FRÉTTABRÉF

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGSINS

1. tbl. 4. árg. **Júlí 1992**

$$S_0 = n$$

$$S_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S_5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$S_6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$S_7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$S_8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{3}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S_9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

$$S_{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

$$S_{11} = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^8 + \frac{11}{6}n^6 - \frac{11}{8}n^4 + \frac{5}{12}n^2$$

Fréttabréf Íslenzka stærðfræðafélagsins

Ritstjóri: Jón Ragnar Stefánsson

Póstfang:
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Efni

Á forsíðu er brot úr handriti eftir Vilhjálm Ögmundsson bónda á Narfeyri á Skógarströnd (1896–1965). Hann leiddi út tvær reglur um summurnar $S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ og reiknar þær hér fyrir fyrstu gildin á p. Vilhjálmur naut ekki skólalærdóms í æðri stærðfræði, en lærði hana á eigin spýtur. Þrjú bréf frá honum eru birt hér í þessu *Fréttabréfi*.

Á baksíðu er *ójafna Jensens*, þar sem φ er kúpt fall og stuðlarnir a_ν eru jákvæðir og endanlega margir. Í almennri gerð sinni segir ójafnan um kúpt fall φ, að $\varphi(\int_X f\,d\mu) \leq \int_X \varphi \circ f\,d\mu$, þar sem μ er líkindamál. J. L. W. V. Jensen (1859–1925) var danskur símafræðingur, sem naut ekki heldur stærðfræðimenntunar í háskóla. Þessi mynd fer um víða veröld sem kynning á framlagi Dana til stærðfræði, hefur verið í póststimpli stærðfræðistofnunarinnar við Hafnarháskóla um langt skeið og er nú einnig í bréfhaus hennar. Hér með er lýst eftir hugmyndum um einhverja slíka myndræna kynningu á framlagi íslenzks stærðfræðings.

AF STARFI FÉLAGSINS

Fundir í félaginu hafa verið með hefðbundnum hætti að undanförnu og hefur verið leitazt við að velja efni af ýmsu tagi. Ábendingar um val á fyrirlesurum eru velþegnar og er því sérstaklega beint til þeirra félagsmanna, sem dveljast erlendis, að þeir láti vita um ferðir sínar hingað með nokkrum fyrirvara, svo að hægt sé að efna til fundar.

Hér í *Fréttabréfi* er gerð nokkur grein fyrir tveimur öðrum þáttum í starfi félagsins. Sverrir Örn Þorvaldsson skýrir frá *framhaldsskólakeppninni í stærðfræði*, en nokkrir félagsmenn leggja fram mikla vinnu við hana. Raunar er um að ræða margs konar keppni, innlenda keppnin fer fram á tveimur stigum að hausti og svo er úrslitakeppni að vori, síðan fer Norðurlandakeppnin fram samtímis í hverju landanna fyrir sig, og loks koma Ólympíuleikarnir sjálfir, sem nú standa fyrir dyrum.

Reynir Axelsson segir frá *orðaskránni*, en svo er komið að farið er að hilla undir útgáfu hennar. Á löngum tíma hafa margir lagt lið við þá vinnu en mjög með misjöfnum hætti. Mestu munar þar að sjálfsögðu um vinnu Reynis við ritstjórn skrárinnar. Í orðapistli sínum fjallar hann í þetta sinn um velþekkt hugtök úr gamalkunnri menntaskólastærðfræði, nánar tiltekið um hugtök varðandi keilusnið. Svo sem þar má sjá getur verið vandratað um þann íðorðafrumskóg, sem sprottið hefur á hinum ýmsu tungumálum. Lesendur eru hvattir til að koma á framfæri við Reyni athugasemdum varðandi orðaskrána, hvort heldur er varðandi efni þessa pistils eða annað, sem ritstjórn orðaskrárinnar glímir við.

Hér að neðan skýrum við svo frá tveimur nýmælum í samskiptum félagsins við umheiminn, annars vegar við rótgróna erlenda rannsóknarstofnun og hins vegar við alþjóðlega kennslumálanefnd í stærðfræði. Auk þess skýrum við frá verðlaunaveitingum á stúdentsprófi nú í vor.

Aðild að Mittag-Leffler-stofnuninni

Á aðalfundi félagsins 9. janúar sl. var samþykkt tillaga um aðild félagsins að *Mittag-Leffler-stofnuninni* í Stokkhólmi. Jafnframt var Sigurður Helgason kjörinn fulltrúi þess í stjórn stofnunarinnar og Jón Kr. Arason til vara.

Stjórn stofnunarinnar er þannig skipuð, að í henni eiga sæti allir stærðfræðingar í hinni Konunglegu sænsku vísindaakademíu og að auki hefur þar átt sæti einn fulltrúi frá hverju landanna, Danmörku, Noregi og Finnlandi. Stjórn stofnunarinnar samþykkti í fyrravor, að Íslendingum skyldi einnig boðin aðild að stofnuninni, og var Íslenzka stærðfræðafélagið valið til að tilnefna íslenzkan fulltrúa í stjórnina. Stjórnin kemur saman til fundar einu sinni á ári, en að auki starfar sérstök framkvæmdastjórn ásamt forstöðumanni stofnunarinnar.

Fyrrgreindu löndin þrjú, sem um árabil hafa verið tengd stofnuninni, leggja samkvæmt eigin ákvörðun fram nokkurt fé til hennar, en tekið var fram, að boðinu um aðild Íslenzka stærðfræðafélagsins fylgdu ekki fjárhagslegar kvaðir.

Sigurður Helgason sótti stjórnarfund stofnunarinnar í maímánuði og hefur hann gefið skýrslu um þann fund. Starfsemi stofnunarinnar er skipulögð nokkur ár fram í tímann og liggur því fyrir, hvaða svið stærðfræði verða tekin fyrir næstu þrjá vetur. Þau verða sem hér segir:

1992–93 Schrödinger-virkjar.
1993–94 Algebruleg grannfræði.
1994–95 Safneðlisfræði (haustmisseri) og slembigreining (vormisseri).

Stofnunin starfar frá septemberbyrjun til maíloka ár hvert, en hlé er yfir sumarið. Sigurður lét þess sérstaklega getið, að hann hefði kannað möguleika á, að menn héðan, sem unnið hefðu sér til hæfni, gætu átt þess kost að dveljast við stofnunina við rannsóknir hluta úr sumri og haft þá afnot af bókasafni stofnunarinnar. Var því vel tekið, en þess þó getið, að á sumrin væru íbúðir stofnunarinnar ekki til reiðu. Hins vegar væru góðir möguleikar á ódýru húsnæði fjær stofnuninni.

Í tilefni af því, að tekizt hafa formleg tengsl félagsins við Mittag-Leffler-stofnunina skrifar Ragnar Sigurðsson grein hér í *Fréttabréf* um starfsemi stofnunarinnar og sögu.

Tengsl við Alþjóðanefnd um stærðfræðikennslu

Eftir síðasta aðalfund fékk stjórn félagsins í hendur upplýsingar um *Alþjóðanefnd um stærðfræðikennslu*, sem starfar á vegum *Alþjóðasambands stærðfræðinga*. Sú nefnd sér m.a. um Alþjóðaþingið um stærðfræðimenntun, sem haldið verður í Québec nú í ágúst, en það verður hið sjöunda í röðinni. Samkvæmt þeim upplýsingum er til þess ætlast, að hvert þátttökuland í Alþjóðasambandinu tilnefni fulltrúa, sem komi fram fyrir þess hönd gagnvart nefndinni og taki við upplýsingum um starfsemi hennar.

Stjórn félagsins leitaði eftir því við félagsmenn í febrúarmánuði, að þeir kæmu á framfæri við hana tillögu um val á slíkum fulltrúa. Að því búnu fóru formaður félagsins og ritari þess á leit við Kristínu Höllu Jónsdóttur, sem á sæti með þeim í stjórn félagsins, að hún tæki að sér starf slíks fulltrúa, og varð hún við þeirri beiðni. Alþjóðanefndinni var síðan tilkynnt um þá tilnefningu stjórnarinnar og er þess þá vænzt, að ekki standi lengur á því, að félaginu berist upplýsingar um starf þessarar nefndar.

Stærðfræðiverðlaun á stúdentsprófi

Að venju veitti Íslenzka stærðfræðafélagið nokkrum þeirra stúdenta, sem brautskráðust nú í vor, sérstaka viðurkenningu fyrir ágætan námsárangur í stærðfræði á stúdentsprófi. Var þeim öllum afhent bók að gjöf með áritaðri staðfestingu á verðlaununum.

Þeir nýstúdentar, sem hlutu verðlaun að þessu sinni, eru

Baldur Steingrímsson, Menntaskólanum í Reykjavík,
Elísabet Gunnlaugsdóttir, Menntaskólanum við Hamrahlíð,
Garðar Þorvarðsson, Menntaskólanum við Sund,
Gunnar Valur Gunnarsson, Fjölbrautaskóla Suðurlands,
Jón Ingi Ingimundarson, Verzlunarskóla Íslands,
Stefán Jónsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð og
Þórarinn Sv. Arnarson, Menntaskólanum í Kópavogi.

Til að standa straum af kostnaði við kaup á verðlaunabókum var nú í vor leitað til þriggja verkfræðistofa um fjárstuðning, og veittu þær fúslega ríflegan styrk, sem mun væntanlega endast til verðlaunaveitinga í tvö ár. Fyrirtækin, sem veittu styrkinn, eru

Almenna verkfræðistofan hf.,
Verkfræðistofan Fjarhitun hf. og
Verkfræðistofan Hnit hf.

Íslenzka stærðfræðafélagið þakkar þann stuðning, sem því hefur verið veittur í þessu skyni. Jafnframt eru hinum verðlaunuðu nýstúdentum færðar óskir um góðan árangur í því námi, sem framundan er.

Ragnar Sigurðsson:

MITTAG-LEFFLER-STOFNUNIN Í STOKKHÓLMI

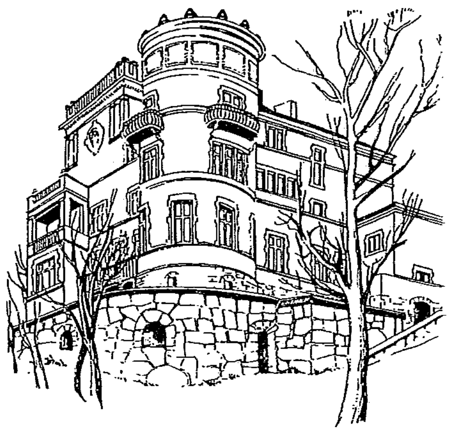
Síðastliðinn vetur var Íslendingum boðið að gerast aðilar að *Mittag-Leffler-stofnuninni* í Stokkhólmi, en hún er rannsóknarstofnun í stærðfræði, sem heyrir undir Konunglegu sænsku vísindaakademíuna með þátttöku Dana, Norðmanna og Finna. Á síðasta aðalfundi Íslenska stærðfræðafélagsins var ákveðið að þiggja þetta boð og jafnframt var Sigurður Helgason kjörinn til að sitja í stjórn stofnunarinnar.

Í þessari grein ætla ég að kynna starfsemi stofnunarinnar fyrir lesendum *Fréttabréfs*, en ég starfað þar nokkra mánuði veturinn 1987–88.

Saga stofnunarinnar

Ekki er hægt að byrja þessa kynningu öðruvísi en að rekja lítillega æviferil Gösta Mittag-Lefflers. Hann fæddist í Stokkhólmi árið 1846 og lagði stund á stærðfræði við Uppsalaháskóla. Hann hlaut doktorsgráðu þar 1872 fyrir ritgerð um fáguð föll. Það svið stærðfræðinnar var honum alltaf hugleiknast. Það sem hafði mest áhrif á þroska Mittag-Lefflers sem stærðfræðings, var styrkur sem hann fékk og gerði honum kleift að stunda nám í París og Berlín á árunum 1873–76. Þá kynntist hann stærðfræðingum eins og Hermite og Poincaré í Frakklandi og Weierstraß í Þýskalandi. Eftir dvölina í Berlín fékk hann prófessorsembætti í Helsinki. Hann dvaldist þar í nokkur ár en sneri þá aftur til Stokkhólms, þar sem hann varð prófessor við hinn nýstofnaða háskóla þar. Mittag-Leffler varð vel ágengt við að byggja upp stærðfræðideildina við Stokkhólmsháskóla og tókst honum að stofna til nýrrar prófessorsstöðu. Hana hlaut Sonja Kovalevsky og varð hún þar með fyrst kvenna í heimi til að verða prófessor. Mittag-Leffler hafði einnig marga góða stúdenta eins og Phragmén, Bendixson, von Koch og Fredholm. Hann hélt þeim alþjóðlegu samböndum, sem hann hafði aflað sér á námsárunum í Þýskalandi og Frakklandi og efldi þau enn frekar.

Mittag-Leffler var mikilvirkur fjármálamaður. Kona hans Signe var af ríku fólki komin frá Finnlandi, en hann komst áfram á eigin verðleikum. Hann hafði meginálhuga á fjárfestingum í tryggingarfélögum og vatnsorkuverum. Arðurinn af fjárfestingum hans gerði honum kleift að koma upp miklu stærðfræðibókasafni og að byggja stórt hús á Djursholm til



að hýsa það. Djursholm er íbúðahverfi skammt fyrir utan Stokkhólm og var það að mestu byggt kringum 1890. Mittag-Leffler var einn af eigendum fyrirtækisins, sem sá um uppbygginguna hverfisins og tryggði sjálfum sér stóra og fallega lóð, sem stofnunin á ennþá. Húsið var byggt og síðan stækkað í þremur áföngum kringum 1890, 1900 og 1910. Það voru kunnir sænskir arkitektar, Arborelius, Westman og Boberg, sem sáu um verkið. Enda þótt Mittag-Leffler byggi í húsinu, þá var ljóst frá upphafi að því var ætlað annað og meira hlutverk en að vera íbúðarhús. Þetta var þó ekki sagt berum orðum fyrr en þau Gösta og Signe Mittag-Leffler birtu erfðaskrá sína á sjötugsafmæli hans árið 1916. Með henni lögðu þau grunninn að rannsóknarstofnun, sem skyldi efla rannsóknir í hreinni stærðfræði á Norðurlöndum. Stofnunin skyldi eignast stærðfræðibókasafn þeirra og þar skyldi komið á fót rannsóknum í stærðfræði með nokkrum prófessorsstöðum og veittir skyldu styrkir til ungra stærðfræðinga. Fyrirmyndin var Pasteur-stofnunin í París.

Árið 1916 voru hugmyndirnar um rannsóknarstofnunina raunhæfar, að minnsta kosti var fjárhagur Mittag-Lefflers nógu góður til að hægt væri að hrinda þeim í framkvæmd. Árið 1922 varð hins vegar efnahagslegt hrun í Evrópu, sem tengdist hinni miklu kreppu í álfunni frá lokum heimsstyrjaldarinnar. Vegna hrunsins rambaði Mittag-Leffler á barmi gjaldþrots og þegar hann lést árið 1927, voru fjárfestingar hans í Þýskalandi að engu orðnar og fjárhagsstaða hans það slæm, að hugmyndir hans voru óframkvæmanlegar. Stjórn Mittag-Leffler-stofnunarinnar var þá skipuð þeim stærðfræðingum, sem sátu í vísindaakademíunni, og valdi hún Torsten Carleman sem fyrsta forstöðumann stofnunarinnar. Carleman var þá prófessor við Stokkhólmsháskóla en gerði forstöðumannsstarfið að aðalstarfi sínu. Hann bjó í húsi Mittag-Lefflers, þar sem bókasafninu var við haldið og fyrirlestrar haldnir með reglulegu millibili, en stofnunin var ekki starfrækt á þeim grundvelli sem upphaflega var hugsaður. Eftir að Carleman lést árið 1949 voru gerðar nokkrar tilraunir til að útnefna nýjan forstöðumann fyrir stofnunina, en þær runnu allar út í sandinn. Um tuttugu ára skeið var einungis bókasafnið starfrækt og notuðu það örfáir stærðfræðingar í Stokkhólmi og nágrenni. Litu meðlimir akademíunnar eftir því, fyrst F. Carlson og síðar Otto Frostmann.

Núverandi fyrirkomulag

Árið 1969 tókst Lennart Carleson að gera hugmyndir Mittag-Lefflers að veruleika. Með fjárframlögum frá Wallenberg-stofnuninni og nokkrum tryggingarfélögum voru byggðar gestaíbúðir á lóðinni og aðalbyggingin var löguð svo að hægt væri að koma þar fyrir skrifstofum. Styrkur var fenginn frá rannsóknarráðum Svíþjóðar, Finnlands, Danmerkur og Noregs, og var þannig unnt að bjóða erlendum gestum til lengri dvalar og veita ungum stærðfræðingum styrki. Lennart Carleson var síðan forstöðumaður allt til ársins 1984. Árin 1978–81 og 1982–84 hafði hann sér til aðstoðar menn til að sjá um vísindalega hlið rekstursins; fyrra tímabilið var það Dan Laksov en hið síðara Peter Jones. Árin 1984–86 var Lars Hörmander forstöðumaður. Árið 1987 var ákveðið að forstöðumannsstaðan skyldi fyrst og fremst vera fjármálaleg stjórnunarstaða og að á hverju ári skyldi ráða nýja menn til að stjórna vísindalegu starfseminni. Dan Laksov prófessor við Verkfræðiháskólann í Stokkhólmi er forstöðumaður nú.

Lennart Carleson mótaði starfsemi Mittag-Leffler-stofnunarinnar, þegar hann tók við forstöðu hennar. Ákveðið var að á hverju háskólaári skyldi vísindalegu starfseminni einbeitt að ákveðnu afmörkuðu sérsviði stærðfræðinnar. Sérfræðingum á þessu sviði er síðan boðið í heimsókn í nokkurn tíma og styrkir eru auglýstir til umsóknar. Flestir styrkþeganna eru ungir stærðfræðingar frá Norðurlöndum, sem hafa nýlega lokið doktorsprófi eða eru að vinna að doktorsverkefnum. Gestirnir koma víðsvegar að úr heiminum og er dvalartími þeirra frá einni viku upp í allt starfsárið, en það stendur frá 1. september til 31. maí ár hvert. Eina formlega skipulagða starfsemi stofnunarinnar er málstofa eitt síðdegi í viku. Höfuðtilgangurinn er hins vegar að fá sérfræðinga og einnig þá sem skemmra eru komnir á viðkomandi rannsóknarsviði til að skiptast á hugmyndum.

Árin 1969–1992 hafa eftirfarandi sérsvið verið tekin fyrir:

1969–71	Harmónísk greining.
1971–72	Næstum hornræknar varpanir.
1972–73	Líkindafræði með hagnýtingum í eðlisfræði.
1973–74	Regluleikaverkefni á Dirichlet-rúmum.
1974–75	Dreifingarfræði, deildavirkjar og Fourier-heildavirkjar.
1975–76	Deildavirkjar.
1976–77	Ár tileinkað Arne Beurling.
1977–78	Fáguð talnafræði og harmónísk greining.
1978–79	Algebruleg rúmfræði og rúmfræði Banach-rúma.
1979–80	Algebruleg rúmfræði og virkjafræði.
1980–81	Víxlin algebra.
1981–82	Safneðlisfræði og dreifing í skammtafræði.
1982–83	Hardy-rúm.
1983–84	Ítrekunarverkefni í raunfalla- og tvinnfallagreiningu.
1984–86	Ólínulegar hlutafleiðujöfnur.
1986–87	Algebruleg rúmfræði.
1987–88	Tvinnfallagreining í mörgum breytistærðum.
1988–89	Virkjaalgebrur.
1989–90	Hýperbólsk rúmfræði og næstum hornræknar varpanir.
1990–91	Virkjafræði og tvinnfallagreining.
1991–92	Talningarfræði.

Til þess að gefa einhverja hugmynd um umsvif stofnunarinnar má nefna að veturinn 1987–88 var heildarfjöldi boðsgesta og styrkþega 78 manns. Stjórnendur voru þeir Christer Kiselman frá Uppsölum og John Erik Fornæss frá Princeton og auk þeirra tveggja, boðsgesta og styrkþega, sótti nokkur hópur sænskra stærðfræðinga frá Stokkhólmi og Uppsölum málstofuna. Ég dvaldist við stofnunina september- og októbermánuði 1987 og maímánuð 1988. Á þeim tíma telst mér til, að ég hafi hitt u.þ.b. 50 sérfræðinga í tvinnfallagreiningu.

Útgáfustarfsemi

Árið 1882 stofnaði Mittag-Leffler tímaritið *Acta Mathematica*. Það er alþjóðlegt stærðfræðitímarit og notaði hann sambönd þau sem hann aflaði sér á námsárunum í Þýskalandi og Frakklandi til þess að fá marga af fremstu stærðfræðingum álfunnar til þess að birta ritgerðir í tímaritinu. Sem dæmi ná nefna að í fyrsta bindinu eru ritgerðir eftir Poincaré, Fuchs, Goursat, Hermite og Picard.

Mittag-Leffler tókst að fá fjárhagslegan stuðning til útgáfunnar frá öllum ríkisstjórnum á Norðurlöndum og ekki spillti fyrir að Óskar II Svíakonungur var verndari tímaritsins. *Acta Mathematica* er enn gefið út af Mittag-Leffler stofnuninni. Núna koma út tvö bindi í árgangi, og er þetta eitt elsta og virðulegasta stærðfræðitímarit í heimi.

Auk *Acta Mathematica* gefur Mittag-Leffler-stofnunin út tímaritið *Arkiv för matematik*, sem sænska vísindaakademían setti á stofn árið 1953. Forveri þess var tímaritið *Arkiv för matematik, fysik och astronomi*, sem þá var skipt í þrjú tímarit. Eftir að Mittag-Leffler-stofnunin tók við útgáfunni árið 1970 hefur eitt bindi af því verið gefið út á ári.

Þegar Raunvísindastofnun Háskólans hóf starfsemi sína árið 1966, var tekin upp áskrift að *Acta Mathematica*. Árið 1988 gaf Mittag-Leffler-stofnunin Íslendingum þá árganga af *Acta* sem á vantaði, 85 árganga alls eða 115 bindi, og eigum við því nú bæði *Acta Mathematica* og *Arkiv för matematik* frá upphafi.

Húsnæði

Stofnunin á mjög gott bókasafn. Tímarit þess eru að hluta til fengin í skiptum fyrir þau rit, sem gefin eru út. Safn eldri bóka, sem Mittag-Leffler keypti sjálfur er sérlega vandað. Einnig er til mjög áhugavert bréfasafn Mittag-Lefflers, bæði hans eigin bréf og bréf frá stærðfræðingum, sem hann hafði samskipti við. Á lóð stofnunarinnar eru ellefu íbúðir ætlaðar gestum hennar. Þegar aðsóknin er mikil, eru fleiri íbúðir teknar á leigu í nálægum hverfum.

Umsóknir

Upplýsingar um umsóknir um styrki eru sendar til allra stærðfræðistofnana á Norðurlöndum upp úr áramótum ár hvert. Styrkirnir eru einkum ætlaðir stúdentum í doktorsnámi og þeim sem nýlega hafa lokið doktorsnámi. Umsóknarfrestur er til 1. apríl ár hvert.

Skúli Sigurðsson:

AFSTÆÐISKENNING, ALHEIMSKENNING OG VÍSINDIN Í GÖTTINGEN [1]

Árið 1918 þróaði stærðfræðingurinn Hermann Weyl frekar almennu afstæðiskenninguna, sem kennilegi eðlisfræðingurinn Albert Einstein hafði sett fram á árunum 1915–1916. Kenning Weyls gerði kleift að sameina kraftsvið þess tíma, rafsegulsvið og þyngdarsvið, en meira var í húfi. Í grein um stærðfræðilegan grundvöll hennar sagði Weyl:

> *Samkvæmt þessari kenningu* **ber allt raunverulegt í heiminum vitni um heimsfirðina**; *hin eðlisfræðilegu hugtök eru engin önnur en hin rúmfræðilegu. Eini munurinn á rúmfræði og eðlisfræði er sá, að rúmfræðin grundvallar almennt, hvað felst í firðarhugtökum, en það er hlutverk eðlisfræðinnar að ákvarða og rekja afleiðingar þess lögmáls, sem verður til þess, að hinn raunverulegi heimur sker sig úr öllum þeim fjórvíðu firðrúmum, sem eru hugsanleg samkvæmt rúmfræðinni.*

Weyl bætti við neðanmáls fullur sigurvissu, að hann væri *„nógu bíræfinn til að trúa því, að öll fyrirbrigði eðlisfræðinnar mætti leiða út frá einu einasta allsherjar heimslögmáli, sem væri eins einfalt stærðfræðilega og hugsast gæti.“* [2]

Sameiningarátak Weyls og samtíðarmanna hans var ekki einskorðað við kraftsviðin tvö. Með því átti einnig að sameina eðlisfræði og rúmfræði og finna allsherjarlögmál, sem útskýrði gerð efnisheimsins allt frá atómum til óravídda himingeimsins. Vísindamenn tengdir þýska háskólabænum Göttingen unnu ötullega að sameiningunni. Um miðja

---

[1] Greinin er byggð á erindi á sameiginlegum fundi Íslenzka stærðfræðafélagsins og Eðlisfræðifélags Íslands 10. október 1991. Höfundur dvelst árið 1992 sem styrkþegi Alexander-von-Humboldt-stofnunarinnar við háskólann í Göttingen. Hann þakkar Jóni Ragnari Stefánssyni og Þorsteini Vilhjálmssyni fyrir þá alúð, sem þeir lögðu við yfirferð greinarinnar.

[2] Hermann Weyl, *Reine Infinitesimalgeometrie*, birt 1918; endurpr. í Weyl, *Gesammelte Abhandlungen I–IV*, Springer-Verlag, 1968, 2. bindi, 1–28, tilvitnun á bls. 2 (leturbreyting þar).

öldina hafði dregið úr fylgi við hana. Þótt Weyl hefði túlkað hugmyndir sínar upp á nýtt frá sjónarhóli skammtafræðinnar, efaðist hann þá um ágæti sameiningarhugsjónarinnar, og uppgjör hans við fortíðina varpar skýru ljósi á það, sem torveldar oft sameiningu innan eðlisfræðinnar.

Hér á eftir verður rætt um sameiningarhugsjónina, dvínandi gengi hennar um miðja öldina og samfélag vísindamanna í Göttingen; einnig verður iðulega vikið að sambandi eðlisfræði og stærðfræði.

Vísindasamfélagið í Göttingen

Þrír menn settu öðrum fremur mark sitt á iðkun stærðfræði í Göttingen um aldamótin: Felix Klein skipulagði uppbyggingu vísindasamfélagsins, David Hilbert gaumgæfði undirstöður rúmfræðinnar, rannsakaði tegurjöfnur og leiðbeindi herskara af nemendum og Hermann Minkowski varpaði fram nýstárlegum hugmyndum um samband tíma og rúms.[3]

Felix Klein (1849–1925) taldi, að öld einstaklingsframtaksins í vísindum væri liðin: Viðfangsefnin væru orðin svo flókin að því, sem snillingar hefðu áður gert upp á eigin spýtur, þyrfti nú að sinna með samvinnu vísindamanna. Þess vegna lagði hann áherslu á, að menn úr ólíkum vísindagreinum skiptust á hugmyndum, að sterkum tengslum væri komið á fót milli raunvísinda, verkfræði og iðnaðar, og loks að stöðug fjármögnun rannsóknarstarfsins væri tryggð. Skoðanir hans höfðu umtalsverð áhrif á uppbyggingu samfélagsins í Göttingen og fundu hljómgrunn meðal forvígismanna Þýskalands, sem vildu auka hag keisararíkisins á sviði hernaðar, iðnaðar og mennta.[4]

Klein hvatti einnig stærðfræðinga til að fylgjast vel með þróun eðlisfræðinnar, því að nýjar hugmyndir þaðan tryggðu, að fjörkraftur stærðfræðinnar þyrri ekki. Þannig andæfði hann áherslunni á hreina stærðfræði í Berlín, en þar var hin háborg þýskrar stærðfræði um þessar

[3] David E. Rowe, *Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition*, Osiris 5 (1989), 186–213. Einnig er bent á bækur Constance Reid um David Hilbert og Richard Courant.

[4] Herbert Mehrtens, *Moderne, Sprache, Mathematik: Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Suhrkamp, 1990, 327–401.

mundir. Það er því ekki að undra, að svo margir þeirra, sem námu stærðfræði í Göttingen upp úr aldamótum, heilluðust af eðlisfræði.

Þótt snillingar á borð við Gauss eða Newton heyrðu nú sögunni til að mati Kleins, var vísindastarf nútímans orðið það flókið, að snillingurinn kom fram á ný af fullum krafti. En gagnstætt því, sem áður var, þegar hann vann úr hugmyndum sínum einn og óstuddur, þarfnaðist hann nú mergðar nemenda, lærisveina og samstarfsmanna til að þróa hugmyndirnar.

David Hilbert (1862–1943) var nútímasnillingur, sem laðaði nemendur að sér með vísindaafrekum og persónutöfrum. Hermann Weyl (1885–1955) var einn þeirra og lét hann þau orð falla, að vegna sannfæringarkrafts Hilberts hefðu nemendur hans lært að taka ábendingar hans alvarlega og treysta því, að þær bæru ríkulegan ávöxt. Það skipti auk þess sköpum, að hann var vísindamaður af lífi og sál og hafði því ekki einungis burði til að kenna hin nauðsynlegu vísindalegu vinnubrögð heldur einnig til að vera andlegur leiðtogi.[5]

Weyl fannst, að persónuleiki Hilberts kæmi vel í ljós í minningarræðu hans um Hermann Minkowski (1864–1909). Vísindin, sem voru þeim báðum kærust, höfðu bundið þá nánum böndum; stærðfræðin hafði birst þeim eins og garður í blóma, þar sem þeir gátu rölt áreynslulaust eftir alfaraleiðum og horft í kringum sig að vild, sérstaklega í fylgd með samrýndum félaga. En þeim fannst líka gaman að leita að huldustígum, þar sem oft blasti við óvænt og fallegt útsýni. Þegar þeir sýndu það hvor öðrum, var gleði þeirra fullkomin.[6]

Weyl sagðist vitna til þessara ummæla Hilberts ekki einungis til að minnast óvenju djúprar og gróskumikillar vináttu, sem reist var á sameiginlegum vísindaáhuga, heldur líka, þar sem honum fannst, *„að í þeim endurómuðu þeir fögru tónar, sem „rottufangarinn“ Hilbert kallaði fram á flautu sína, þegar hann seiddi ótal rottur ofan í hyldjúpt fljót stærð-*

[5] Hermann Weyl, *Obituary: David Hilbert 1862–1943*, birt 1944; endurpr. í Weyl, *Gesammelte Abhandlungen I–IV*, Springer-Verlag, 1968, 4. bindi, 121–129, ummæli á bls. 128.

[6] David Hilbert, *Hermann Minkowski*, birt 1909; endurpr. í Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen I–III*, Springer-Verlag, 1935, 3. bindi, 339–364, ummæli á bls. 363.

fræðinnar.“[7]

Þótt hrifningin á Hilbert væri efa blandin, mat Weyl heimssýn hans mikils: bjartsýnina, ástríðuna og trúna á gildi vísindanna. Í þessari trú fólst það, að gildi stærðfræðinnar ykist vegna þess, að unnt væri að skilja gerð efnisheimsins stærðfræðilega. Hilbert breytti í samræmi við þetta og á síðari hluta starfsævinnar sinnti hann rannsóknum í eðlisfræði af kappi. Ekki hvað síst vildi hann koma kenningum eðlisfræðinnar á frumsenduform og vinna að sameiningu. Einnig taldi hann þýðingarmikið fyrir stærðfræðinga að glíma við vandamál, sem ættu upptök innan eðlisfræðinnar, og varðveita þannig tengslin við uppruna sinn.

Minkowski tendraði áhuga Hilberts á eðlisfræðinni. Þeir höfðu kynnst á námsárunum í Königsberg. Leiðir þeirra lágu aftur saman, þegar Minkowski kom til Göttingen upp úr aldamótum; þá hafði hann m. a. starfað hjá eðlisfræðingnum Heinrich Hertz, sem er þekktur fyrir rannsóknir á rafsegulfræði Maxwells. Í málstofu þeirra Hilberts í stærðfræðilegri eðlisfræði var glímt við rafsegulfræði og reynt að skilja eðli rafeindarinnar, sem þá var nýuppgötvuð. Rannsóknir Minkowskis og samtímamanna hans á þessu sviði urðu hvatinn að erindi um rúm og tíma, sem hann hélt í Köln árið 1908. Þar komst Minkowski svo að orði í upphafi:

> *Þær hugmyndir um rúm og tíma, sem ég kem á framfæri við ykkur, spretta úr jarðvegi tilraunaeðlisfræði. Í því er styrkur þeirra fólginn. Boðskapur þeirra er róttækur. Upp frá þessari stundu munu rúm út af fyrir sig og tími út af fyrir sig verða að einberum skuggum, og einungis eins konar samruni þeirra beggja mun varðveita sjálfstæði sitt.*[8]

Hugmyndir Minkowskis um fjórvítt tímarúm skópu hinni takmörkuðu afstæðiskenningu Einsteins frá árinu 1905 nýjan búning og juku vinsældir hennar í Þýskalandi; ekki skaðaði að hér mátti greina guðlegan samhljóm

[7] Hermann Weyl, *David Hilbert and His Mathematical Work*, birt 1944; endurpr. í Weyl, *Gesammelte Abhandlungen I–IV*, Springer-Verlag, 1968, 4. bindi, 130–172, tilvitnun á bls. 132.

[8] Hermann Minkowski, *Raum und Zeit*, birt 1909; endurpr. í Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen I–II*, Chelsea, 1967, 2. bindi, 431–444; ensk þýðing í H. A. Lorentz o.fl., *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, 73–91.

eðlisfræði og stærðfræði.[9]

Sameiningarátak

Einstein og Hilbert uppgötvuðu sviðsjöfnur almennu afstæðiskenningarinnar samtímis haustið 1915. Hilbert fann jöfnurnar með aðferðum hnikareiknings og hélt auk þess ranglega, að rafsegulsvið mætti rekja til þyngdarsviðs; þar með taldi hann, að skref væri stigið í sameiningarátt.[10] Hilbert vildi einnig tengja eðlisfræði og stærðfræði nánum böndum. Þar með væri gerlegt að svara því, *„hvort og í hvaða skilningi evklíðsk rúmfræði haldi líka gildi sínu í hinum raunverulega heimi, en stærðfræðin segir okkur það eitt, að í henni eru engar rökfræðilegar mótsagnir.“* Nýja eðlisfræðin gekk ekki út frá ákveðinni rúmfræði til að finna raunveruleg lögmál eðlisfræðinnar. Þess í stað kallaði almenna afstæðiskenningin lögmál rúmfræði og eðlisfræði fram í einu höggi með reglu Hamiltons, hornsteininum í kenningasmíði Hilberts:

> *Evklíðsk rúmfræði er* **framandi fjarhrifalögmál séð frá nútíma eðlisfræði:** *Um leið og afstæðiskenningin afneitar evklíðskri rúmfræði sem almennri forsendu í eðlisfræði boðar hún þvert á móti, að rúmfræði og eðlisfræði séu sama eðlis og hvíli sem* **ein** *vísindagrein á sameiginlegum grunni.*[11]

Hilbert var ekki einn um það í Göttingen að heillast af almennu afstæðiskenningunni. Þótt Klein væri sestur í helgan stein, lifnaði nú yfir

---

[9] Lewis Pyenson, *Relativity in Late Wilhelmian Germany: The Appeal to a Preestablished Harmony between Mathematics and Physics*, Archive for History of Exact Sciences **27** (1982), 137–155; endurpr. í Pyenson, *The Young Einstein: The Advent of Relativity*, Adam Hilger, 1985.

[10] Abraham Pais, *„Subtle is the Lord ... “: The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford Univ. Press, 1982, 256–261 og 274–276. Sjá ennfremur Vladimir P. Vizgin, *Einstein, Hilbert, and Weyl: The Genesis of the Geometrical Unified Field Theory Program*, birt í Don Howard og John Stachel (ritstj.), *Einstein and the History of General Relativity*, Birkhäuser, 1989, 300–314.

[11] David Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, birt 1924 (erindi haldin 1915 og 1916); endurpr. í Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen I–III*, Springer-Verlag, 1935, 3. bindi, 258–289, tilvitnun á bls. 278 (leturbreytingar þar).

honum. Hann hélt fyrirlestra um kenningu Einsteins og á prenti fjallaði hann um kenningu Hilberts um undirstöður eðlisfræðinnar, heimsfræði og varðveislulögmál eðlisfræðinnar (sbr. setningar Emmy Noether), og loks gafst honum kærkomið tækifæri til að endurvekja gamlar hugmyndir í rúmfræði og grúpufræði, sem hann setti fram í stefnuyfirlýsingunni frá Erlangen árið 1872.

Albert Einstein (1879–1955) var himinlifandi yfir athyglinni, þótt hann vissi, að kenningin yrði ekki eingöngu skilin sem þyngdarsviðskenning í Göttingen: henni yrði beitt í rannsóknum á gerð efnisheimsins og einnig yrði hún túlkuð stærðfræðilega að hætti heimamanna. Þegar dró nær jólum árið 1916, sagði hann í bréfi til Weyls, *„að svo virðist sem andleg geta þeirra, sem styðja kenninguna, sé að meðaltali langtum meiri en andstæðinganna. Þetta er nokkurs konar hlutlægur vitnisburður um það, hversu eðlileg kenningin er og skynsamleg.“*[12]

Þegar þetta var ritað, var Weyl nýfarinn að rannsaka almennu afstæðiskenninguna. Hann hafði gegnt herþjónustu í Þýskalandi en snúið aftur til starfa við Tækniháskólann í Zürich árið 1916. Þar reyndi hann að gleyma hörmungum stríðsins og leitaði hugsvölunar fjarri heimsins glaumi. Hann lét svo ummælt í erindi árið 1946:

> *Hugur minn sem stærðfræðings var tómur sem hugur uppgjafahermanns. Ég vissi vart, hvað ég átti að taka mér fyrir hendur. Ég byrjaði á því að rannsaka algebrulega fleti, en áður en mér hafði orðið mikið ágengt barst mér í hendur ritgerð Einsteins um undirstöðu almennu afstæðiskenningarinnar. Hún kveikti í mér eld.*[13]

Fyrsti afraksturinn var grein um almennu afstæðiskenninguna í hinu virta eðlisfræðitímariti *Annalen der Physik*. Max Planck, ritstjóra kennilega hlutans, fannst grein Weyls of stærðfræðileg en vildi samt birta hana, þar sem hún væri um þyngdarsvið. Planck fannst hún keimlík öðrum

[12] Albert Einstein til Hermanns Weyl, Berlín, 23. nóvember 1916; bréfasafn Weyls HS 91: 536, bókasafni Tækniháskólans í Zürich (hér eftir *ETH Zürich*).

[13] Hermann Weyl, erindi á 200 ára afmæli Princeton-háskóla 1946; bréfasafn Weyls HS 91a: 18, ETH Zürich. Ritgerð Einsteins, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, er birt í enskri þýðingu í Lorentz o.fl., *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, 109–164.

tilraunum, þar sem reynt var að leiða öll fyrirbrigði eðlisfræðinnar út frá einni alheimsjöfnu—hér reglu Hamiltons. Hann taldi ólíklegt, að unnt væri að sannreyna með tilraunum forsagnir kenningarinnar varðandi atómfræði, sem Weyl hafði að vísu sett fram af varfærni.[14]

Vorið 1918 birtist svo bókin *Raum, Zeit, Materie,* sem byggð var á fyrirlestrum frá sumrinu áður.[15] Góður vinur Einsteins í Zürich, Michele Besso að nafni, hafði hvatt Weyl til að koma henni á framfæri. Bókin um rúm, tíma og efni var fyrsta viðamikla bókin um almennu afstæðiskenninguna. Weyl sendi Einstein bókina í prófórk, en lét þess jafnframt getið, að hann ynni að frekari útfærslu á afstæðiskenningunni og efniskenningu Gustavs Mie: *„Mér virðist hafa tekist að sýna, að rafmagn og þyngdarkraftur spretti af sömu rótum.“* Einstein lagði grein Weyls þessa efnis fyrir fund hjá Vísindafélaginu í Berlín þá um vorið.[16]

Í grein Weyls um rafmagn og þyngdarkraft var sett fram hugmyndarík nýsköpun í rúmfræði. Þar leit líka dagsins ljós óbreytanleiki kvörðunar, sem bættist við óbreytanleika almennra hnitafærslna, sem gegndu lykilhlutverki í rúmfræði Riemanns. Þegar Weyl birtist á sjónarsviðinu, var vitað, að vigur varðveitti yfirleitt ekki stefnu sína, ef hann væri fluttur samhliða í heilan hring eftir lokuðum ferli, nema rúmfræðin væri evklíðsk. Stefnuflutningur var háður flatarmáli og sveigju svæðisins innan ferilsins og almennt ekki tegranlegur. Hins vegar var lengdarflutningur tegranlegur í rúmfræði Riemanns. Weyl gagnrýndi þetta ósamræmi og bera aðfinnslur hans keim af skoðunum Hilberts á óeðlilegum fjarhrifum evklíðskrar rúmfræði. Honum fannst, að *„í sannri nándarrúmfræði væri einungis gerlegt að flytja lengd á milli punkta, sem eru óendanlega nálægt hvor öðrum.“*[17]

Í rúmfræði Weyls var lengd mælikvarða ákveðin eins og í rúmfræði

---

[14] Christa Jungnickel og Russell McCormmach, *Intellectual Mastery of Nature: Theoretical Physics from Ohm to Einstein. II: The Now Mighty Theoretical Physics 1870–1925,* Univ. of Chicago Press, 1986, 332–333.

[15] Hermann Weyl, *Space-Time-Matter,* Dover, 1952; þýðing á 4. útgáfunni frá 1921.

[16] Hermann Weyl til Alberts Einstein, Zürich, 1. mars 1918; bréfasafn Weyls HS 91: 538a, ETH Zürich.

[17] Hermann Weyl, *Gravitation und Elektrizität,* birt 1918; endurpr. í Weyl, *Gesammelte Abhandlungen I–IV,* Springer-Verlag, 1968, 2. bindi, 29–42, tilvitnun á bls. 30;

Riemanns sem

$$\sqrt{\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}dx^i dx^k}. \qquad (*)$$

Lengd mælikvarða í nálægum punkti var ekki lengur l, heldur varð að margfalda hana með

$$1 + d\phi, \quad \text{þar sem} \quad d\phi = \sum_{i=1}^{4} \phi_i dx^i.$$

Þetta lýsti því, að rúmið var samtengt og fjarhrifum hafði endanlega verið úthýst. Þar með taldi Weyl sig hafa leitt til lykta innan rúmfræðinnar þá þróun, sem Riemann hafði átt upptökin að, eins og sviðskenningar Maxwells og Einsteins höfðu leyst af hólmi fjarhrifskenningar, sem líktust þyngdarkrafti Newtons (sbr. $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$). Væri mælistikan flutt til á milli punktanna P og Q, varð lengd hennar að lokum

$$l \exp\left(\int_P^Q d\phi\right). \qquad (**)$$

Lengdarflutningur var tegranlegur, ef blandaðar afleiður ϕ_i voru jafngildar; í því tilviki var unnt með umkvörðun að láta ϕ_i hverfa og endurheimta rúmfræði Riemanns. Að öðrum kosti sýndi Weyl með óbreytanleika kvörðunar, að ϕ_i mætti túlka sem fjórvigurmætti rafsegulfræðinnar, og þar sem g_{ik} voru þyngdarsviðsmættin samkvæmt almennu afstæðiskenningunni, spruttu rafsegulsvið og þyngdarsvið af tvöföldum rótum heimsfirðarinnar í rúmfræði hans. Því var unnt að líta svo á, að í rúmfræði Weyls væru bæði kraftsviðin fyrir hendi, en einungis þyngdarsvið í rúmfræði Riemanns og hvorugt kraftsviðanna í rúmfræði Evklíðs.[18]

---

ensk þýðing í Lorentz o.fl., *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, 199–216.

[18] Wolfgang Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, 1958, 192–202; hér eru kenningu Weyls gerð ítarleg skil. Þetta rit kom fyrst út árið 1921 undir heitinu *Relativitätstheorie* undir ritstjórn Arnolds Sommerfeld í safnritinu *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, 5. b., 2. hluti, 539–775.

Einstein hreifst af fegurðinni í hugmyndum Weyls en taldi, að þær brytu í bága við veruleikann. Hann sýndi með snjallri tilraun, sem hann hugsaði sér gerða, að samkvæmt kenningu Weyls myndi lengd mælikvarða (tímarúmsfrymis), sem væri notaður til tímamælinga, breytast við það að vera fluttur til í rafsegulsviði (sbr. (**)). Tíðni atómúra yrði því háð forsögu þeirra, þ.e. eftir hvaða ferli þau hefðu færst til í rafsegulsviði, og því óskiljanlegt, af hverju tíðni litrófslína frumefnanna væri stöðug og litróf tveggja nálægra atóma sömu gerðar alltaf eins.[19] Weyl tók gagnrýni Einsteins alvarlega og svaraði honum því til, að rúmfræði sín væri sönn nándarrúmfræði og að orsakir þess, að Riemann hefði ekki sinnt henni, væru sögulegar en ekki hlutlægar: *„Ef þú hefur á réttu að standa varðandi gerð heimsins, þykir mér fyrir því að benda algóðum Guði á, að hann sé ekki samkvæmur sjálfum sér stærðfræðilega.“*[20]
Eðlisfræðingar almennt tóku undir gagnrýni Einsteins. Einnig var sameinuð sviðskenning Weyls gagnrýnd fyrir að vera of flókin og gefa ekki nægjanlega mikið í aðra hönd í útreikningum. Heimsfræði var með í spilinu, þar sem kenningin benti til sambands milli stærðar rafeindarinnar og alheimsins. Þetta þótti samtímamönnum Weyls ótrúlegt.

Uppgjör Weyls við sameiningarhugsjónina

Að Hilbert látnum hampaði Weyl afrekum hans í hreinni stærðfræði en gerði lítið úr árangri hans við eðlisfræðirannsóknir og sagði, að það væri varla hægt að bera uppskeruna saman við afrek hans í hreinni stærðfræði.

> *Sá aragrúi af tilraunaniðurstöðum, sem eðlisfræðingurinn þarf að taka til greina, er svo flókinn og í svo örum vexti og innbyrðis vægi þeirra er svo hvikult, að þar er ekki fótfesta fyrir aðferð frumsendunnar nema í þeim greinum eðlisfræðinnar, sem eru fyrir löngu fastar í sessi. Menn á borð við Einstein eða Niels Bohr fálma í myrkri eftir hugmyndum sínum um almennu afstæðiskenninguna eða gerð atómanna með annars konar reynslu og hugmyndaflug í veganesti*

[19] Albert Einstein til Hermanns Weyl, Berlín, 15. apríl 1918; bréfasafn Weyls HS 91: 541, ETH Zürich; og Wolfgang Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, 1958, 195–196.

[20] Hermann Weyl til Alberts Einstein, Zürich, 19. maí 1918; bréfasafn Weyls HS 91: 545a, ETH Zürich.

en stærðfræðingar, þótt stærðfræðin komi án alls efa mjög við sögu. Þess vegna urðu hin miklu áform Hilberts á sviði eðlisfræðinnar aldrei að veruleika.

Eftir að hafa rætt, hvernig Hilbert beitti tegurjöfnum í varmafræði og safneðlisfræði, vék Weyl að rannsóknum Hilberts á almennu afstæðiskenningunni og sameinuðum sviðskenningum: *„Vonir Hilberts og hans manna voru miklar á þessum tíma: draumurinn um allsherjarlögmál, sem útskýrði bæði gerð alheimsins og kjarna frumefnanna, virtist vera að rætast.“* En nú á fimmta áratugnum fannst honum, að sameinuð sviðskenning yrði að fjalla um efnisbylgjur auk rafsegulsviðs og þyngdarsviðs. Kenningin gæti ekki verið *„einföld útvíkkun á sígildri þyngdarsviðskenningu Einsteins.“*[21] Það er athyglisvert, að Weyl minnist ekki einu orði á samband eðlisfræði og rúmfræði, sem honum hafði áður legið svo á hjarta.

Orð Weyls lýsa vel muninum á honum sjálfum og Hilbert, sem kærði sig kollóttan, þótt hann væri gagnrýndur af eðlisfræðingum. Hilbert lagði stund á eðlisfræði frekar stærðfræðinnar vegna auk þess sem hann svalaði frumspekiþrá sinni. Þótt frumspeki væri Weyl ekki fjarri skapi, sóttist hann aftur á móti eftir viðurkenningu sem eðlisfræðingur og tók gagnrýni Einsteins því nærri sér. Í eftirmælunum um Hilbert var hann fullur sjálfsásökunar og virtist velta því fyrir sér, hvers vegna hann hefði trúað því í lok fyrri heimsstyrjaldarinnar, að til væri víðtækt allsherjarlögmál, sem útskýrði uppbyggingu bæði alheimsins og atóma. Hann hafði verið stoltur af sköpunarverki sínu, en einnig virðist hann hafa verið ölvaður af trú á það, að nú væri endanleg kenning óháð stað og stund í sjónmáli; staðleysubjartsýni sakaði varla á þessum stríðshrjáðu tímum.

Áratug síðar var Weyl farinn að endurmeta hugmyndir sínar um sameiningu. Í bók um grúpufræði og skammtafræði ræddi hann, hvernig hugmyndin um óbreytanleika kvörðunar kæmi að notum í nýju eðlisfræðinni: Hún tengdi rafsegulsvið og bylgjufall skammtafræðinnar, en enn væri óljóst, hvað gera ætti við þyngdarsvið samkvæmt almennu af-

[21] Hermann Weyl, *David Hilbert and His Mathematical Work*, birt 1944; endurpr. í Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen I–IV*, Springer-Verlag, 1968, 4. bindi, 130–172, tilvitnanir á bls. 171–172.

stæðiskenningunni.[22]

Kennilegi eðlisfræðingurinn Fritz London (1900–1954) hafði komist að sömu niðurstöðu nokkru fyrr. Hann benti á, að jafngildi tregðumassa og þyngdarmassa hefði leitt Einstein til rúmfræðilegrar túlkunar á þyngdarsviðskenningunni. Í kenningum um rafsegulfræði var hins vegar engin svona staðreynd þekkt: Það var ástæðulaust að ímynda sér víðtæk áhrif rafsegulsviðs á svonefnda stjarfa mælikvarða notaða til tímamælinga. Eins og Einstein hafði bent á mælti stöðugleiki litrófslína atóma þvert á móti gegn svo víðtækum áhrifum rafsegulsviðs. London fannst eftirtektarverð hin óvenjulega skýra frumspekilega sannfæring Weyls, sem hafði gert honum kleift að trúa því, þrátt fyrir þennan mótbyr, að *„náttúran léti sér ekki happ úr hendi sleppa, þar sem væri þetta fallega tilboð rúmfræðinnar.“* [23]

Í róttækri efniskenningu, sem byggði á samfelldni rúmsins eins og bylgjuaflfræði Erwins Schrödinger frá árinu 1926, skorti öll föst viðmið til að smíða mælikvarða — firðin í rúmfræði Riemanns var ónothæf (sbr. (*)). Með breytanleika kvörðunareiningarinnar í rúmfræði Weyls leystist þessi þraut. London bætti við, að nú hefði fundist hluturinn, sem hegðaði sér eins og kvarðinn í rúmfræði Weyls. Það var tvinngild sveiflustærð de Broglie-bylgjunnar; hún varð í rafsegulsviði fyrir þeim áhrifum, sem Weyl taldi, að mælikvarðarnir yrðu fyrir, en þar sem *„áhrifin svifu í lausu lofti í eðlisfræði þessa tíma, neyddist hann til að tjóðra þau niður frumspekilega.“*

Samtímis því sem Weyl þróaði rúmfræði Riemanns á frjóan hátt í nándarrúmfræði líkt og áður er vikið að, túlkaði hann niðurstöðurnar í samræmi við eðlisfræði síns tíma; þess vegna taldi hann sig hafa fléttað saman rafsegulsvið og þyngdarsvið. Þegar það reyndist miklum erfiðleikum bundið, leitaði hann skjóls í frumspeki og fagurfræði. Þegar skammtafræðin hafði fengið á sig endanlega mynd á þriðja áratugnum, tók Weyl upp þráðinn, þar sem frá var horfið. Hann endurmat merkingu óbreytanleika kvörðunar og gaf auk þess fyrri rúmfræðitúlkun eðlisfræð-

[22] Hermann Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel, 1928, 88; og Wolfgang Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, 1958, 223–224.

[23] Fritz London, *Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl*, Zeitschrift für Physik **42** (1927), 375–389, tilvitnun á bls. 377; næsta tilvitnun þar á bls. 380.

innar upp á bátinn. Óbreytanleiki kvörðunar hefur í þessari breyttu mynd reynst mikilvægur í öreindafræðum og sameinuðum sviðskenningum á síðari árum.[24]

Á fimmta áratug aldarinnar langaði Fanny Minkowski til að heiðra minningu bróður síns og vildi fá Weyl í lið með sér. Thomas Mann ætlaði að vera henni innan handar við skriftir. Weyl leist illa á þessa fyrirætlun og dró úr því, að hann hefði staðið bróður hennar nærri; hann lagði áherslu á, að merkasta framlag Hermanns Minkowski væri á sviði talnafræði, í rúmfræði talna. Þar héldu ungir stærðfræðingar áfram starfi bróður hennar og það væru fegurstu launin, sem vísindamanni gætu hlotnast. Enda þótt Minkowski hefði unnið með Hertz og hefði undir lok ævinnar unnið að afstæðiskenningunni, stóð hann fjær eðlisfræði en stærðfræði. Weyl bætti við:

> *Bróðir þinn kom takmörkuðu kenningunni í viðeigandi stærðfræðibúning. Þetta bar efalaust ríkulegan ávöxt; nú myndi enginn kunnáttumaður samt neita því, að hann reiddi of hátt til höggs í fyrirlestrinum í Köln árið 1908. Það er freistandi fyrir þann, sem vinnur strandhögg á framandi fræðasviði, sem hann hefur ekki heildarsýn yfir, að ofmetnast við það að ná valdi á nýju viðfangsefni innan þess. Fyrirlesturinn líður einnig fyrir það, að hann vildi festa í sessi eða gera ódauðlegt breytingaskeið í eðlisfræðinni. ... Afstaða Einsteins var frá upphafi miklu frjálsari.*[25]

Weyl taldi sem sé, að Minkowski hefði skotið yfir markið í fyrirlestrinum í Köln. Weyl hafði ekki lengur brennandi áhuga á eðlisfræði og frumspeki og því undraðist hann nú, af hverju heimssýn Minkowskis hefði hrifið hann svo mikið á árum áður, að hann hefði haldið, að samruni eðlisfræði og rúmfræði væri jafnvel á næstu grösum.

Lokaorð

Það er fróðlegt að virða fyrir sér, hvernig Weyl hætti að trúa á mátt allsherjarkenninga, sem byggð væri á rúmfræði og almennu afstæðis-

[24] Chen Ning Yang, *Hermann Weyl's Contributions to Physics*, birt í K. Chandrasekharan (ritstj.), *Hermann Weyl 1885–1985*, Springer-Verlag, 1986, 7–21.

[25] Hermann Weyl til Fanny Minkowski, Princeton [?], 24. mars 1947; bréfasafn Weyls HS 91: 378, ETH Zürich.

kenningunni. Hann hafði sætt sig við það, að heimurinn væri flóknari en talið var við upphaf aldarinnar. Skammtafræði og kjarneðlisfræði boðuðu nýja tíma innan eðlisfræðinnar og voru gerólíkar þyngdarsviðsfræðum, þar sem lítið var um tilraunaniðurstöður og því hugsanlegt að stunda rannsóknir með stærðfræðina að leiðarljósi. Weyl tók einnig hamskiptum eftir komuna til Bandaríkjanna árið 1933 á flótta undan nasistum. Eðlisfræði og frumspeki hvöttu hann ekki lengur til dáða og hann leitaði skjóls í hreinni stærðfræði.

Hugmyndir um sameiningu verður ætíð að skoða í ljósi vitneskju hvers tíma. Sameiningaráform steyta iðulega á skeri fjölbreytninnar. Tilraunaeðlisfræðingar á þessum tíma gerðu sér fyllilega ljóst, hversu óútreiknanleg náttúran var og flókin í eðli sínu, og þeir ásamt kennilegum eðlisfræðingum á borð við Sommerfeld grófu með starfi sínu sífellt undan hugmyndum manna eins og Weyls. Það þýðir samt ekki, að sameiningarsinnar hafi lagt árar í bát eins og *Saga tímans* eftir kennilega eðlisfræðinginn Stephen W. Hawking er til vitnis um.

RITFREGN

Meðal þeirra bóka, sem gefnar voru út fyrir síðustu jól, var *Grikkland ár og síð. Bók helguð tveggja alda afmæli Sveinbjarnar Egilssonar.* (Útg. Hið íslenzka bókmenntafélag, Reykjavík 1991.)

Því er vakin athygli á henni hér í *Fréttabréfi*, að meðal fjölmargra ritgerða þar um hvers kyns grísk málefni er greinin *Gullöld grískrar stærðfræði* eftir Guðmund Arnlaugsson (bls. 135–158). Hér er að finna einkar læsilega og alþýðlega framsetningu með sögulegu ívafi á ýmsum frumatriðum úr talnafræði og rúmfræði. Til viðbótar samfelldum efnisþræði í megintexta eru svo í nokkrum rammagreinum tekin til sérstakrar skoðunar efnisatriði svo sem regla Pýþagórasar og gullinsnið, fegurð heilla talna, hornalína fernings, platónsku margflötungarnir og keilusnið og í einni rammagrein er svo fjallað um það, hvernig fleygbogasneið er tæmd.

Við getum þess líka, að ritdómur eftir Skúla Sigurðsson um *Sögu tímans,* sem hann vísar einmitt til hér að ofan, birtist í vor í *Hugi, tímariti um heimspeki,* 3–4 (1990/1991), 112–117. Bókin er sem kunnugt er eitt lærdómsrita Bókmenntafélagsins og kom út í íslenzkri þýðingu Guðmundar Arnlaugssonar með inngangi eftir Lárus Thorlacius.

Sverrir Örn Þorvaldsson:

STÆRÐFRÆÐIKEPPNI FRAMHALDSSKÓLANEMA 1991–92

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema síðastliðinn vetur var með sama sniði og undanfarin ár. Fyrri hluti hennar fór fram 22. október í haust og var keppni þá á tveimur stigum, neðra stigi, sem ætlað var nemendum á fyrri tveimur árunum í framhaldsskóla, og efra stigi, sem ætlað var nemendum á seinni tveimur árunum. Alls tóku 419 nemendur úr tuttugu skólum þátt í keppninni, þar af 209 nemendur á efra stigi og 210 á neðra stigi keppninnar.

Seinni hluti keppninnar var úrslitakeppni og var hún haldin laugardaginn 4. apríl í Háskóla Íslands. Til hennar var boðið um tuttugu efstu keppendum á hvoru stigi í fyrri hlutanum, en af þeim mættu 32 til leiks. Dómnefnd ákvað að veita þremur hæstu keppendunum peningaverðlaun, en þeir voru Bjarni V. Halldórsson, nemandi í Menntaskólanum í Reykjavík, sem hlaut flest stig, Grétar Karlsson, nemandi í Menntaskólanum við Hamrahlíð, og Gunnar Valur Gunnarsson, nemandi í Fjölbrautaskóla Suðurlands á Selfossi.

Í framkvæmdanefnd keppninnar voru að þessu sinni Jón Kr. Arason, Robert Magnus og Sverrir Örn Þorvaldsson frá Íslenzka stærðfræðafélaginu og Eygló Guðmundsdóttir, Kristín Bjarnadóttir og Yngvi Pétursson frá Félagi raungreinakennara. Fyrirtækin Ístak hf. og Steypustöðin hf. báru sem fyrr allan kostnað af keppninni sjálfri og af verðlaunaveitingum.

Lokakeppnin 4. apríl 1992

Hér á eftir fara dæmin í lokakeppninni, en veittar voru fjórar klukkustundir til að leysa þau. Keppnin reyndist heldur þung.

1. dæmi. Látum $P(x)$ vera margliðu af stigi $n-1$ þannig að $P(k) = \frac{1}{k}$ fyrir $k = 1, 2, \ldots, n$. Finnið $P(n+1)$.

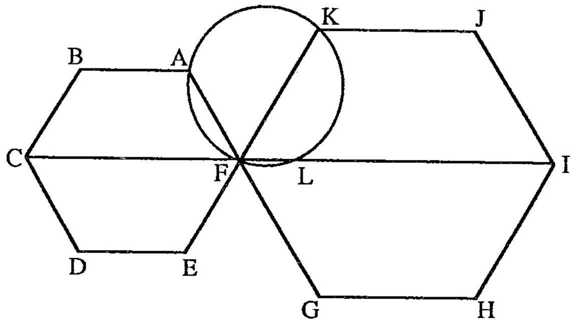
2. dæmi. Sýnið, að fyrir sérhverjar rauntölur $a, b, c, d > 0$ gildir

$$abcd\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\right) \geq a + b + c + d.$$

3. dæmi. Látum $ABCDEF$ og $FGHIJK$ vera misstóra reglulega sexhyrninga með nákvæmlega einn sameiginlegan punkt F og þannig að punktarnir C, F og I liggja á beinni línu (sjá mynd). Látum hringinn gegnum punktana A, F og K skera línuna CI í punkti L, þannig að $L \neq F$. Sýnið að:

(i) ALK er jafnhliða þríhyrningur.

(ii) L er miðpunktur striksins CI.



4. dæmi. Finnið öll föll $f(x)$ þannig að

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

fyrir allar rauntölur x.

5. dæmi. Í skóla nokkrum eru 1000 nemendur. Í skólanum er kenndur fjöldi tungumála. Hver nemandi lærir í mesta lagi fimm tungumál. Svo vill til, að í sérhverjum hópi þriggja nemenda er hægt að finna tvo, sem læra sama tungumálið. Sýnið, að hægt sé að finna 100 nemendur, sem læra allir sama tungumálið.

Norræna keppnin 8. apríl 1992

Tíu efstu keppendum í landskeppninni var svo boðið að taka þátt í **sjöttu norrænu stærðfræðikeppninni**, sem haldin var í skólum keppenda þann 8. apríl. Níu þeirra tóku þátt í henni, en alls voru 65 keppendur frá Íslandi, Noregi, Danmörku, Svíþjóð og Finnlandi. Beztum árangri Íslendinganna náði Daníel F. Guðbjartsson, sem lenti í 11.–12. sæti, en Grétar Karlsson og Arnaldur Gylfason voru í 14.–19. sæti. Jan Kristian Haugland, norskur piltur á nítjánda ári, hlaut flest stig, átján af tuttugu mögulegum. Hann var einnig efstur í fyrra, ásamt fleirum, en þá hlaut hann fulla stigagjöf. Þeir lesendur *Fréttabréfs,* sem lesa *Normat,* kannast kannski við piltinn, því í fyrra birtist eftir hann grein í því riti um löng frumtalnalaus bil á talnalínunni. Því má líka bæta við, að þremur árum áður birtist þar grein eftir Karl Egil Aubert, þar sem hann lýsti bréfaskiptum sínum um stærðfræðileg efni við Haugland, sem þá var 14 ára gamall!

Eftirfarandi dæmi voru lögð fyrir keppendur í norrænu keppninni og voru þeim ætlaðar fjórar klukkustundir til að leysa þau.

1. dæmi. Ákvarðið allar rauntölur x, y og z stærri en 1, sem uppfylla jöfnuna

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1} = 2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}\right).$$

2. dæmi. Látum n vera heila tölu stærri en 1 og látum $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vera ólíkar heilar tölur. Sýnið, að ekki er til m-ta stigs margliða, þar sem $0 < m < n$, sem hefur heiltölustuðla og hefur forystustuðul 1 og gengur upp í margliðuna

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)-1.$$

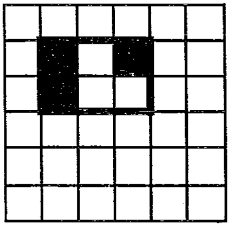
3. dæmi. Sýnið, að af öllum þríhyrningum, sem hafa innritaðan hring með geisla (radíus) 1, hafi jafnhliða þríhyrningurinn minnst *ummál.*

4. dæmi. Pétur er með marga ferningslaga kubba með hliðalengd 1, suma hvíta en aðra svarta. Gera má ráð fyrir, að hann sé með ótakmarkaðan fjölda af af hvorum lit. Hann vill raða þeim saman í ferning með hliðalengd n, sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

Hornkubbarnir í hvaða hlutrétthyrningi sem er í ferningnum hafa ekki allir sama lit.

Hversu stóran ferning getur Pétur myndað?

Aths. Myndin sýnir hugsanlega leið til að raða saman kubbunum ásamt hlutrétthyrningi ($n = 6$). Ekki má gera ráð fyrir, að myndin sýni ferning, sem uppfyllir skilyrðið.



Árangur keppenda bæði í landskeppninni og norrænu keppninni var síðan lagður til grundvallar, þegar lið Íslands var valið til þátttöku í 33. Ólympíuleikunum í stærðfræði, sem fara fram í Moskvu í júlí. Einnig varð að taka tillit til þess skilyrðis, að keppendur verða að vera innan við tvítugt, þegar til leikanna kemur. Að þessu sinni var ákveðið að senda þrjá keppendur utan, en þeir eru Alfreð Hauksson og Bjarni V. Halldórsson úr Menntaskólanum í Reykjavík og Daníel F. Guðbjartsson úr Fjölbrautaskóla Suðurnesja. Robert Magnus verður fulltrúi okkar í dómnefnd, en Sverrir Örn Þorvaldsson verður farastjóri.

NORRÆNA STÆRÐFRÆÐINGAÞINGIÐ Í LULEÅ

Tuttugusta og fyrsta norræna stærðfræðingaþingið var haldið í Luleå í Norðurbotni í Svíþjóð dagana 8.–12. júní sl. Tveir Íslendingar höfðu þegið boð um að vera meðal þeirra, sem fluttu aðalfyrirlestur, og voru það þeir Björn Birnir, sem flutti fyrirlestur, er nefndist *Nonexistence and existence of periodic solutions to nonlinear hyperbolic partial differential equations*, og Hermann Þórisson, en fyrirlestur hans nefndist *Coupling of stochastic processes*. Björn starfar við háskólann í Santa Barbara í Kaliforníu en Hermann við Raunvísindastofnun Háskólans.

Alls voru 112 þátttakendur skráðir á þinginu og voru Svíar auðvitað flestir. Fyrirhugað er, að fyrirlestrar á þinginu verði gefnir út, en ekki varð af slíkri útgáfu eftir 20. norræna stærðfræðingaþingið, sem haldið var í Þrándheimi fyrir fjórum árum.

Af hálfu finnskra stærðfræðinga var svo boðið til næsta norræna stærðfræðingaþings í Finnlandi að fjórum árum liðnum. Ekki liggur nánar fyrir, hvar það verður.

Jón Ragnar Stefánsson:

ÞRJÚ BRÉF FRÁ VILHJÁLMI Á NARFEYRI

Áður en fundur hófst í Íslenzka stærðfræðafélaginu 1. apríl sl. færði Guðmundur Arnlaugsson stjórn þess til varðveizlu ljósrit af þremur bréfum frá Vilhjálmi Ögmundssyni. Hann hafði þá nýverið fengið þau í hendur frá viðtakanda bréfanna, Gústaf Lárussyni, fyrrv. skólastjóra á Ísafirði, í því skyni, að efni þeirra yrði varðveitt. Gústaf var kennari á Ísafirði starfsævi sína alla og skólastjóri Gagnfræðaskólans þar um langt skeið, en hann er nú áttræður að aldri. Hann var mikill áhugamaður um stærðfræðileg efni og viðaði að sér bókum um þau. Hann hafði á sínum tíma haft spurnir af Vilhjálmi á Narfeyri og heimsótt hann og héldu þeir sambandi síðan eins og bréfin bera með sér.

Bréfin hafa að geyma verðmæta lýsingu á viðfangsefnum stærðfræðingsins á Narfeyri og veita lesandanum innsýn í hugarheim hans. Stjórn félagsins þykir því mikill fengur að þessum bréfum og er þakkar vert, að þeim skyldi hafa verið komið á framfæri við félagið.

Bréfin voru skrifuð á árunum 1960–64 og var Vilhjálmur þá á sjötugsaldri, en hann var fæddur 4. janúar 1897. Hann lézt 24. ágúst 1965.

Ekki verður hér gerð grein fyrir æviferli Vilhjálms Ögmundssonar svo óvenjulegur og merkur sem hann var, en ítarlega heimild um það efni er að finna í eftirmælum, sem Leifur Ásgeirsson ritaði eftir hann og birtust í *Tímanum* 31. ágúst 1965. Á fundi í Íslenzka stærðfræðafélaginu 13. marz 1951 flutti Brynjólfur Stefánsson erindi um stærðfræðirannsóknir hans og var honum svo árið eftir boðið að ganga í félagið. Á fundi 22. júní 1953 talaði Vilhjálmur svo þar sjálfur um stærðfræðiiðkanir sínar. Margir lesendur *Fréttabréfs* þekkja vel þær tvær greinar, sem birtust eftir Vilhjálm Ögmundsson, báðar í *Nordisk Matematisk Tidskrift.* Fyrri greinin, *Multiplication in n dimensions,* er í 7. bindi (1959), bls. 111–116, en hin síðari, *A complete integral solution of* $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$, komst ekki úr prentsmiðju fyrr en að höfundinum látnum, birtist í 13. bindi (1965), bls. 88–90.

Um þær mundir sem hugað var að birtingu bréfanna lézt ekkja Vilhjálms, Lára M. Vigfúsdóttir, á 93. aldursári. Að fengnu leyfi barna þeirra líta bréfin hér dagsins ljós. Þau eru birt svo til stafrétt, einungis leiðréttar örfáar stafvillur, sem telja verður augljós pennaglöp, en hvergi er hnikað orðalagi. Að sjálfsögðu ber að hafa í huga við lesturinn, að bréfin voru ekki ætluð til birtingar.

Fyrsta bréf

Narfeyri, 15. nóv. 1960

Kæri vinur.

Mikið varð ég undrandi þegar ég fékk bókasendinguna frá þér og þó ég geti ekki orðað það eins og vera ber vildi ég færa þér mitt innilegasta þakklæti fyrir þessa miklu gjöf. Ég bið þig fyrirgefa hvað seinn ég er til að skrifa, en ég hefi átt mjög annríkt undanfarið og svo er forvitnin í bækurnar óseðjandi. Ég er langt kominn að lesa Matematikkens Mænd. *Það er gaman að lesa um þessa miklu stærðfræðinga sem svo víða er vitnað til.* The skeleton key *er bók sem ég þarf að lesa oft og rækilega þó að ég kannist við margt af því sem þar er sagt, þá hlakka ég til að rifja upp ýms grundvallaratriði sem þar eru framsett í stuttu máli. Hinar bækurnar hefi ég sama sem ekkert lesið ennþá en eru áreiðanlega mjög girnilegar til fróðleiks.*

Ég er nú nýkominn sunnan úr Reykjavík og fékk ég þar lánaðar bækur á háskólabókasafninu eins og vanalega. Pure mathematics *eftir Hardy og* Science of mechanics *eftir Ernst Mach. Þú sérð af þessu að ég hefi nóg að lesa og nóg um að hugsa á næstunni.*

Ég veit nú ekki hvað ég ætti helst að skrifa þér, eða hvort þú hefðir nokkuð gaman af að ég sendi þér eitthvað af því sem ég hugsaði fyrir mörgum árum. Ég var að leita í gömlum blöðum og fann þá tvennskonar form á summu p-veldistalna. Ég var einhvern tíma að fikta við þetta fyrir mörgum árum. Ég hripaði þetta upp og læt það nú fylgja hér með, svona til gamans. Ef til vill hefðir þú meira gaman af að vita hvernig ég á yngri árum (um 1920) reyndi að sanna og finna ýmsar goemetriskar reglur útfrá samsemdum (Identiteter). Ég skapaði mér sérstakt merkjamál sem ég notaði eingöngu til þeirra hluta. Ef þú hefðir einhvern áhuga á því skal ég hugsa eftir því seinna.

Með innilegu þakklæti
Vilhjálmur Ögmundsson

Með þessu fyrsta bréfi fylgdi „svona til gamans“ efni á þremur blöðum og er reynt eftir föngum að halda hér uppsetningu í handritinu sjálfu. Fyrirsögn var þar engin, en hana má hins vegar sækja í bréfið sjálft:

Tvennskonar form á summu p-veldistalna

$$\mathcal{S}_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

Ef $e^x = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

verður $\dfrac{e^{x(n+1)} - e^x}{e^x - 1} = e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}$

eða $\mathcal{S}_p = \underset{x=0}{\mathcal{D}_x^p} \dfrac{e^{x(n+1)} - e^x}{e^x - 1}$

Setji maður nú $e^x = y$ *og* $\mathcal{D}_y^r \dfrac{y^{n+1} - y}{y-1} = f^{(r)}(y)$

er hægt að nota eftirfarandi formúlu[1]

$$\mathcal{D}_x^p f(y) = \sum_{r,s=1}^{=p} \frac{(-1)^{r-s}}{r!} \cdot \binom{r}{s} \cdot f^{(r)}(y) \cdot y^{r-s} \cdot \mathcal{D}_x^p y^s$$

Nú er $\underset{y=1}{\mathcal{D}_y^r} \dfrac{y^{n+1} - y}{y-1} = r!\dbinom{n+1}{r+1}$

Þar af leiðir:

$$\mathcal{S}_p = \underset{x=0}{\mathcal{D}_x^p} f(y) = \sum_{r,s=1}^{=p} (-1)^{r-s} \cdot \binom{r}{s} \cdot s^p \cdot \binom{n+1}{r+1} \qquad (p \geq 1)$$

$\mathcal{S}_0 = n$, *sem er markgildið af* $\dfrac{y^{n+1} - y}{y-1}$ *þegar* $y = 1$.

Annað form fyrir $\mathcal{S}_p$ *er*

$$\mathcal{S}_p = a_0 n^{p+1} + a_1 n^p + \cdots + a_r n^{p+1-r} + \cdots + a_p n$$

Koefficientana a_r *getur maður fundið á eftirfarandi hátt með því að differensera* $p + 1 - r$ *sinnum með* n *fæst:*

[1] *Sjá N. Nielsen: Funktionsteori bls. 101*

$$(p+1-r)!\,a_r = \mathcal{D}^{p+1-r}_{\substack{n\\n=0}}\ \mathcal{D}^{p}_{\substack{x\\x=0}}\ \frac{e^{(n+1)x}-e^x}{e^x-1}$$

eða

$$(p+1-r)!\,a_r = \mathcal{D}^{p}_{\substack{x\\x=0}}\ x^{p-r}\cdot\frac{x}{1-e^{-x}}$$

Ef B_s eru tölur þær sem kendar eru við Bernoulli er:

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1+\frac{x}{2}+\sum\frac{(-1)^{s+1}\cdot B_s}{(2s)!}x^{2s}$$

Þar af leiðir:

$$a_0 = \tfrac{1}{p+1}$$

$$a_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$a_{2s} = \frac{(-1)^{s+1}B_s}{2s}\binom{p}{2s-1}$$

$$a_{2s+1} = 0$$

Nú er $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, *o.s.frv.*
Eftir því verður:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &= n\\
\mathcal{S}_1 &= \tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n\\
\mathcal{S}_2 &= \tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n\\
\mathcal{S}_3 &= \tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2\\
\mathcal{S}_4 &= \tfrac{1}{5}n^5+\tfrac{1}{2}n^4+\tfrac{1}{3}n^3-\tfrac{1}{30}n\\
\mathcal{S}_5 &= \tfrac{1}{6}n^6+\tfrac{1}{2}n^5+\tfrac{5}{12}n^4-\tfrac{1}{12}n^2\\
\mathcal{S}_6 &= \tfrac{1}{7}n^7+\tfrac{1}{2}n^6+\tfrac{1}{2}n^5-\tfrac{1}{6}n^3+\tfrac{1}{42}n\\
\mathcal{S}_7 &= \tfrac{1}{8}n^8+\tfrac{1}{2}n^7+\tfrac{7}{12}n^6-\tfrac{7}{24}n^4+\tfrac{1}{12}n^2\\
\mathcal{S}_8 &= \tfrac{1}{9}n^9+\tfrac{1}{2}n^8+\tfrac{2}{3}n^7-\tfrac{7}{15}n^5+\tfrac{2}{9}n^3-\tfrac{1}{30}n\\
\mathcal{S}_9 &= \tfrac{1}{10}n^{10}+\tfrac{1}{2}n^9+\tfrac{3}{4}n^8-\tfrac{7}{10}n^6+\tfrac{1}{2}n^4-\tfrac{3}{20}n^2\\
\mathcal{S}_{10} &= \tfrac{1}{11}n^{11}+\tfrac{1}{2}n^{10}+\tfrac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{5}{66}n\\
\mathcal{S}_{11} &= \tfrac{1}{12}n^{12}+\tfrac{1}{2}n^{11}+\tfrac{11}{12}n^{10}-\tfrac{11}{8}n^8+\tfrac{11}{6}n^6-\tfrac{11}{8}n^4+\tfrac{5}{12}n^2
\end{aligned}$$

Í bók þeirri, sem Vilhjálmur vísar hér til neðanmáls, er á bls. 493–4 fjallað um summur p-veldistalna, sem hann nefnir svo. Þar má t.d. lesa, að árið 1713 hafði Jakob Bernoulli ákvarðað summurnar fyrir tíu fyrstu gildin á p. Í bókinni er einungis að finna eina niðurstöðu um þessar summur og er hún í reynd hin sama og seinni niðurstaðan hjá Vilhjálmi, þótt þær séu settar fram hvor með sínum hætti.

Fyrri niðurstaðan hjá Vilhjálmi, sú að

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p = \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{r-s}s^p\binom{r}{s}\binom{n+1}{r+1},$$

er þar hins vegar alls ekki og verður ekki betur séð, en að ekki einungis sé sönnunin, sem hann var að „fikta við" þá mörgum árum áður, frumleg af hans hálfu, heldur hafi hann einnig uppgötvað jöfnuna sjálfa.

Sönnun Vilhjálms á þessari jöfnu er athyglisverð. Sér í lagi er athyglisvert, hvernig hann beitir gamalli en lítt útbreiddri reglu um *afleiður af samskeytingu*. Um þá reglu eina sér er af þessu tilefni fjallað nánar í þessu *Fréttabréfi* hér á eftir (bls. 41–47).

Í seinni hlutanum er sem fyrr segir verið að leiða út niðurstöðu, sem er að finna í fyrrnefndri bók, en hér er beitt ólíkri aðferð. Skýringar Vilhjálms eru hér knappar og er það ekki nema eðlilegt í slíku bréfi. Til að ná tökum á því, sem fram fer, er það til hjálpar að fara aftur yfir fyrri hlutann, en nú með nýju hugarfari.

Við skulum þá taka jöfnuna í fjórðu línu,

$$\mathcal{S}_p = \underset{x=0}{\mathcal{D}_x^p}\, \frac{e^{x(n+1)} - e^x}{e^x - 1},$$

sem skilgreiningu á $\mathcal{S}_p(n) := \mathcal{S}_p$, sem gildir fyrir sérhverja *rauntölu* n. Jafnan

$$\underset{y=1}{\mathcal{D}_y^r}\, \frac{y^{n+1} - y}{y-1} = r!\binom{n+1}{r+1}$$

í fjórðu línu þar á eftir gildir einnig fyrir sérhverja *rauntölu* n með venjulegri túlkun á tvíliðustuðlinum. (Þessi jafna fæst með því að líta á tvíliðuröðina.) Samkvæmt fyrri niðurstöðunni gildir þannig um sérhverja *rauntölu* n, að $\mathcal{S}_p(n)$ er margliða í n, sem er í mesta lagi $(p+1)$-ta stigs.

Að fenginni þessari túlkun á S_p getur lesandinn haldið áfram með seinni hlutann upp á eigin spýtur.

Annað bréf

Narfeyri, 20. jan. 1963

Kæri vinur.

Mikið þakka ég þér fyrir það sem liðið er og jafnframt vildi ég óska þér og þínum alls hins besta á nýbyrjuðu ári. Ég er nú löngu orðinn stálhraustur eftir spítalaleguna í haust. Það er því aðeins mín gamla leti, sem olli því að ég var ekki löngu búinn að skrifa. Og svo er nú það að mest allt mitt hugarstarf fer í allskonar hugaróra um stærðfræðileg verkefni. Þú minnist á Ramanujan og töluna 1729. Mig skal ekki undra þó hann hafi verið fljótur að svara Hardy. Hann hefir sjálfsagt verið búinn að þrauthugsa þetta áður, því að þetta var einmitt verkefni, sem hann glímdi sjálfur við. En verkefnið er þetta. Finn öll gildi í heilum tölum á x, y, u, v *sem fullnægja jöfnunni* $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$. *Ég hefi þreytt við þetta í lengri tíma og ef þú skyldir hafa nokkuð gaman af því læt ég fylgja hér með hvernig ég hefi leyst þetta á mjög einfaldan hátt. Ef til vill eru skýringar á þessu ekki nægilegar til þess að auðvelt sé að fylgjast með.*

Með kærri kveðju

Þinn Vilhjálmur Ögmundsson

Bréf þetta sjáum við í heild í smækkaðri mynd hér á næstu síðu. Því fylgdi á fjórum blöðum lausn á jöfnunni, sem þar er nefnd. Efnislega er hér að finna hið sama og í seinni grein Vilhjálms í *Nordisk Matematisk Tidskrift*, sem á þeim tíma var ekki enn komin til birtingar. Þar er framsetningin auðvitað í hinni endanlegu gerð af hálfu höfundarins, en sú grein er á ensku og er því fróðlegt að lesa hér framsetningu hans á sínu eigin máli á þessu efni. Jafnframt er hér að finna efnisatriði til viðbótar, því Ramanujan var ekki nefndur á nafn í tímaritsgreininni né heldur sú hin fræga tala 1729, sem á einmitt Ramanujan frægð sína að þakka. (Þá sögu rifjum við svo upp á bls. 40 hér á eftir.)

Narfeyri 20. jan. 1963

Kæri vinur,

Mikið þakka ég þér fyrir það sem liðið er og jafnframt vildi ég óska þér og þínum alls hins besta á nýbyrjuðu ári. Ég er nú löngu orðinn stálhraustur eftir spítalaleguna í haust. Það er því aðeins mín gamla leti, sem olli því að ég var ekki löngu búinn að skrifa. Og svo er nú það að mest allt mitt hugarstarf fer í allskonar hugaróra um stærðfræðileg verkefni. Þú minnist á Ramanujan og töluna 1729. Mig skal ekki undra þó hann hafi verið fljótur að svara Hardy. Hann hefir sjálfsagt verið búinn að þrauthugsa þetta áður, því að þetta var einmitt verkefni, sem hann glímdi sjálfur við. En verkefnið er þetta

Finn öll gildi í heilum tölum á x, y, u, v sem fullnægja jöfnunni $x^3+y^3=u^3+v^3$

Ég hefi þreytt við þetta í lengri tíma og ef þú skyldir hafa nokkuð gaman af því læt ég fylgja hér með hvernig ég hefi leyst þetta á mjög einfaldan hátt. Ef til vill eru skýringar á þessu ekki nægilegar til þess að auðvelt sé að fylgjast með. Með kærri kveðju

Þinn Vilhjálmur Sigmundsson

Þessum blöðum er hér fengin fyrirsögnin:

Úrlausn á jöfnunni $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$

Fullkomna úrlausn í heilum tölum á jöfnunni

$$x^3 + y^3 = u^3 + v^3 \tag{1.}$$

má fá á eftirfarandi hátt. Ef sett er

$$\begin{cases} x = p + q \\ v = p - q \\ u = r + s \\ y = r - s \end{cases} \tag{2.}$$

er hægt að skrifa (1.) í forminu

$$q^3 + 3p^2q = s^3 + 3r^2s \tag{3.}$$

Nú má breyta þessu formi með því að deila beggja megin með q og setja $\frac{s}{q} = d$.

$$-3(p^2 - r^2d) = q^2 - s^2d \tag{4.}$$

Séu nú liðirnir í þessari jöfnu skoðaðir sem norm af elementum í algebru, hlýtur að vera til element $\varepsilon = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\sqrt{d}\right)$ (a, b, c heilar tölur), sem fullnægja jöfnunni:

$$\varepsilon(p, r\sqrt{d}) = (q, s\sqrt{d}) \tag{5.}$$

Normið af ε er -3. Það er

$$\varepsilon\varepsilon' = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\sqrt{d}\right)\left(\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}\sqrt{d}\right) = -3 \quad \text{Þar af leiðir}$$

$$b^2d = a^2 + 3c^2 \tag{6.}$$

Með því að margfalda (5.) með ε' fæst

$$(7.) \qquad -3(p, r\sqrt{d}) = (q, s\sqrt{d})\left(\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}\sqrt{d}\right)$$

Í stað s er nú sett qd og síðan er deilt með q og margfaldað með $-c$ *beggja megin, elementin hægra megin margfölduð og síðan jafnað saman liðum. Þá verður*

$$(8.) \qquad \begin{cases} \dfrac{3c}{q}p = bd^2 - a \\ \dfrac{3c}{q}r = b - ad \end{cases}$$

Með hjálp (6.) er nú hægt að eleminera d
og til hægðarauka set ég $\dfrac{3cb^3}{q} = w$

$$(9.) \qquad \begin{cases} wp = (a^2 + 3c^2)^2 - ab^3 \\ wr = b^4 - ab(a^2 + 3c^2) \\ wq = 3cb^3 \\ ws = 3cb(a^2 + 3c^2) \end{cases}$$

Samkvæmt (2.)

$$(10.) \qquad \begin{cases} wx = (a^2 + 3c^2)^2 + b^3(3c - a) \\ wy = b^4 - b(3c + a)(a^2 + 3c^2) \\ wu = b^4 + b(3c - a)(a^2 + 3c^2) \\ wv = (a^2 + 3c^2)^2 - b^3(3c + a) \end{cases}$$

Þetta parametergildi á x, y, u, v innsett í (1.) myndar Identitet, svo að það er alltaf úrlausn fyrir öll a, b, c.
Nú inniheldur (10.) allar mögulegar úrlausnir, því af ákveðinni úrlausn x, y, u, v má af (5.) finna tilsvarandi parametra a, b, c.

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\sqrt{d}\right) = \frac{(q, s\sqrt{d})}{(p, r\sqrt{d})} = \frac{(q, s\sqrt{d})(p, -r\sqrt{d})}{p^2 - r^2 d}$$

$$= \frac{(pq - rsd, (ps - qr)\sqrt{d})}{p^2 - r^2 d}$$

Í stað d er nú sett $\frac{s}{q}$ og síðan margfaldað í teljara og nefnara með q. Ef a, b, c eru prímískar tölur — hafa ekki allar sameiginlegan faktor — en tilsvarandi tölur hægra megin hafa sameiginlega faktorinn λ, þá verður

$$\begin{cases} \lambda a = pq^2 - rs^2 \\ \lambda b = psq - rq^2 \\ \lambda c = qp^2 - sr^2 \end{cases}$$

Ramanujan leysti þetta í því sérstaka tilfelli þegar $s = 4q$ eða $d = 4$. Líking (4.) verður þá

$$-3(p^2 - (2r)^2) = q^2(-63) \quad \text{eða}$$
$$p^2 - (2r)^2 = q^2 \cdot 21$$

Af þessu leiðir nú þegar sett er $q = a^2 - b^2$

$$(p, 2r) = (a, b)^2(4, 3)(2, \pm 1)$$

Sé neðra formerkið notað verður

$$(p, 2r) = (a^2 + b^2, 2ab)(5, 2)$$

Af þessu formi má leiða úrlausn Ramanujans. En sé efra formerkið notað þá er

$$(p, 2r) = (a^2 + b^2, 2ab)(11, 10)$$

Með því að margfalda og jafna saman liðum verður

$$\begin{aligned} p &= 11a^2 + 20ab + 11b^2 \\ r &= 5a^2 + 11ab + 5b^2 \\ q &= a^2 - b^2 \\ s &= 4a^2 - 4b^2 \end{aligned}$$

Og samkv. (2.)

$$\begin{aligned} x &= 12a^2 + 20ab + 10b^2 \\ y &= a^2 + 11ab + 9b^2 \\ u &= 9a^2 + 11ab + b^2 \\ v &= 10a^2 + 20ab + 12b^2 \end{aligned}$$

Ef a og b eru positivar tölur gefa þessar formúlur eintómar positivar úrlausnir, og $a = 1$, $b = 0$ gefur lágmarkstöluna

$$12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$$

Þriðja bréf

Narfeyri, 15. des. 1964

Kæri vinur.

Loksins læt ég þá verða af því að skrifa þér nokkrar línur og þakka þér fyrir bókina sem ég fékk í sumar. Ég býst nú við að hún verði mér nokkuð strembin en ég hefi ekki ennþá athugað hana neitt að gagni. Ég veit ekki hvort þú hefur nokkuð gaman af því að ég segi þér hvað mér hefir verið efst í huga undanfarið. Ég hefi nógan bókakost, ekki vantar það. Ég les núna Abstract Algebra — eitt bindi á þýsku eftir B. L. van der Waerden og svo hef ég þrjú bindi á ensku eftir Nathan Jacobson.

En þetta gengur allt ákaflega hægt hjá mér, því bæði er ég orðinn of gamall og ónýtur að læra nokkuð, og svo er mér sjálfum alltaf að detta eitthvað í hug, sem ég svo eyði mestum tíma mínum til að kanna á ýmsa vegu. Ég held ég hafi einhvern tíma skrifað þér um jöfnuna

$$x^3 + y^3 = u^3 + v^3$$

og hvernig hún er leyst með því að nota algebru í tveimur liðum („of order two“).

Ég gerði uppkast að þessu. Er það nú til athugunar hjá Sigurkarli Stefánssyni og dr. Halldóri Elíassyni hvort unnt sé að koma því í það form að hægt sé að birta það í N. M. T.

Ef liðirnir í þessari tveggjaliða algebru eru komplex tölur, þá er hún í rauninni isomorph við algebru í fjórum liðum.

Elementið $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ *þar sem* a, b, c *og* d *eru realar tölur, en* e_1, e_2, e_3 *og* e_4 *eru grunneiningar má nú skrifa á einfaldari hátt* (a, b, c, d). *Margföldunarregla grunneininganna ákveðst þannig:*

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2
e_4	e_4	$-e_3$	e_2	$-e_1$

Ath: $e_1 = 1$

Þessi algebra fylgir öllum venjulegum reikningsreglum, er assoziativ, kommutativ og distributiv. Ég held að ég hafi nú fundið sönnun fyrir því að allar primtölur af forminu $4n + 1$ *séu produkt af fjórum elementum þar sem* a, b, c *og* d *eru heilar tölur.*

Ég set hér tvö dæmi:

$$5 = (1, 1, -1, 0)(1, -1, 1, 0)(1, 1, 1, 0)(1, -1, -1, 0)$$
$$29 = (3, 1, -2, -1)(3, -1, 2, -1)(3, 1, 2, 1)(3, -1, -2, 1)$$

Nú er hægt að hugsa sér þessa faktora sem rætur í líkingu. Hún verður af fjórðu gráðu og koefficianar eru allir heilar tölur.

Það er nú best að fara að slá botn í alla þessa vitleysu. Ég óska þér og þínum gleðilegra jóla og allrar farsældar á nýju ári með alúðarþakklæti fyrir liðinn tíma.

Kær kveðja, þinn Vilhjálmur Ögmundsson.

1729

Orðaskipti þau, sem Godfrey Harold Hardy og Srinivasa Ramanujan áttu um töluna 1729, eru alkunn. Í tilefni af bréfi Vilhjálms á Narfeyri hér að framan (bls. 33–34) birtum við frásögn Hardys af þeim, en hana er að finna í minningargrein hans um Ramanujan:[1]

Ég hef oft verið spurður, hvort Ramanujan hafi verið búinn einhverri sérstakri dulargáfu; hvort aðferðir hans hafi í eðli sínu verið ólíkar aðferðum annarra stærðfræðinga; hvort það hafi hreinlega verið eitthvað afbrigðilegt við það, hvernig hann hugsaði. Ég get ekki svarað þessum spurningum á neinn trúverðugan né sannfærandi hátt; en ég trúi ekki, að svo hafi verið. Trúa mín er sú, að þegar öllu er á botninn hvolft, hugsi allir stærðfræðingar á sams konar hátt, og að Ramanujan hafi þar ekki verið nein undantekning. Hann hafði vitaskuld alveg einstakt minni. Hann gat munað sérkennileika talna á allt að því óskiljanlegan hátt. Það var hr. Littlewood (minnir mig), sem lét þess getið, að „hann hefði verið í persónulegu vinfengi við hverja einustu náttúrulega tölu.“ Ég minnist þess eitt sinn, þegar ég vitjaði hans á sjúkrabeði í Putney. Ég hafði tekið mér leigubíl þangað, sem bar skráningarnúmerið 1729, og lét þau orð falla, að þessi tala 7 · 13 · 19 *virtist mér ósköp ómerkileg, og að ég vonaði bara, að það væri ekki ills viti. „Nei,“ svaraði hann á móti, „þetta er mjög athyglisverð tala; þetta er minnsta talan, sem hægt er að skrifa á tvo ólíka vegu sem summu tveggja þrívelda.“ Ég spurði hann auðvitað, hvort hann þekkti svarið við hliðstæðri spurningu um fjórðu veldin; og hann svaraði eftir andartaksíhugun, að hann gæti ekki séð neitt augljóst dæmi og héldi, að fyrsta talan af því tagi hlyti að vera mjög stór.*[2]

---

[1] G. H. Hardy, *Srinivasa Ramanujan (1887–1920)*, birt 1921; endurpr. í *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Chelsea, 1962, bls. xxi–xxxvi; ummæli á bls. xxxv. (Þýðing J.R.S.)

[2] Euler gaf töluna $158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4$ sem dæmi. Varðandi aðrar lausnir sjá L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, 2. b., bls. 644–647. (Nmgr. höf.)

Jón Ragnar Stefánsson:

AFLEIÐUR AF SAMSKEYTINGU

1. Inngangur. Keðjureglan um diffrun á samskeytingu tveggja raunfalla af einni breytistærð gefur okkur, að ef $h(x) = f(g(x))$, þá er

$$\begin{aligned}
h'(x) &= g'(x)f'(g(x)) \\
h''(x) &= g'(x)^2 f''(g(x)) + g''(x)f'(g(x)) \\
h'''(x) &= g'(x)^3 f'''(g(x)) + 3g'(x)g''(x)f''(g(x)) + g'''(x)f'(g(x)) \\
h''''(x) &= g'(x)^4 f''''(g(x)) + 6g'(x)^2 g''(x)f'''(g(x)) \\
&+ \left[3g''(x)^2 + 4g'(x)g'''(x)\right] f''(g(x)) + g''''(x)f'(g(x))
\end{aligned}$$

o.s.frv., þar sem við göngum út frá í hverju skrefi, að viðeigandi forsendur um diffranleika séu fyrir hendi. Hver sem er getur haldið áfram að diffra viðstöðulaust svo sem hann hefur þrek til, en engan veginn liggur í augum uppi, hvaða almenn regla gildir um þessar hærri afleiður. Þó er auðvitað ljóst í n-ta skrefinu, hverjir verða stuðlarnir við $f'(g(x))$ annars vegar og $f^{(n)}(g(x))$ hins vegar.

Það var því athyglisvert að lesa í gömlum blöðum Vilhjálms á Narfeyri, sem komu fram með óvæntum hætti, hvernig hann notar slíka almenna reglu með góðum árangri eins og við sjáum á bls. 30 hér að framan. Hann vitnar þar til bókar eftir Niels Nielsen frá 1909, þar sem regluna er að finna [1, bls. 100–101], en þar er hún sögð tekin úr bók eftir Hoppe frá 1845 [2, bls. 38].

Reglu þessarar virðist lítt getið í kennslubókum á síðari tímum. Ég spurði Sigurð Helgason, þegar hann var hér á ferð í maí, hvaðan hann kannaðist við hana og svaraði hann að bragði, að hún væri í bók eftir Gibson, sem héti víst *Advanced Calculus* [3] og hann hefði keypt í Reykjavík veturinn eftir stúdentspróf! Sú bók kom út 1931 og er þar á bls. 78–80 vitnað til hinnar þýzku útgáfu af fyrirlestrum Nielsens og að auki til þriggja annarra rita varðandi þessa reglu og eru þau öll frá síðustu öld en ekkert eldra en bókin eftir Hoppe. Vitaskuld hlýtur regluna að vera að finna víðar, en ég hef ekki í tilefni af þessum pistli gert neina gangskör að því að kanna, hvar það muni vera í nýrri ritum.

Reglan hefur því verið kunn fyrr á tíð meðal bænda á Skógarströnd og jafnframt verið seld nýstúdentum í Bókaverzlun Snæbjarnar í Austurstræti strax að lokinni seinni heimssstyrjöld. Þar sem vitneskja um hana virðist lítt útbreidd að öðru leyti, er viðeigandi að dusta af henni rykið og gera henni skil um leið og bréf Vilhjálms eru birt hér að framan.

2. Greining á viðfangsefninu. Við sjáum fyrir okkur, að hin almenna n-ta afleiða af fallinu h, sem við litum á í upphafi, muni vera af taginu

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} G_{nk}(x) f^{(k)}(g(x)), \tag{1}$$

þar sem stuðlarnir $G_{nk}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, eru háðir fallinu g en hins vegar óháðir f.

Þá skulum við gleyma því falli f, sem við tókum okkur í hendur. Við lítum einungis á g og gerum ráð fyrir, að það sé diffranlegt n sinnum í punktinum x. Svo tökum við $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ og skilgreinum nýtt fall f, þannig að

$$f(y) := \frac{1}{k!}(y - g(x))^k \quad \text{fyrir öll} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Þá er

$$f^{(k)}(g(x)) = 1 \quad \text{og} \quad f^{(j)}(g(x)) = 0, \quad \text{ef} \quad j \neq k.$$

Setjum

$$h(t) := f(g(t)) \quad \text{fyrir öll } t \text{ í grennd við } x,$$

svo að jafna (1) verður í þessu tilviki að jöfnunni

$$h^{(n)}(x) = G_{nk}(x). \tag{2}$$

Setjum svo í lokin

$$k(u) := h(x+u) = \frac{1}{k!}\big(g(x+u) - g(x)\big)^k$$

fyrir öll u í grennd við 0. Þá er

$$h^{(n)}(x) = k^{(n)}(0) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^n}{\partial u^n}\big(g(x+u) - g(x)\big)^k\Big|_{u=0}. \tag{3}$$

Jöfnur (2) og (3) í sameiningu gefa okkur því ótvírætt, hvernig skilgreina á föllin G_{nk} hér á eftir.

3. Hin almenna regla. Gerum ráð fyrir, að fallið $g\colon I \to \mathbb{R}$ sé diffranlegt N sinnum í punkti $x \in I$, þar sem I er opið bil á rauntalnaásnum. Skilgreinum fyrir öll $k = 0, 1, 2, \ldots$ og öll $n = 1, 2, \ldots, N$

$$G_{nk}(x) \colon = \frac{1}{k\,!} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \big(g(x+u) - g(x)\big)^k \Big|_{u=0}, \tag{4}$$

svo að tvíliðureglan gefur okkur viðstöðulaust, að

$$G_{nk}(x) = \frac{1}{k\,!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k}{r} g^r(x) \big(g^{k-r}\big)^{(n)}(x). \tag{5}$$

Áður en við köllum fallið f fram til sögunnar leiðum við út rakningarreglu, sem föllin G_{nk} hlíta.

Hjálparsetning 1. 1) *Um öll $n = 1, 2, \ldots, N-1$ og öll $k \in \mathbb{N}$ gildir, að*

$$G_{n+1,k}(x) = G'_{nk}(x) + g'(x) G_{n,k-1}(x). \tag{6}$$

2) *Um öll $n = 1, 2, \ldots, N$ og öll $k > n$ gildir, að*

$$G_{n0}(x) = G_{nk}(x) = 0, \quad G_{n1}(x) = g^{(n)}(x), \quad G_{nn}(x) = g'(x)^n. \tag{7}$$

Sönnun. 1) Fyrir $n < N$ og $k > 0$ fæst af jöfnu (5) við diffrun, að

$$\begin{aligned}
G'_{nk}(x) &= \frac{1}{k\,!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k}{r} g^r(x) \big(g^{k-r}\big)^{(n+1)}(x) \\
&\quad + \frac{1}{k\,!} \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r r \binom{k}{r} g^{r-1}(x) g'(x) \big(g^{k-r}\big)^{(n)}(x) \\
&\overset{(*)}{=} G_{n+1,k}(x) \\
&\quad + g'(x) \frac{1}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r-1} g^{r-1}(x) \big(g^{k-r}\big)^{(n)}(x) \\
&= G_{n+1,k}(x) - g'(x) G_{n,k-1}(x),
\end{aligned}$$

þar sem við höfum notað í umrituninni (∗), að

$$r\binom{k}{r} = k\binom{k-1}{r-1}, \quad \text{ef} \quad 1 \le r \le k.$$

2) Ljóst er, hvort heldur er af jöfnu (4) eða (5), að

$$G_{n0}(x) = 0 \quad \text{og} \quad G_{n1}(x) = g^{(n)}(x), \quad \text{ef} \quad n \le N.$$

Einnig er ljóst af jöfnu (4), að $G_{1k}(x) = 0$, ef $k > 1$.

Gerum ráð fyrir, að um tiltekið $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ gildi, að

$$G_{nn}(x) = g'(x)^n \quad \text{og} \quad G_{nk}(x) = 0 \quad \text{fyrir öll} \quad k > n.$$

Tökum $k > n+1$. Þá er $k - 1 > n$, svo að af jöfnu (6) fæst, að

$$G_{n+1,k}(x) = G'_{nk}(x) + g'(x)G_{n,k-1}(x) = 0$$

og

$$G_{n+1,n+1}(x) = G'_{n,n+1}(x) + g'(x)G_{nn}(x) = g'(x)^{n+1}.$$

Við setjum þá fram og sönnum hina almennu reglu um hærri afleiður af samskeytingu.

Setning 2. *Gerum ráð fyrir, að $h = f \circ g$ sé samskeyting tveggja falla, $g\colon I \to \mathbf{R}$, þar sem I er opið hlutbil í $\mathbf{R}$, og $f\colon J \to \mathbf{R}$, þar sem $g(I) \subseteq J \subseteq \mathbf{R}$.*

Ef fallið g er diffranlegt N sinnum í punkti $x \in I$ og fallið f er diffranlegt N sinnum í punktinum $g(x)$, sem er innri punktur í J, þá er samskeytingin $h\colon I \to \mathbf{R}$ diffranleg N sinnum í x og um öll $n = 1, 2, \ldots, N$ gildir, að

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} G_{nk}(x) f^{(k)}(g(x)) \qquad (8) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k} \frac{(-1)^{k-r}}{k!}\binom{k}{r} g^{k-r}(x)\left(g^r\right)^{(n)}(x)\, f^{(k)}(g(x)). \end{aligned}$$

Sönnun. Ljóst er, að jafna (8) gildir um $n = 1$. Gerum ráð fyrir, að hún gildi um tiltekið $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Þá fæst við diffrun, að

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} G'_{nk}(x) f^{(k)}(g(x)) + \sum_{k=0}^{n} g'(x) G_{nk}(x) f^{(k+1)}(g(x)) \\ &= g'(x) G_{nn}(x) f^{(n+1)}(g(x)) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \big(G'_{nk}(x) + g'(x) G_{n,k-1}(x) \big) f^{(k)}(g(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} G_{n+1,k}(x) f^{(k)}(g(x)), \end{aligned}$$

þar sem við höfum í lokin notað rakningarregluna (6) ásamt síðustu jöfnunni í (7). [Raunar höfum við hér ekki notað neina aðra vitneskju um föllin G_{nk}; setningin gildir því um sérhver slík föll.]

4. Önnur regla. Til er önnur regla um afleiður af samskeytingu, sem Sven Þ. Sigurðsson benti mér á og hann kannaðist við úr kennslubókum í tölulegri greiningu, sjá t.d. [4, bls. 156-7]. Það sem hér fer á eftir, er vaxið af þeirri ábendingu. Við setjum þá reglu fyrst fram eins og í [4] og bendum á, að hana má sanna með þrepun eins og þar er gert.

Við minnum á, að með *skiptingu* á $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ í k *hluta* er átt við mengi af k sundurlægum hlutmengjum í $\mathbb{N}_n$, sem þekja $\mathbb{N}_n$, þannig að ekkert þeirra er tómt.

Setning 3. *Með sömu forsendum og í setningu 2 gildir um $n = 1, 2, \ldots, N$, að n-ta afleiðan af $h = f \circ g$ í punktinum x er*

$$h^{(n)}(x) = \sum_{\substack{1 \le k \le n, \\ \pi \text{ skipting á} \\ \mathbb{N}_n \text{ í } k \text{ hluta}, \\ \pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}}} g^{(\#S_1)}(x) g^{(\#S_2)}(x) \ldots g^{(\#S_k)}(x) f^{(k)}(g(x)). \quad (9)$$

Síðan skulum við umrita þessa reglu. Hin almenna *skipting á tölunni n í k hluta* er af taginu

$$\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_r m_r = n, \quad \text{þar sem} \quad \begin{cases} 1 \le m_1 < \cdots < m_r, \\ 1 \le \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = k. \end{cases}$$

Við sjáum, að til þessarar einu skiptingar á tölunni n í k hluta svara $\dfrac{n!}{(m_1!)^{\alpha_1}\dots(m_r!)^{\alpha_r}\,\alpha_1!\dots\alpha_r!}$ skiptingar á menginu $\mathbb{N}_n$ í k hluta, þannig að allir tilsvarandi liðir í summunni í (9) eru eins. Við fáum þá af jöfnu (9), að

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k} \sum_{\substack{1\le\alpha_1,\dots,\alpha_r\\ \alpha_1+\dots+\alpha_r=k\\ 1\le m_1<\dots<m_r\\ \alpha_1 m_1+\dots+\alpha_r m_r=n}} \frac{n!\prod_{j=1}^{r} g^{(m_j)}(x)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{r}(m_j!)^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{r}\alpha_j!} f^{(k)}(g(x)), \qquad (10)$$

svo að hér er n-ta afleiðan af h komin í nýrri mynd.

Til glöggvunar skulum við líta á $n = 4$. Eftirfarandi skiptingar fást annars vegar á tölunni 4 og hins vegar á menginu $\mathbb{N}_4$ í tvo hluta:

$$\begin{aligned} 1+3: &\quad \{1,\{2,3,4\}\},\quad \{2,\{1,3,4\}\},\quad \{3,\{1,2,4\}\},\quad \{4,\{1,2,3\}\};\\ 2\cdot 2: &\quad \{\{1,2\},\{3,4\}\},\quad \{\{1,3\},\{2,4\}\},\quad \{\{1,4\},\{2,3\}\}. \end{aligned}$$

5. Aðferð Vilhjálms á ný. Það var kveikjan að þessari grein, að Vilhjálmur á Narfeyri beitti reglu (8) til að leiða út summuregluna, sem við endurskrifuðum á bls. 32. Það er forvitnilegt að kanna, hvað þessi aðferð hans gefur okkur, ef við beitum reglu (10) í staðinn. Hjá Vilhjálmi er

$$g(x) := e^x \quad \text{og} \quad f(y) := \frac{y^{n+1}-y}{y-1}, \quad \text{svo að} \quad f^{(k)}(1) = k!\binom{n+1}{k+1}.$$

Þar með gefa reikningar hans á bls. 30, en nú byggðir á reglu (10), að um $h = f\circ g$ gildir, að

$$\begin{aligned} 1^p + 2^p + \dots + n^p &= h^{(p)}(0)\\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{k} \sum_{\substack{1\le\alpha_1,\dots,\alpha_r\\ \alpha_1+\dots+\alpha_r=k\\ 1\le m_1<\dots<m_r\\ \alpha_1 m_1+\dots+\alpha_r m_r=p}} \frac{p!\,k!}{(m_1!)^{\alpha_1}\dots(m_r!)^{\alpha_r}\,\alpha_1!\dots\alpha_r!}\binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Svo innleiðum við *Stirling-töluna* $\left\{ p \atop k \right\}$, sem táknar fjölda *skiptinga* á p staka mengi í k hluta, svo að við höfum einmitt að

$$\left\{ p \atop k \right\} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{\substack{1 \le \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = k \\ 1 \le m_1 < \cdots < m_r \\ \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_r m_r = p}} \frac{p!}{(m_1!)^{\alpha_1} \ldots (m_r!)^{\alpha_r} \alpha_1! \ldots \alpha_r!}.$$

[Með grein frá 1904 var einmitt Niels Nielsen brautryðjandi í fræðum um Stirling-tölur, sem enn eru stunduð á vorum dögum eins og sjá má í grein eftir D. E. Knuth í síðasta hefti af *American Mathematical Monthly* (99. b., maí 1992).] Þar með er hér komin reglan:

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{\min\{p,n\}} k! \left\{ p \atop k \right\} \binom{n+1}{k+1}, \tag{11}$$

sem gefur okkur viðstöðulaust við frádrátt, að

$$n^p = \sum_{k=1}^{\min\{p,n\}} k! \left\{ p \atop k \right\} \binom{n}{k}. \tag{12}$$

Þá reglu mun vera að finna hjá James Stirling í bók hans *Methodus Differentialis* frá 1730; auðfengið er, að hún gefur reglu (11) af sér.

Og er þá ekki annað eftir en að gleðjast á ný yfir því, að varðveitzt hafa þau bréf bóndans á Narfeyri, sem urðu til þess að við höfum hér fengið upp í hendurnar slíkar perlur, þar sem eru þessar tvær síðustu jöfnur (11) og (12) hvor fyrir sig. Og þegar þær standa svo saman, stirnir af þeim.

Heimildir

1. Niels Nielsen, *Lærebog i Elementær Funktionsteori, Forelæsninger holdte ved Københavns Universitet*, Gyldendalske Boghandel, Kaupmannahöfn og Kristjaníu, 1909.
2. R. Hoppe, *Theorie der höheren Differentialquotienten*, Leipzig, 1845.
3. Georg Gibson, *Advanced Calculus*, Macmillan, 1931.
4. J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1987.

RÁÐSTEFNUR Á NÆSTUNNI

Hér verður getið um fáeinar ráðstefnur erlendis, sem haldnar verða á næstunni og sérstök ástæða er til að vekja athygli á.

Um þær mundir sem þetta tölublað *Fréttabréfs* kemur út hefst *Fyrsta evrópska stærðfræðingaþingið* í París, en það stendur yfir dagana 6.–10. júlí. Nokkrum vikum síðar hefst *Sjöunda alþjóðaþing um stærðfræðimenntun* í Québec-borg í Kanada, en það stendur dagana 16.–23. ágúst. Beggja þessara þinga var getið í síðasta *Fréttabréfi*.

Dagana 17.–21. ágúst verður haldin við Oslóarháskóla *Minningarvika um Sophus Lie* í tilefni þess, að hálf önnur öld er á þessu ári liðin frá fæðingu hans (f. 1842, d. 1899). Annars vegar verður haldin sýning á munum og minjum tengdum ævi og starfi Sophusar Lies og verður hún opnuð 17. ágúst með sérstakri athöfn, þar sem Sigurður Helgason flytur fyrirlestur. Hins vegar verður haldið málþing um Lie-grúpur og beitingu þeirra í algebrulegri rúmfræði og diffurrúmfræði og stendur það yfir vikuna alla. Sigurður Helgason verður einnig fyrirlesari þar í hópi margra annarra.

Að *Minningarviku um Sophus Lie* standa Oslóarháskóli og Norska vísindaakademían.

Hin *danska málstofa um Lie-grúpur*, sem aðsetur hefur við háskólann í Hróarskeldu, kemur saman dagana 10.–12. september. Viðfangsefni hennar verður *Fourier- og Radon-færslur á samhverfum rúmum* og verður hún haldin í það sinn Sigurði Helgasyni til heiðurs í tilefni þess, að hann verður hálfsjötugur 30. september nk. Umsjón með málstofunni hafa Mogens Flensted-Jensen, prófessor við Landbúnaðarháskólann í Kaupmannahöfn, og Gestur Ólafsson, sem nú er lektor við Hróarskelduháskóla en var áður í Göttingen. Þess má geta, að ásamt Sigurði Helgasyni, Lennart Carleson og Hugh Montgomery var Flensted-Jensen fyrirlesari á sumarskólanum í stærðfræði, sem stóð yfir um þriggja vikna skeið á Laugarvatni sumarið 1977. Einnig var hann einn aðalfyrirlesaranna á Norræna stærðfræðingaþinginu í Reykjavík 1984.

Reynir Axelsson:

„ORÐ MÉR AF ORÐI“

4. þáttur

Lengi hefur verið starfað að *Orðaskrá Íslenzka stærðfræðafélagsins*, og það hefur ekki farið fram hjá okkur sem að henni vinnum að margir eru orðnir langeygir eftir einhverjum ávexti þessa starfs. Á dögunum lauk mikilvægum áfanga, yfirlestri orðaskrárinnar sem hefur staðið yfir síðan í janúar 1988. Næsta verkefni verður að búa til prentunar enskt-íslenzkt stærðfræðiorðasafn úr þeim efniviði sem þegar hefur verið safnað. Sú vinna á eflaust eftir að taka nokkra mánuði, en nú er útgáfa þó komin í augsýn.

Þegar slíkum áfanga er náð er eðlilegt að líta dálítið yfir farinn veg. Ég held við séum ánægð með safnið í heild. Samkvæmt mjög lauslegri talningu má gera ráð fyrir að í orðaskránni séu um það bil níu þúsund ensk orð og orðasambönd. Fyrir langflest þeirra höfum við íslenzka þýðingu. Flestar þýðingarnar þykja okkur góðar. Aðrar eru kannski nothæfar, en klunnalegar, og eflaust eru sumar afleitar. Við því er að búast. Og enn-þá vantar okkur alveg íslenzk heiti á nokkrum algengum og mikilvægum hugtökum, þar á meðal úr einfaldri skólastærðfræði. Í þessum þætti ætla ég að minnast á nokkur þeirra. Þar sem af svo mörgu er að taka læt ég nægja að nefna fáein hugtök sem tengjast keilusniðum.

Í starfi okkar höfum við hvað eftir annað rekizt á að ólíkir höfundar nefna sömu hlutina oft ólíkum nöfnum, og öfugt nota ólíkir höfundar oft sama nafnið um ólíka hluti. Því getur oft verið erfitt að átta sig á hvað er hvað. Góð dæmi um slíkt eru heitin á ásum sporbaugs og breiðboga og á hringum sem tengjast þessum keilusniðum.

Sporbaugur (*ellipse*) hefur tvo ása. Annar þeirra er kallaður *langás* (*major axis*), hinn er kallaður *skammás* (*minor axis*). Hvort orðið um sig er notað í tveimur eða jafnvel þremur merkingum; það getur táknað línu eða strik, eða jafnvel lengd striksins. Ef við lítum á ásana sem línur, þá má lýsa þeim sem *samhvarfsásum* (*axes of symmetry*) sporbaugsins. Sporbaugurinn sker hvorn samhvarfsás um sig í tveimur punktum, sem ákvarða þannig strik á ásnum. Strikið (og stundum lengd þess) er líka kallað ás sporbaugsins. Lengra strikið er langásinn, og liggur á línunni sem líka kallast langás. Skemmra strikið er skammásinn, og liggur á línunni sem líka kallast skammás. Þetta skýrir íslenzku heitin. Í venjulegu rétthyrndu hnitakerfi þar sem x-ásinn fellur saman við langás sporbaugsins og y-ásinn fellur saman við skammásinn hefur sporbaugurinn jöfnuna

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

þar sem $a > b > 0$. Orðið *langás* getur þá táknað línuna $y = 0$, strikið milli punktanna $(-a, 0)$ og $(a, 0)$ og stundum lengdina $2a$. Sömuleiðis getur orðið *skammás* táknað línuna $x = 0$, strikið milli punktanna $(0, -b)$ og $(0, b)$ og stundum lengdina $2b$. Á ensku er heitið *semimajor axis* einnig notað um hálfan langásinn; og getur þá þýtt annaðhvort strikanna frá $(-a, 0)$ til $(0, 0)$ eða frá $(0, 0)$ til $(0, a)$, eða þá lengdina a. Við höfum ekki reynt að búa til sérstakt heiti fyrir þetta; *hálfur langás* ætti að nægja. Enska heitið *semiminor axis* er notað með hliðstæðum hætti, og gæti heitið *hálfur skammás*.

Tökum eftir að gera má greinarmun á *línunum* langás og skammás án þess að vísa til lengdar: Langásinn er línan sem liggur gegnum brennipunkta sporbaugsins. Skammásinn er miðþverillinn á strikið milli brennipunktanna.

Breiðbogi (*hyperbola*) hefur einnig tvo samhvarfsása. Þeim má lýsa með sama hætti: Annar þeirra, *transverse axis* eða (sjaldnar) *major axis*, er línan gegnum brennipunktana. Hinn, *conjugate axis* eða (ennþá sjaldnar) *minor axis*, er miðþverillinn á strikið milli brennipunktanna. Eins og fyrir sporbaug eru heitin einnig notuð um strik eða jafnvel lengdir strika. Breiðboginn sker ásinn gegnum brennipunktana í tveimur punktum, og strikið milli þeirra er líka kallað *transverse axis* eða *major axis*. Breiðboginn sker ekki hinn samhvarfsásinn, en tveir punktar á honum ákvarðast þó með eftirfarandi hætti: Í skurðpunktum breiðbogans við ásinn gegnum brennipunktana reisum við lóðlínur á ásinn. Hvor lóðlínan um sig sker aðfellur breiðbogans í tveimur punktum. Þannig myndast fjórir skurðpunktar. Þeir eru hornpunktar rétthyrnings með lóðlínurnar tvær sem gagnstæðar hliðar. Hinar gagnstæðu hliðarnar skera hinn ásinn í tveimur punktum, og strikið milli þeirra er líka kallað *conjugate axis* eða *minor axis*. Í venjulegu rétthyrndu hnitakerfi þar sem x-ásinn fellur saman við *transverse axis* breiðbogans og y-ásinn fellur saman við *conjugate axis* hefur breiðboginn jöfnuna

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

þar sem $a > 0$ og $b > 0$. Þá er strikið *conjugate axis* tengistrik punktanna $(0, -b)$ og $(0, b)$. Fyrir breiðboga getur *conjugate axis* eftir ástæðum verið hvort sem er styttri eða lengri en *transverse axis*, eða þá jafnlangur. Með öðrum orðum getur hverju sem er af skilyrðunum $a > b$, $a = b$ og $a < b$ verið fullnægt. [Ásarnir eru jafnlangir þá og því aðeins að aðfellurnar myndi rétt horn. Það þýðir að öll fjögur hornin sem aðfellurnar mynda séu jafnstór, og það þýðir aftur að ofangreindur rétthyrningur er jafnhliða. Því kallast breiðboginn í þessu tilfelli *rectangular, equiangular* eða *equilateral hyperbola.* Á íslenzku mætti kalla hann *jafnása, réttstæðan* eða *jafnhliða breiðboga.*] Orðin *langás* og *skammás* eiga því ekki allskostar vel við um ása breiðbogans. Hvað eiga þeir þá að heita?

Hér eru meiri upplýsingar, sem ég veit ekki hvort skýra málið eða flækja það enn frekar. Í kennslubókinni eftir Juul og Rønnau sem ég lærði í menntaskóla í gamla daga voru ásar sporbaugsins kallaðir *den lille akse* (*lilleaksen*) og *den store akse* (*storaksen*), en ásar breiðbogans voru einfaldlega kallaðir *hyperblens 1. akse* og *hyperblens 2. akse*, og virðist það heldur ódýr lausn. Heitin *major axis* og *minor axis* má þýða sem *langás* og *skammás*, en einnig sem *meginás* og *aukaás*. Þetta gætu líka verið beinar þýðingar á þýzku orðunum *Hauptachse* og *Nebenachse*, sem stundum eru notuð um þessi hugtök, bæði fyrir sporbaug og breiðboga. En einnig hef ég séð þýzku heitin *große Achse* og *kleine Achse* notuð um ása jafnt sporbaugs sem breiðboga, þótt mig gruni að flestir láti sér nægja að nota þau einungis fyrir ása sporbaugsins. Fyrir ása breiðbogans hef ég einnig séð heitin *real axis* og *imaginary axis*, og samsvarandi þýzk heiti *reelle Achse* og *imaginäre Achse*. Heitin *transverse axis* og *conjugate axis* um ása breiðbogans eiga sér einnig samsvarandi þýzk heiti, *transversale Achse* og *konjugierte Achse*. Þýzka orðið *Querachse* hefur verið notað um *minor axis* sporbaugs og breiðboga. Að lokum hefur ásinn gegnum brennipunkta sporbaugs eða breiðboga einnig verið kallaður *focal axis* á ensku og *Brennpunktachse* á þýzku, og þetta mætti þýða með *brenniás* á íslenzku.

Einhverntíma stakk ég upp á að kalla ása breiðbogans *meginás* og *þverás*. Segja má að þetta séu þýðingar á *Hauptachse* og *Querachse*. Orðið *þverás* hefur einnig verið notað um *imaginary axis* í tvinntalnasléttunni, en það virðist einnig koma ágætlega heim við þá staðreynd að *conjugate axis* hefur einnig fengið heitið *imaginary axis*. Nú hafa hins vegar runnið á mig tvær grímur af eftirfarandi ástæðum:

Í fyrsta lagi má einnig líta á *meginás* sem þýðingu á *principal axis*, og í orðaskránni höfum við raunar þýtt *principal axis* með orðunum *meginás, höfuðás*. Heitið *principal axis*, notað um keilusnið, hef ég séð í tveimur merkingum. Í fyrri merkingunni þýðir það línu gegnum brennipunkt keilusniðs hornrétt á leiðilínu keilusniðsins. Þetta veldur engum vanda, því að fyrir sporbaug og breiðboga er þetta einmitt brenniásinn. Fyrir fleygboga er það samhvarfsásinn. [Fleygbogi hefur aðeins einn samhvarfsás, sem yfirleitt er einfaldlega kallaður *ás* fleygbogans.] Í hinni merkingunni, sem ég held að sé kannski orðin algengari nú á dögum, er það notað í almennara samhengi, en þannig að sé því beitt á sporbaug eða breiðboga fellur merkingin saman við *samhvarfsás*. Þannig heita *major axis* og *minor axis* saman *principal axes*.

Í öðru lagi gæti orðið *þverás* hugsanlega misskilizt sem þýðing á *transverse axis* eða *transversale Achse*. Hugsunin í orðinu *þverás* fyrir *conjugate axis* er sú að sá ás stendur þvert á meginásinn (eða með öðrum orðum brenniásinn). En brenniásinn stendur þvert á breiðbogann sjálfan, svo að orðið *þverás* virðist einnig koma til greina sem heiti á honum. [Heimildir mínar um frönsk heiti á ásum breiðbogans eru ekki nægilega fullkomnar, en mér sýnist þó helzt að *axe transverse* á frönsku hafi verið notað um þá báða.] Athugum þó að orðin *transverse* á ensku og *transversal* á þýzku þýða ekki *þverstæður* eða *hornréttur*, heldur eru þau yfirleitt notuð um eitthvað sem sker eitthvað annað og gengur í gegnum það. [Við höfum þýtt nafnorðið *transversal* í almennri merkingu með orðinu *gagnsniðill*; en í sérmerkingunni *transversal of a triangle* hefur það fyrir löngu verið þýtt með orðinu *rim*.] Það mætti hugsa sér að *transverse axis* heiti svo, ekki vegna þess að ásinn standi þvert á breiðbogann, heldur einfaldlega vegna þess að hann er sá af samhvarfsásunum sem sker breiðbogann. Ég er þó ekki viss um að þessi skýring sé rétt, því að í einni bók hef ég fundið orðin *transverse axis* og *conjugate axis* einnig notuð um ása sporbaugsins.

Kannski eru þessar mótbárur þó ekki þungvægar. Mega þýðingarnar *meginás* og *þverás* standa? Ég mun að minnsta kosti nota þær hér á eftir.

Hugum að fleiri orðum sem tengjast keilusniðunum. Strengur gegnum brennipunkt keilusniðs kallast *focal chord*, og það mætti kalla *brennistreng* á íslenzku. Brennistrengur sem er hornréttur á brenniásinn (eða á ásinn, ef keilusniðið er fleygbogi) ber í enskumælandi löndum latneskt heiti, *latus rectum*. Mætti kalla hann *þverbrennistreng* á íslenzku?

Leg allra miðpunkta þeirra strengja í keilusniði sem eru samsíða gefinni línu kallast *diameter* keilusniðsins. Fyrir hring, sporbaug og breiðboga er *diameter* einfaldlega strengur sem liggur gegnum miðju keilusniðsins. Þetta hefur verið kallað *miðstrengur* á íslenzku, og virðist það eðlilegt heiti. En *diameter* fleygboga er hálflína með annan endann á fleygboganum, samsíða ásnum og öll innaní fleygboganum. Orðið *miðstrengur* virðist varla eiga við í þessu tilfelli. Þekkir lesandinn orð fyrir *diameter* sem er heppilegt að nota fyrir *öll* keilusnið?

Skurðpunktur keilusniðs við einhvern af samhvarfsásum sínum kallast yfirleitt *vertex* á ensku, *Scheitel* á þýzku. [Stundum er orðið *vertex* um keilusnið notað í þrengri merkingu, og þá einungis um skurðpunkt keilusniðs við meginásinn (*principal axis*, í fyrri merkingu þess heitis).] Það virðist ekki fráleitt að kalla þetta *hvirfilpunkt* á íslenzku í samræmi við þýzka heitið, en kannast lesendur við önnur íslenzk heiti á þessum punktum? Fleygbogi hefur einn hvirfilpunkt, breiðbogi hefur tvo, og sporbaugur hefur fjóra. Fyrir breiðboga eru hvirfilpunktarnir endapunktar brenniássins, með öðrum orðum punktarnir $(-a, 0)$ og $(a, 0)$ ef breiðboginn hefur jöfnuna (2). Endapunktur þverássins (*conjugate axis*), það er að segja annar af punktunum $(0, -b)$ og $(0, b)$, er kallaður *secondary vertex*, og það höfum við kallað *aukahvirfilpunkt*. Hvirfilpunktar sporbaugsins eru endapunktar ásanna. Fyrir sporbaug með jöfnuna (1) eru það punktarnir $(-a, 0), (a, 0), (0, -b)$ og $(0, b)$. Á þýzku er gerður greinarmunur á hvirfilpunktum sporbaugsins. Endapunktar langássins, það er að segja punktarnir $(-a, 0)$ og $(a, 0)$ eru kallaðir *Hauptscheitel*, en endapunktar skammássins, það er að segja punktarnir $(0, -b)$ og $(0, b)$, eru kallaðir *Nebenscheitel*. [Þessi sömu heiti eru einnig höfð um hvirfilpunkta og aukahvirfilpunkta breiðbogans.] Mér hefur enn ekki tekizt að grafa upp nægar heimildir um keilusnið á ensku til að sjá hvort þessi greinarmunur er einnig gerður á því máli. Mætti kalla þetta *meginhvirfilpunkt* og *aukahvirfilpunkt*?

Athugum sporbaug með jöfnu (1) eða breiðboga með jöfnu (2). Hringirnir með jöfnur $x^2 + y^2 = a^2$ og $x^2 + y^2 = b^2$ kallast *eccentric circles*. [Orðasambandið *eccentric circles* er líka notað um *ósammiðja hringi*, með öðrum orðum hringi sem hafa ekki sömu miðju. Þetta er að sjálfsögðu allt önnur notkun.] Þeim má lýsa sem hringunum sem hafa annan ásinn sem miðstreng, eða sem hringunum sem hafa sömu miðju og keilusniðið og liggja gegnum hvirfilpunkt eða aukahvirfilpunkt. Hringurinn $x^2+y^2 = a^2$ er einnig kallaður *auxiliary circle*, sem mætti þýða beint með orðinu *hjálparhringur*. Ég hef einnig rekizt á þá orðanotkun að *eccentric circles* sporbaugsins séu báðir kallaðir *auxiliary circles*, og þá er talað um *major auxiliary circle* og *minor auxiliary circle*; einnig er einfaldlega talað um *major circle* og *minor circle*. Enn eitt heiti fyrir hringinn $x^2+y^2 = a^2$ er *principal circle*. Á þýzku kallast hringurinn $x^2 + y^2 = a^2$ *Hauptscheitelkreis* eða *Hauptkreis*, en hringurinn $x^2 + y^2 = b^2$ *Nebenscheitelkreis* eða *Nebenkreis*. Mætti kannski kalla þá *hvirfilhringi* sameiginlega og tala um *meginhvirfilhring* eða *meginhring* fyrir *Hauptscheitelkreis* [þótt orðið *megingjörð* sé einnig freistandi], og *aukahvirfilhring* eða *aukahring* fyrir *Nebenscheitelkreis*?

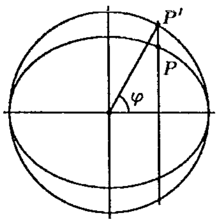
Meginhringurinn (hjálparhringurinn) hefur hlutverki að gegna þegar sporbaugur eða breiðbogi er stikaður. Látum P vera punkt með hnit (x, y) á sporbaug með jöfnu (1). Lóðlínan frá P á brenniásinn sker meginhringinn í punkti P' sömumegin og P við brenniásinn. Látum φ vera hornið sem P' gerir við jákvæða x-ásinn. Hnit punktsins P eru þá

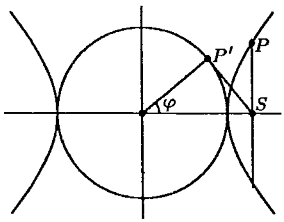
$$x = a\cos\varphi \quad \text{og} \quad y = b\sin\varphi.$$

Látum nú P vera punkt með hnit (x, y) á breiðboga með jöfnu (2). Látum S vera fótpunkt lóðlínunnar frá P á brenniásinn, og drögum snertil frá S að meginhringnum sem snertir hann í punkti P' sömumegin og P við brenniásinn. Látum φ vera hornið sem P' gerir við jákvæða raunásinn. Hnit punktsins P eru þá

$$x = \frac{a}{\cos\varphi} \quad \text{og} \quad y = b\tan\varphi.$$

Í báðum tilfellum kallast hornið φ *eccentric angle* punktsins P á keilusniðinu. Hvað á að kalla það á íslenzku?





Fleiri hringir tengjast sporbaug og breiðboga. Teiknum fyrir gefinn sporbaug eða breiðboga hring með miðju í öðrum brennipunktinum og geisla sem er jafn brenniásnum (það er að segja langásnum ef um sporbaug er að ræða, meginásnum ef um breiðboga er að ræða). Hvort keilusniðið um sig hefur tvo slíka hringi, einn með miðju í hvorum brennipunkti. Slíkur hringur hefur þann eiginleika að sporbaugurinn [breiðboginn] er leg miðpunkta þeirra hringa sem snerta gefna hringinn og liggja gegnum hinn brennipunktinn. Hann virðist vera kallaður *director circle* eða *directrix circle* á ensku, en *Leitkreis* eða *Richtungskreis* á þýzku. Eðlilegt virðist að kalla hann *stýrihring* á íslenzku.

Fyrir ytri punkt gefins sporbaugs [breiðboga] eru alltaf til nákvæmlega tveir snertlar frá punktinum að sporbaugnum [breiðboganum]; til að þessi fullyrðing sé allskostar rétt þarf þó að telja aðfellur breiðbogans til snertla (og líta svo á að þær snerti hann í óendanlega fjarlægum punkti). Leg þeirra punkta þannig að snertlarnir tveir séu hornréttir hvor á annan er hringur, nefnilega hringurinn $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ fyrir sporbaug með jöfnu (1), en hringurinn $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ fyrir breiðboga með jöfnu (2). [Fyrir breiðboga úrkynjast hringurinn og verður að punkti ef $a = b$, en hverfur ef $a < b$.] Þessi hringur hefur líka verið kallaður *director circle* eða einfaldlega *director* á ensku og *Leitkreis* á þýzku. Annað enskt heiti er *orthoptic circle*, og önnur þýzk heiti eru *Hauptkreis*, *Direktorkreis*, *orthoptischer Kreis* og *Mongescher Kreis*. Við sjáum því að orðin *Leitkreis* og *Hauptkreis* hafa bæði fengið nýja merkingu. Hvað á að kalla þennan hring á íslenzku? Heitið *orthoptic circle* er væntanlega hugsað þannig að hringurinn er leg þeirra punkta þaðan sem keilusniðið sést undir réttu horni. Kannski mætti kalla þetta *réttsýnishring*?

$$\varphi\left(\frac{\sum a_\nu x_\nu}{\sum a_\nu}\right) \leqq \frac{\sum a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum a_\nu}$$

Íslenzka stærðfræðafélagið
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Fjölritunarstofa
Daníels Halldórssonar