagið, og er þá farið eftir því, sem finna má í skjölum félagsins. Því miður eru þau gögn þó gloppótt og vantar ártal því sums staðar.

Félagið var sem kunnugt er stofnað á sjötugsafmæli dr. Ólafs Daníelssonar 31. október 1947. Af fimmtán stofnendum félagsins eru fimm á lífi, og er þeirra getið sem stofnenda hér á eftir, en þeir eru: Björn Bjarnason, Guðmundur Arnlaugsson, K. Guðmundur Guðmundsson, Sigurkarl Stefánsson og Sveinn Þórðarson.

Á eftir félagatalinu er birt skrá yfir látna félagsmenn.

## Félagsmenn

*Agnethe Kristjánsson*, B. Sc., menntaskólakennari, Menntaskólanum við Hamrahlíð; Blómvangi 7, 220 Hafnarfirði; hs. 53133, vs. 685140/685155. *1966*

*Ari Brynjólfsson*, dr. phil., International Faculty for Food Irradiation Technology; Glasergasse 6/7, Wien 1090, Austurríki. *1954*

*Ágúst Sverrir Egilsson*, B. S.; Haukanesi 11, 210 Garðabæ; hs. 45504. *1991*

————————; 3030 Smyth Road, Apt. 11 H, Berkeley, Ca. 94720, U.S.A.; egilsson@math.berkeley.edu.

*Ársæll Másson*, B. S., menntaskólakennari, Menntaskólanum við Sund; Öldugötu 6, 101 Reykjavík; hs. 29647, vs. 33419/37580. *1988*

*Áskell Harðarson*, Ph. D., kennari, Flensborgarskóla; Ölduslóð 22, 220 Hafnarfirði; hs. 54210. *1991*

*Ásmundur Jakobsson*, M. Sc., Vistfangi hf.; Barmahlíð 22, 105 Reykjavík; hs. 14413, vs. 694944/694945. *1978*

*Ásta Guðmundsdóttir*, Dipl. Math., Hafrannsóknastofnun; Ofanleiti 23, 103 Reykjavík; hs. 30880, vs. 20240, asta@hafro.is. *1988*

*Benedikt Jóhannesson*, Ph. D., Talnakönnun hf.; Skaftahlíð 22, 105 Reykjavík; hs. 12224, vs. 688644. *1982*

*Birgir Guðjónsson*, cand. scient., menntaskólakennari, Menntaskólanum í Reykjavík; Flókagötu 11, 105 Reykjavík; hs. 22127, vs. 14177/13148. *1988*

*Bjarni Jónsson*, Ph. D., dr. scient. h. c., prófessor; Dept. of Math., Vanderbilt University, POB 1541, Sta. B, Nashville, TN 37235, U.S.A.; vs. 615-322-666, jonssob@vuctrvax.

*Bjarni Þórðarson*, cand. act., framkvæmdastjóri, Íslenzkri endurtryggingu; Miðvangi 7, 220 Hafnarfirði; hs. 51433, vs. 681444. *1964*

*Bjarnþór G. Kolbeins*, DEA, kennari, Fjölbrautaskóla Vesturlands; Skólabraut 10, 300 Akranesi; hs. 93-12579, vs. 93-12544. *1987*

*Björn Birnir*, Ph. D., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (stærðfræðistofu); Reynimel 88, 107 Reykjavík; hs. 21088, vs. 694803, bb@raunvis.hi.is. *1984*

————; Dept. of Math., Univ. of Cal. Santa Barbara, Santa Barbara, CA 93106, U.S.A.; hs. 805-685-6904, vs. 805-893-4866, birnir@henri.ucsb.edu.

*Björn Bjarnason*, cand. mag., fyrrv. rektor, Menntaskólanum við Sund; Hamrahlíð 31, 105 Reykjavík; hs. 35009. *Stofnandi.*

*Davíð Aðalsteinsson*, B. S.; Löngubrekku 11, 200 Kópavogi; hs. 40166. *1991*

————; Dept. of Math., 9th floor Evans Hall, Univ. of Cal. Berkeley, Berkeley, Ca. 94720, U.S.A.; adalst@math.berkeley.edu.

*Eggert Briem*, lic. scient., prófessor, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Sólvallagötu 7, 101 Reykjavík; hs. 10242, vs. 694662, briem@rhi.hi.is. *1970*

*Einar H. Guðmundsson*, lic. scient., dósent, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Þangbakka 10, 109 Reykjavík; hs. 76374, vs. 694811, einar@raunvis.hi.is. *1975*

*Einar Júlíusson*, Ph. D., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (jarðeðlisfræðistofu); Melseli 5, 109 Reykjavík; hs. 79979. *1967*

*Eiríkur Brynjólfsson*, maitrise, kennari, Menntaskólanum á Akureyri; Bergstaðastræti 33a, 101 Reykjavík; hs. 23189, vs. 96-11433. *1988*

*Finnur Lárusson*, M. S.; Dunhaga 23, 107 Reykjavík. *1989*

____________, Stærðfræðistofnun Chicago-háskóla; 1414 East 59th Street, # 821, Chicago, IL 60637, U.S.A.; vs. 312-702-6045, finnur@zaphod.uchicago.edu.

*Franz Árni Siemsen*, B. S., kennari, Fjölbrautaskóla Vesturlands; Garðholti, 300 Akranesi; hs. 93-11937, vs. 93-12544. *1991*

*Freyja Hreinsdóttir*, M. S.; Brúnalandi 34, 108 Reykjavík; hs. 30356, gisli@raunvis.hi.is. *1987*

*Friðrik Már Baldursson*, Ph. D., Þjóðhagsstofnun; Álfheimum 34, 104 Reykjavík; hs. 38278, vs. 699500. *1983*

*Friðrik Diego*, maitrise, kennari; Tjarnargötu 10a, 101 Reykjavík. *1987*

*Geir Agnarsson*, B. S.; Selbraut 82, 170 Seltjarnarnesi; hs. 611450. *1991*

____________; Dept. of Math., 9th floor Evans Hall, Univ. of Cal. Berkeley, Berkeley, Ca.94720, U.S.A.; agnarsso@math.berkeley. edu.

*Geir Gunnlaugsson*, Ph. D., framkvæmdastjóri, Marel hf.; Hörgshlíð 28, 105 Reykjavík; hs. 15715, vs. 686858. *1973*

*Gestur Ólafsson*, dr. rer. nat.; Math. Inst. der Univ. Göttingen, Bunsenstrasse 3/5, D-3400 Göttingen, Þýzkalandi; vs. 0551-397791, golafss@dgogwdg1.bitnet. *1983*

*Gísli Másson*, Ph. D.; Brúnalandi 34, 108 Reykjavík; hs. 30356, gisli@raunvis.hi.is. *1987*

*Guðjón Hansen*, cand. act., tryggingafræðingur; Haðalandi 12, 108 Reykjavík; hs. 36560, vs. 21295. *1952*

*Guðlaugur Þorbergsson*, dr. rer. nat.; Dept. of Math., University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, U.S.A.; vs. 219-239-6507, gth@cartan.math.nd.edu. *1973*

*Guðmundur Arnlaugsson*, cand. mag., fyrrv. rektor, Menntaskólanum við Hamrahlíð; Hagamel 28, 107 Reykjavík; hs. 20254. *Stofnandi.*

*Guðmundur Guðmundsson*, Ph. D., Seðlabanka Íslands; Háteigsvegi 42, 105 Reykjavík; hs. 26752, vs. 699600, gg@rhi.hi.is. *1963*

*Guðmundur K. G. Kolka*, Ph. D., Verk- og kerfisfræðistofunni Streng; Holtsgötu 3, 220 Hafnarfirði; hs. 54374, vs. 685130. *1984*

*Guðmundur K. Magnússon*; Baldurshaga 12, Suðurlandsvegi, 110 Reykjavík; hs. 671241. *1983*

*Guðmundur Pálmason*, dr. scient., forstjóri jarðhitadeildar, Orkustofnun; Miðleiti 1, 103 Reykjavík; hs. 35375, vs. 813600. *1958*

*Gunnar Stefánsson*, Ph. D., deildarstjóri, Hafrannsóknastofnun; Sæbólsbraut 33, 200 Kópavogi; hs. 642561, vs. 20240, gunnar@ hafro.is. *1985*

*Gunnar F. Stefánsson*, Ph. D.; Hörpulundi 1, 210 Garðabæ; hs. 656252. *1990*

————————; Dept. of Math., Penn. State Univ., University Park, PA 16801, U.S.A.; vogfjord@seismic.geosc.psu.edu.

*Gylfi Guðnason*, mag. scient., menntaskólakennari, Menntaskólanum í Reykjavík; Þingholsbraut 64, 200 Kópavogi; hs. 41477, vs. 14177/13148. *1970*

*Halla Björg Baldursdóttir*, B. S.; Lækjarhvammi 16, 220 Hafnarfirði; hs. 650775. *1981*

*Halldór I. Elíasson*, dr. rer. nat., prófessor, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Bakkavör 3, 170 Seltjarnarnesi; hs. 628096, vs. 694658. *1964*

*Halldór Guðjónsson*, Ph. D., dósent, Háskóla Íslands (tölvunarfræðiskor raunvísindadeildar); Kleppsvegi 92, 104 Reykjavík; hs. 33137, vs. 694615. *1969*

*Halldór Halldórsson*, M. Sc., Verk- og kerfisfræðistofunni hf.; Tómasarhaga 22, 107 Reykjavík; hs. 25693, vs. 687500. *1972*

*Hans Kr. Guðmundsson*, Ph. D., eðlisfræðingur, Iðntæknistofnun; Reynimel 35, 107 Reykjavík; hs. 19772, vs. 687000. *1981*

*Helgi Jónsson*, Dipl. Ing., kennari, Tækniskóla Íslands; Gnoðarvogi 48, 104 Reykjavík; hs. 32984, vs. 814933. *1961*

*Helgi Sigvaldason*, lic. techn., verkfræðingur, Verkfræðistofu Helga Sigvaldasonar; Logafold 134, 112 Reykjavík; hs. 671699, vs. 621471. *1960*

*Helgi Tómasson*, fil. dr., lektor, Háskóla Íslands (hagfræðiskor viðskipta- og hagfræðideildar); Aðallandi 3, 108 Reykjavík; hs. 685286, vs. 694571, helgito@hag.rhi.hi.is. *1982*

*Helgi Þórsson*, dr. 3mé cycle, sérfræðingur, Reiknistofnun Háskólans; Neðstaleiti 6, 108 Reykjavík; hs. 31291, vs. 694755, helgith@rhi.hi.is. *1982*

*Hermann Þórisson*, fil. dr., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (reiknifræðistofu); Túngötu 37, 101 Reykjavík; hs. 13912, vs. 694931, thoris@rhi.hi.is. *1987*

*Hildigunnur Halldórsdóttir*, M. S., sérfræðingur, Reiknistofnun Háskólans; Logalandi 19, 108 Reykjavík; hs. 39682, vs. 694743, hildig@rhi.hi.is. *1975*

*Hjálmtýr Hafsteinsson*, Ph. D., lektor, Háskóla Íslands (tölvunarfræðiskor raunvísindadeildar); Vesturbergi 111, 111 Reykjavík; hs. 74897, vs. 694932, hh@rhi.hi.is. *1991*

*Hörður Lárusson*, M. A., deildarstjóri, menntamálaráðuneyti; Efstasundi 63, 104 Reykjavík; hs. 38188, vs. 609591. *1964*

*Jakob Yngvason*, dr. rer. nat., prófessor, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Sóleyjargötu 9, 101 Reykjavík; hs. 13891, vs. 694804, jyng@rhi.hi.is. *1978*

*Jóhannes Guðmundsson*, cand. polyt., verkfræðingur, Verkfræðistofu Sigurðar Thoroddsen hf.; Laugalæk 48, 105 Reykjavík; hs. 36703, vs. 695000. *1964*

*Jón Kr. Arason*, dr. rer. nat., prófessor, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Reynimel 46, 107 Reykjavík; hs. 27916, vs. 694661, jka@rhi.hi.is. *1973*

*Jón Hafsteinn Jónsson*, cand. mag., kennari, Verzlunarskóla Íslands; Stangarholti 7, 105 Reykjavík; hs. 612548, vs. 688400. *1964*

*Jón Ingólfur Magnússon*, dr. 3mé cycle, lektor, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Blönduhlíð 11, 105 Reykjavík; hs. 12252, vs. 694731, jim@raunvis.hi.is. *1981*

*Jón Ragnar Stefánsson*, cand. scient., dósent, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Hrefnugötu 10, 105 Reykjavík; hs.

12524, vs. 694663, jrs@rhi.hi.is. *1967*

*Jón Erlingur Þorláksson*, cand. act., tryggingafræðingur; Skólagerði 22, 200 Kópavogi; hs. 41027, vs. 621650. *1957*

*Jón Þór Þórhallsson*, dr. rer. nat., forstjóri, Skýrsluvélum ríkisins og Reykjavíkurborgar; Akurgerði 31, 108 Reykjavík; hs. 34363, vs. 695165. *1967*

*Júlíus Sólnes*, lic. techn., prófessor, Háskóla Íslands (byggingarverkfræðiskor verkfræðideildar); Miðbraut 31, 170 Seltjarnarnesi; hs. 628112, vs. 694656. *1967*

*K. Guðmundur Guðmundsson*, cand. act., fyrrv. framkvæmdastjóri, Íslenzkri endurtryggingu; Bjarmalandi 24, 108 Reykjavík; hs. 685937. *Stofnandi.*

*Ketill Ingólfsson*, dr. phil.; 53 E. Essex Av., Lansdowne, Penn. 19050, U.S.A. *1972*

*Kjartan G. Magnússon*, Ph. D., dósent, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Bogahlíð 18, 105 Reykjavík; hs. 30663, vs. 694734. *1980*

*Kristín Bjarnadóttir*, M. Sc., kennari, Fjölbrautaskólanum í Garðabæ; Smáraflöt 30, 210 Garðabæ; hs. 657647, vs. 52193/52194. *1989*

*Kristín Halla Jónsdóttir*, Ph. D., dósent, Kennaraháskóla Íslands; Sefgörðum 28, 170 Seltjarnarnesi; hs. 622236, vs. 688700. *1975*

*Kristján Jónasson*, Ph. D.; Margrethevej 13, DK 2840 Holte, Danmörku; hs. 42421700. *1980*

*Kristján S. Sigtryggsson*, B. S.; Kárastíg 4, 101 Reykjavík. *1988*

*Lárus H. Bjarnason*, cand. scient., menntaskólakennari, Menntaskólanum við Hamrahlíð; Tómasarhaga 57, 107 Reykjavík; hs. 10250, vs. 685140/685155. *1988*

*Lárus Thorlacius*, Ph. D.; Langagerði 13, 108 Reykjavík. *1987*

——————; Dept. of Physics, Stanford University, Stanford, Ca. 94305-4060, U.S.A.; vs. 415-725-2368, larus@slacvm.bitnet.

*Loftur Þorsteinsson*, cand. polyt., framkvæmdastjóri, Verkfræðistofu Sigurðar Thoroddsen hf.; Álfheimum 58, 104 Reykjavík; hs. 35593, vs. 695033. *1961*

*Magnús Magnússon*, M. A., prófessor, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Skeiðarvogi 47, 104 Reykjavík; hs. 37705, vs.

694650. *1953*

*Mark G. Davidson*, Ph. D., Asst. Prof.; Dept. of Math., Louisiana St. Univ., Baton Rouge, LA 70803, U.S.A.; vs. 602-325-1581. *1988*

*Markús K. Möller*, B. S., hagfræðingur, Seðlabanka Íslands; Fífumýri 8, 210 Garðabæ; hs. 657184, vs. 699600, markusm@rhi.hi.is. *1975*

*Már Ársælsson*, B. A., lektor, Tækniskóla Íslands; Langholtsvegi 112a, 104 Reykjavík; hs. 30672, vs. 814933. *1973*

*Michael Fell*, Ph. D., prófessor; Boðagranda 7, 7. hæð C, 107 Reykjavík; hs. 27554. *1990*

————; Dept. of Math., Univ. of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, U.S.A.

*Níels Karlsson*, B. S., menntaskólakennari, Menntaskólanum á Akureyri; Steinnesi, Glerárhverfi, 603 Akureyri; hs. 96-25527, vs. 96-11433. *1991*

*Oddur Benediktsson*, Ph. D., prófessor, Háskóla Íslands (tölvunarfræðiskor raunvísindadeildar); Faxaskjóli 10, 107 Reykjavík; hs. 13317, vs. 694728, oddur@rhi.hi.is. *1964*

*Orthulf Prunner*, dr. phil., organleikari, Háteigskirkju; Barðavogi 28, 104 Reykjavík; hs. 30227. *1981*

*Ottó J. Björnsson*, cand. stat., dósent, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Kleppsvegi 2, 105 Reykjavík; hs. 32741, vs. 694657. *1967*

*Ólafur Ísleifsson*, M. A., hagfræðingur, Seðlabanka Íslands; Bergstaðastræti 86, 101 Reykjavík; hs. 13260, vs. 699600. *1984*

*Ómar Árnason*, cand. act., menntaskólakennari, Menntaskólanum við Sund; Móabarði 20, 220 Hafnarfirði; hs. 52329, vs. 33419/ 37580. *1964*

*Óskar Elvar Guðjónsson*, B. S., Verk- og kerfisfræðistofunni; Engjaseli 61, 109 Reykjavík; hs. 72781, vs. 687501. *1978*

*Páll Jensson*, lic. techn., prófessor, Háskóla Íslands (vélaverkfræðiskor verkfræðideildar); Frostaskjóli 21, 107 Reykjavík; hs. 15306, vs. 694635, pall@rhi.hi.is. *1977*

*Pétur H. Blöndal*, dr. rer. nat., tryggingafræðingur; Furugerði 13, 108 Reykjavík; hs. 680641. *1973*

*Ragna Briem*, B.S., menntaskólakennari, Menntaskólanum við Hamrahlíð; Hjarðarhaga 58, 107 Reykjavík; hs. 19545, vs. 685140/ 685155. *1975*

*Ragnar Sigurðsson*, fil. dr., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (stærðfræðistofu); Sörlaskjóli 94, 107 Reykjavík; hs. 10172, vs. 694803, ragnar@raunvis.hi.is. *1982*

*Ragnheiður Guðmundsdóttir*, fil. dr.; 1831 Lakeridge Road, Birmingham, Alabama 35216, U.S.A. *1988*

————————; Bjarmalandi 24, 108 Reykjavík; hs. 685937. *1988*

*Reynir Axelsson*, dr. rer. nat., dósent, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Reynimel 74, 107 Reykjavík; hs. 15436, vs. 694815, reynir@rhi.hi.is. *1968*

*Robert J. Magnus*, D. Phil., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (stærðfræðistofu); Víðihlíð 14, 105 Reykjavík; hs. 38103, vs. 694814, robert@raunvis.hi.is. *1977*

*Rögnvaldur G. Möller*, D. Phil., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (stærðfræðistofu); Safamýri 55, , 108 Reykjavík; hs. 686446. *1989*

*Sigfús J. Johnsen*, cand. scient., prófessor, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Bollagörðum 51, 170 Seltjarnarnesi; hs. 614818, vs. 694790/694785, sigfus@raunvis.hi.is. *1979*

*Sigmundur Guðmundsson*, B. S.; Dept. of Pure Math., University of Leeds, Leeds LS2 JT, Englandi. *1987*

*Sigríður Hlíðar*, M. Ed., menntaskólakennari, Menntaskólanum í Reykjavík; Laugateig 9, 105 Reykjavík; hs. 36625, vs. 14177/13148. *1991*

*Sigrún Helgadóttir*, M. Sc., tölfræðingur, Hagstofu Íslands; Grjótaseli 11, 109 Reykjavík; hs. 77575, vs. 609800, sigrunhe@rhi.hi.is. *1974*

*Sigurbjörn Guðmundsson*, cand. polyt., verkfræðingur, Verkfræðistofu Sigurðar Thoroddsen hf.; Álftamýri 47, 108 Reykjavík; hs. 685919, vs. 695000.

*Sigurður Helgason*, Ph. D., dr. scient. h. c., prófessor; Ægisíðu 60, 107 Reykjavík; hs. 11178.

————————; Dept. of Math., room no. 2-182, MIT, Cambridge, Mass. 02139, U.S.A.; hs. 617-489-3161, vs. 617-253-3668.

*Sigurkarl Stefánsson*, cand. mag., fyrrv. dósent, Háskóla Íslands;

Skjólbraut 1, 200 Kópavogi; hs. 42799. *Stofnandi.*

*Skarphéðinn Pálmason*, cand. mag., menntaskólakennari, Menntaskólanum í Reykjavík; Sörlaskjóli 36, 107 Reykjavík; hs. 26907, vs. 14177/13148. *1954*

*Skeggi G. Þormar*; 1077 9th St., no. 3, Albany, CA 94710 U.S.A.; hs. 901-415-5280035, vs. 901-415-6806818. *1983*

*Skúli Sigurðsson*, Ph. D.; Kirkjubraut 3, 170 Seltjarnarnesi; hs. 611676. *1983*

———————; Technische Universität Berlin, Verbund für Wissenschaftsgeschichte, Sekretariat HAD 29 Zi. HAD 516a, Hardenbergstrasse 4-5, D-1000 Berlin 12, Þýzkalandi.

*Snjólfur Ólafsson*, fil. dr., dósent, Háskóla Íslands (hagfræðiskor viðskipta- og hagfræðideildar); Álfaheiði 13, 200 Kópavogi; hs. 46323, vs. 694570, snjolfur@rhi.hi.is. *1984*

*Snorri Agnarsson*, Ph. D., prófessor, Háskóla Íslands (tölvunarfræðiskor raunvísindadeildar); Ásvallagötu 40, 101 Reykjavík; hs. 18571, vs. 694732, snorri@rhi.hi.is.

*Snorri Páll Kjaran*, lic. techn., verkfræðingur, Verkfræðistofunni Vatnaskilum; Brautarási 13, 110 Reykjavík; hs. 78299, vs. 681766. *1977*

*Steingrímur Baldursson*, Ph. D., prófessor, Háskóla Íslands (efnafræðiskor raunvísindadeildar); Austurgerði 11, 108 Reykjavík; hs. 30707, vs. 694643. *1959*

*Sveinbjörn Björnsson*, Dipl. Phys., prófessor, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Víghólastíg 14, 200 Kópavogi; hs. 44472, vs. 694817. *1964*

*Sveinn Þórðarson*, dr. rer. nat.; 3944-52 Ave., Red Deer A.B., T4N-4I7, Kanada. *Stofnandi.*

*Sven Þ. Sigurðsson*, Ph. D., dósent, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Skeiðarvogi 61, 104 Reykjavík; hs. 813791, vs. 694727, sven@rhi.hi.is. *1972*

*Sæmundur Kjartan Óttarsson*, Ph. D.; Sæviðarsundi 78, 104 Reykjavík; hs. 30102, vs. 694739. *1987*

*Tómas Jóhannesson*, M. S., sérfræðingur, Orkustofnun; Safamýri 46, 108 Reykjavík; hs. 35639, vs. 813600, tj@os.is. *1988*

*Valdimar Valdimarsson*, B. A., menntaskólakennari, Menntaskólanum við Hamrahlíð; Krókahrauni 2, 220 Hafnarfirði; hs. 52161, vs. 685140/685155. *1973*

*Yngvi Pétursson*, B. S., menntaskólakennari, Menntaskólanum í Reykjavík; Dalseli 15, 109 Reykjavík; hs. 78951, vs. 14177/13148. *1981*

*Þorbjörn Karlsson*, M. S., prófessor, Háskóla Íslands (vélaverkfræðiskor verkfræðideildar); Barðaströnd 13, 170 Seltjarnarnesi; hs. 625965, vs. 694640, thorbj@rhi.hi.is. *1952*

*Þorgeir Pálsson*, Sc. D., prófessor, Háskóla Íslands (vélaverkfræðiskor verkfræðideildar); Barðaströnd 21, 170 Seltjarnarnesi; hs. 629357, vs. 694670, thorgeir@kerfi.hi.is. *1971*

*Þorkell Helgason*, Ph. D., prófessor, Háskóla Íslands (stærðfræðiskor raunvísindadeildar); Strönd, Bessastaðahreppi, póstst.: 221 Hafnarfjörður; hs. 650859, vs. 694729, thorkell@rhi.hi.is. *1968*

*Þorsteinn Vilhjálmsson*, cand. scient., prófessor, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Bárugötu 7, 101 Reykjavík; hs. 21428, vs. 694806, thv@raunvis.hi.is. *1968*

*Þorvaldur Búason*, mag. scient.; Geitastekk 5, 109 Reykjavík; hs. 74370, vs. 16370. *1967*

*Þorvaldur Gunnlaugsson*, B. S., sérfræðingur, Reiknistofnun Háskólans; Langholtsvegi 92, 104 Reykjavík; hs. 678952, thg@rhi.hi.is.

*Þorvarður Jónsson*, cand. polyt., framkvæmdastjóri fjarskiptasviðs, Pósti og síma; Austurgerði 2, 108 Reykjavík; hs. 687704, vs. 636201. *1958*

*Þórarinn Árni Eiríksson*, cand. scient.; Hamrahlíð 11, 105 Reykjavík; hs. 25056. *1988*

*Þórður Jónsson*, Ph. D., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (stærðfræðistofu); Bárugötu 17, 101 Reykjavík; hs. 10854, vs. 694762, thjons@rhi.hi.is. *1980*

*Þórir Sigurðsson*, M. S., lektor, Háskólanum á Akureyri; Ásvegi 25, 600 Akureyri; hs. 96-27530, vs. 96-11770. *1977*

*Örn Helgason*, mag. scient., prófessor, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Miðvangi 157, 220 Hafnarfirði; hs. 52033, vs. 694793/694781, ornh@raunvis.hi.is. *1965*

*Örn Ólafsson*, B. S. Hons., Tækniháskólanum í Stokkhólmi; Rinkebysvängen 89-102, S-163 74 Spånga, Svíþjóð. *1987*

## Látnir félagsmenn

*Steinþór Sigurðsson*, mag. scient., framkvæmdastjóri Rannsóknaráðs ríkisins, f. 11. jan. 1904, d. 2. nóv. 1947. *Stofnandi.*

*Lárus Bjarnason*, skólastjóri Flensborgarskóla, f. 1. marz 1876, d. 9. okt. 1956. *1955*

*Ólafur Dan Daníelsson*, dr. phil., yfirkennari við Menntaskólann í Rvk., f. 31. okt. 1877, d. 10. des. 1957. *Stofnandi, heiðursfélagi 1. nóv. 1955.*

*Brynjólfur Stefánsson*, mag. scient., framkvæmdastjóri Sjóvátryggingarfélags Íslands hf., f. 1. sept. 1896, d. 24. nóv. 1960. *Stofnandi.*

*Þorkell Þorkelsson*, dr. phil. h. c., veðurstofustjóri, f. 6. nóv. 1876, d. 7. maí 1961. *Stofnandi.*

*Vilhjálmur Ögmundsson*, bóndi og oddviti á Narfeyri á Skógarströnd, f. 4. jan. 1897, d. 24. ág. 1965. *1951*

*Bolli Thoroddsen*, cand. polyt., bæjarverkfræðingur í Reykjavík, f. 26. apríl 1901, d. 31. maí 1974. *Stofnandi.*

*Magnús Reynir Jónsson*, cand. polyt., raforkuverkfræðingur, f. 28. sept. 1922, d. 7. nóv. 1975. *1972*

*Árni Björnsson*, cand. polit., tryggingafræðingur, Sjóvátryggingarfélagi Íslands hf., f. 14. apríl 1898, d. 31. marz 1978. *Stofnandi.*

*Trausti Einarsson*, dr. phil., prófessor í aflfræði og eðlisfræði við Háskóla Íslands, f. 14. nóv. 1907, d. 26. júlí 1984. *Stofnandi.*

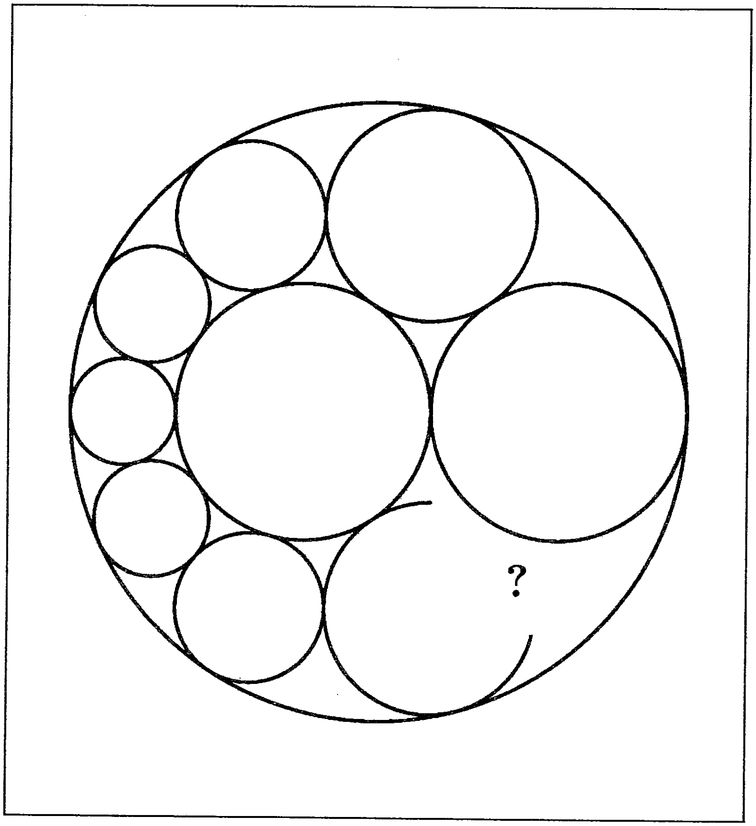
*Þórir Bergsson*, cand. act., tryggingastærðfræðingur, f. 2. júlí 1929, d. 7. marz 1987. *1959*

*Jakob Gíslason*, cand. polyt., dr. techn. h. c., orkumálastjóri, f. 10. marz 1902, d. 9. marz 1987. *1962*

*Þorbjörn Sigurgeirsson*, mag.scient., dr.scient.h.c., prófessor í eðlisfræði við Háskóla Íslands, f. 19. júní 1917, d. 24. marz 1988. *Stofnandi.*

*Gunnar Böðvarsson*, Ph. D., dr. scient. h. c., prófessor í stærðfræði og jarðeðlisfræði við ríkisháskóla Oregon í Corvallis í Bandaríkjunum, f. 8. ág. 1916, d. 9. maí 1989. *Stofnandi.*

*Leifur Ásgeirsson*, dr. phil., dr. scient. h. c., prófessor í stærðfræði við Háskóla Íslands, f. 25. maí 1903, d. 19. ág. 1990. *Stofnandi, heiðursfélagi 25. maí 1973.*




Íslenzka stærðfræðafélagið
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík