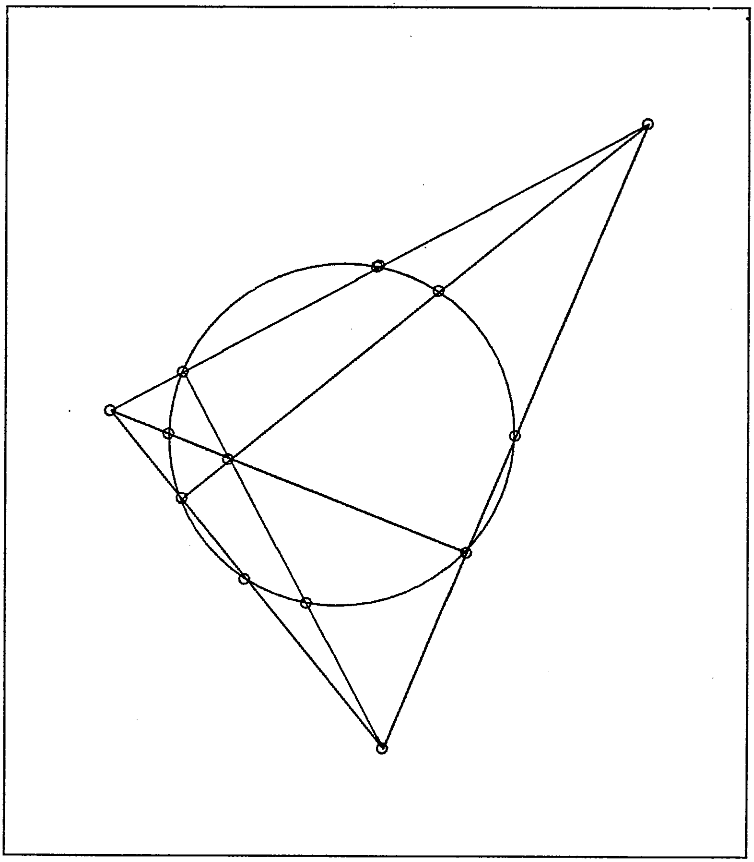
FRÉTTABRÉF

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGSINS

1. tbl. 5. árg. Febrúar 1993



Fréttabréf Íslenzka stærðfræðafélagsins

Ritstjóri: Jón Ragnar Stefánsson

Stjórn Íslenzka stærðfræðafélagsins

til aðalfundar 21. janúar 1993:		*frá aðalfundi 21. janúar 1993:*
Jón Ragnar Stefánsson	*formaður*	Hermann Þórisson
Kristín Halla Jónsdóttir	*gjaldkeri*	Kristín Halla Jónsdóttir
Sven Þ. Sigurðsson	*ritari*	Jón Kr. Arason

Póstfang:

Raunvísindastofnun Háskólans, Dunhaga 3, IS-107 Reykjavík

Efni

Af efni blaðsins 3
Bréf frá Bjarna Jónssyni 4
Þorvaldur Búason: Sést milli Íslands og Grænlands? 7
Sverrir Örn Þorvaldsson: Ólympíuleikarnir í stærðfræði 1992 24
Evrópska stærðfræðingaþingið í París 27
Robert Magnus: Hringar sem snertast 28
Halldór I. Elíasson: Verðlaun Ólafs Daníelssonar og Sigurðar Guðmundssonar 40
Alþjóðaþingið um stærðfræðimenntun 44
Skrá yfir fyrirlestra 1990–92 45
Reynir Axelsson: Ræða eftir Björn Gunnlaugsson 52
Björn Gunnlaugsson: Um nytsemi mælifræðinnar 54
Ritfregnir 66
Sverrir Örn Þorvaldsson: Lausnir á Ólympíudæmunum 1992 68
Nýir félagsmenn 74
Útgáfurit félagsins 75

Á forsíðu er *níupunkta hringurinn,* sem einnig er nefndur *hringur Feuerbachs,* en hann er ein af djásnum rúmfræðinnar. Hver svo sem þríhyrningurinn er liggja á einum og sama hringnum þessir níu punktar, þar sem þrír eru af hverju tagi: Fótpunktar hæðanna, miðpunktar hliðanna og miðpunktar tengilínanna frá skurðpunkti hæðanna út til hornpunktanna. Með hæfilegri tilsögn gæti sönnun á þessari setningu verið mörgum menntaskólanemandanum holl rúmfræðiæfing.

AF EFNI BLAÐSINS

Efni *Fréttabréfs* er sem fyrr af margvíslegum toga spunnið en allt er það vitaskuld með einhverju stærðfræðilegu ívafi.

Lengsta greinin fjallar um það, sem talið hefur verið gamalkunn staðreynd og hver hefur haft eftir öðrum öldum saman, að frá Íslandi megi sjá í góðu skyggni til Grænlands. *Þorvaldur Búason* kryfur málið til mergjar og beitir jöfnum höndum stærðfræðilegum sem eðlisfræðilegum rökum. Undirstaða slíkrar athugunar er auðvitað niðurstöður landmælinga um legu og hæð fjalla í þessum tveimur grannlöndum. *Björn Gunnlaugsson* var brautryðjandi hér á landi í landmælingum, sem á hans tíma voru einna fremstar hinna heimfærðu stærðfræðilegu vísinda. En hann var ekki síður brautryðjandi í kennslu og iðkun stærðfræði almennt og fer því vel á að gefa hér út áður óbirta ræðu, sem hann hélt í Bessastaðaskóla um þær mundir sem hann hóf þar kennslu, með almennum hugleiðingum um nytsemi *mælifræðinnar* svo sem stærðfræði þar var nefnd.

Bréf þau frá *Vilhjálmi á Narfeyri*, sem birtust í síðasta *Fréttabréfi*, urðu *Bjarna Jónssyni* tilefni til að senda athyglisvert bréf um Vilhjálm og hans verk, sem hér birtist, auk þess sem hann sendi hingað til lands verðmæt handrit Vilhjálms, sem í fórum hans voru. Eins og lesendur minnast bárust félaginu áðurnefnd bréf Vilhjálms sl. vor frá Gústafi Lárussyni, fyrrum skólastjóra á Ísafirði, en hann lézt nú í haust.

Robert Magnus tekur í grein sinni fyrir heillandi viðfangsefni í rúmfræði og gaf sú grein svo af sér efnivið í myndir bæði á forsíðu og baksíðu.

Af öðru efni, sem lesandinn finnur á síðum *Fréttabréfs*, má nefna frásögn frá *Ólympíuleikunum í stærðfræði* svo og skýrslu um hinn veglega verðlaunasjóð, sem *Svanhildur Ólafsdóttir* stofnaði árið 1955.

Á baksíðu er myndræn lýsing á *setningunni um níupunkta hringinn* eða *setningu Feuerbachs*. Hver svo sem þríhyrningurinn er gildir um níupunkta hringinn, að hann snertir innritaðan hring þríhyrningsins og einnig alla utanverðu snertihringana þrjá. Frásögn hér í *Fréttabréfi* af leitinni að einfaldri sönnun á þessari forvitnilegu setningu hefst á sundlaugarbarmi austur í Peking og berst síðan með óvæntum og ævintýralegum hætti víða um heim.

BRÉF FRÁ BJARNA JÓNSSYNI

Í framhaldi af því, að í síðasta *Fréttabréfi* í júlí sl. voru birt *„Þrjú bréf frá Vilhjálmi á Narfeyri“*, barst verðmæt sending vestan um haf frá Bjarna Jónssyni með nokkrum handritum Vilhjálms og bréfum. Sendingunni fylgdi svo bréf frá Bjarna um Vilhjálm og verk hans.

Í sendingu Bjarna var í frumriti handrit Vilhjálms Ögmundssonar með fyrirsögninni *„Margföldun stærða í n-víðu rúmi“*, 13 síður alls, ásamt tveimur bréfum hans til Bjarna um efni þess, hið fyrra dags. 26. apríl 1955 og hið síðara 13. marz 1956, 8–9 síður hvort bréf; ennfremur fylgdu tvær stílabækur eða kompur Vilhjálms, önnur frá 1941 en hin ómerkt.

Samskipti Bjarna og Vilhjálms hófust veturinn, sem Bjarni starfaði við Háskóla Íslands, 1954–55. Bréfaskiptin leiddu til þess, að hin merka grein Vilhjálms, *„Multiplication in n dimensions“*, birtist í hinni ensku gerð sinni í *Nordisk Matematisk Tidskrift*, 7. bindi (1959), bls. 111–116. Raunar kom fyrsti afrakstur þessara bréfa á prenti tveimur árum fyrr, því í sama tímariti, 5. bindi (1957), bls. 48, er dæmi frá Vilhjálmi um kúluferhyrning, en þá niðurstöðu, sem þar er lýst eftir, fékk hann einmitt fram í lok seinna bréfsins.

Bréf það, sem Bjarni lét fylgja sendingunni, á vissulega erindi til fleiri en viðtakandans eins, og hefur hann góðfúslega heimilað, að það verði birt hér í heild sinni. Neðanmálsgreinar eru frá ritstjóra komnar svo og þýðing á umsögninni í *Mathematical Reviews.*

Nashville,
12. september 1992

Kæri Jón Ragnar.

Þegar ég las bréf Vilhjálms í Fréttabréfinu, *þá datt mér í hug, að þið kynnuð að vilja hafa þessi plögg líka.*

Um „Multiplication in n dimensions“ *segir í* MR 22 *(1961), # 722:*

Höfundurinn sýnir grunnstæða sönnun á niðurstöðu Hurwitz, að einu endanlega víðu línulegu algebrurnar yfir rauntalnasviðið, sem eru staðlaðar með $\|xy\| = \|x\|\,\|y\|$, séu rauntölurnar og tvinntölurnar, fertölurnar og Cayley-tölurnar.

Meira var það nú ekki. Þetta var það, sem virtist vera nýtt hjá honum, og því birtandi í stærðfræðilegu tímariti. En þó gefur þetta litla hugmynd um, hvað Vilhjálmur hafði áorkað, og því meira sem ég hugsa um það, því ótrúlegra þykir mér það.

Samkvæmt „Men of Mathematics“ *eftir E. T. Bell, þá tók það Hamilton fimmtán ár að uppgötva quaternionana. Sjálfur taldi hann þetta vera sitt mesta afrek, og síðustu tuttugu æviár hans fóru í að rannsaka og kynna þetta nýja talnakerfi. Fyrir þetta heiðraði* National Academy of Science *í Bandaríkjunum hann með því að gera hann að meðlimi, og var hann fyrsti útlendingurinn til að hljóta þann heiður. Ekki veit ég, hver var fyrstur til að sjá, að vídd rúmsins yrði að vera veldi af tveimur,* $n = 2^k$, *en þegar það var vitað, þá var* $n = 8$ *næst. Hér var það Cayley, sem kom með lausnina:* Cayley-tölurnar. *Samkvæmt neðanmálsgrein í ritgerð Hurwitz, sem ég læt fylgja, þá taldi Cayley, að hann hefði sýnt, að í 16-víðu rúmi væri engin margföldun til, sem fullnægði þeim skilyrðum, sem sett höfðu verið, en sönnun hans var röng. En svo sannaði Hurwitz þetta í sinni grein.*[1]

Þarmeð var verkefnið leyst, en það voru engir smákarlar, sem þarna höfðu verið á ferðinni. Í „Men of Mathematics“ *fjallar einn kapítulinn um Hamilton en annar um Cayley og samstarfsmann hans, Sylvester. Ég veit lítið um Hurwitz, en hann mun hafa verið einn af fremstu stærðfræðingum sinnar kynslóðar. Og svo kom þessi óskólagengni bóndi og gerði þetta allt einsamall á svo mikið einfaldari hátt í tómstundum sínum. Ég man nú raunar ekki eftir því, að íslenskir bændur hefðu tómstundir.*

Hvernig var þetta hægt? Ég ætla mér ekki þá dul, að ég geti skýrt það, en handritið „Margföldun stærða í n-víðu rúmi“ *gefur góða hugmynd um, hvernig Vilhjálmur hugsaði. Ritgerðin, sem birtist í* Nordisk Matematisk Tidskrift, *var byggð meira á bréfunum, en upphaflega handritið er að sumu leyti fróðlegra. Það er með afbrigðum vel skrifað, svo að auðvelt er að fylgjast með rökfærslunni. Það*

[1] A. Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, (1898), 309–316.

sem helst gefur til kynna, að hér er ekki atvinnustærðfræðingur á ferðinni, er að hann setur ekki fullkomlega fram forsendurnar, sem hann gengur út frá, þ.e.a.s. skilyrðin, sem margföldunin verði að fullnægja, en þetta er auðvelt að lesa á milli línanna. Rökfærslan er að mestu leyti geometrísk. Á einum stað yfirsást honum, og var því niðurstaðan í handritinu röng. Hann taldi sig hafa sannað, að alltaf væri til margföldun í 2^k*-víðu rúmi, en þegar ég benti honum á skyssuna, þá kom rétta lausnin um hæl, enda var það einfalt mál eins og hann hafði búið um hnútana. Þetta er í seinna bréfinu.*

Ég hef oft verið spurður, hvort stærðfræði væri sérgáfa, hvort stærðfræðingar hugsuðu öðruvísi en annað fólk. Svarið er sennilega bæði já og nei. Það er til margt fólk, sem getur gert marga hluti vel, að stærðfræðinni meðtalinni. En það virðist einnig vera til einhver sérgáfa, sem hvorki innifelur né útilokar almenna skynsemi. Ef einhver ætlaði að rannsaka þetta, þá þyrfti hann sennilega að vera bæði stærðfræðingur og sálfræðingur. En hins vegar held ég, að varla væri hægt að finna betra rannsóknarefni en Vilhjálm, vegna þess að hæfileikarnir hljóta að hafa verið gífurlegir, en þjálfunin var því nær engin. Það er mikið deilt um, hvort ráði meiru, nature *eða* nurture.[2] *Þetta virðist vera dæmi, þar sem* nurture *kom næsta lítið við söguna.*

Hundrað ára afmæli Vilhjálms fer nú að nálgast, og verður þess sennilega minnst á einhvern hátt. Mér þætti vel til fallið, að það væri gert með alvarlegri rannsókn á þessu efni, en ekki eingöngu með hólgreinum, þó að sjálfsögðu eigi hann slíkt skilið.

Blessaður,
Bjarni.

[2] þ.e. erfðir eða aðbúð.

Þorvaldur Búason:

SÉST MILLI ÍSLANDS OG GRÆNLANDS ?

Inngangur. Frumkvæði að þessum hugleiðingum átti Jónas Hörðdal Jónsson bóndi í Breiðavík í Rauðasandshreppi, en gestir hans hafa oft velt því fyrir sér, hvort unnt sé að sjá milli fjalla á Vestfjörðum og Austur-Grænlandi.

Fjöll á Vestfjörðum eru ekki há, hin hæstu einungis um 1000 m. Á Austur-Grænlandi eru aftur á móti há fjöll, og um 2300 m hár fjallgarður teygir sig meðfram ströndinni, en inn af honum nær jökulbungan 3000 m hæð. Hæstu tindar þar eru Silungsfjall, 3360 m hátt syðst og vestast á þessum hrygg, en Gunnbjarnarfjall, sem er 3700 m hátt, nyrzt og austast. Silungsfjall er sennilega fjallið Hvítserkur, sem getið er um í fornum heimildum.

Því hefur lengi verið haldið fram, að sjá megi þessi fjöll á Austur-Grænlandi frá tilteknum stöðum á Vestfjörðum, t.d. frá Bjargtöngum, sem eru vestasta nes landsins, af Kaldbak norðan Arnarfjarðar, sem er hæsta fjall á Vestfjörðum, og af Bolafjalli fyrir utan Bolungarvík, svo og af Snæfellsjökli.

Í *Gronlandia* segir Arngrímur lærði Jónsson t.d., að það sé „*gamalt mál manna, að á miðri leið milli Íslands og Grænlands megi í senn sjá Hvítserk á Grænlandi og Snæfellsjökul á Íslandi í heiðskíru veðri.*“[1]

Í bókinni *Grænland* segir Vilhjálmur Stefánsson landkönnuður, að

> *ekki þurfi að fara langt undan landi á Vestfjörðum til þess að sjáist til beggja landanna, Grænlands framundan í norðvestri og Íslands afturundan í suðaustri. Ef fjall á Vestfjörðum er klifið nokkrum sinnum, hlýtur að reka að því, að sjáist til Blosseville-strandar. Hillingar eru tíðar, en ekki þarf hillingar til. Í báðum löndum eru fjöll nægilega há til þess, að ávallt sést fjallstinda á milli í heiðskíru veðri.*

Og Vilhjálmur segir einnig:

> *Kringum árið 950 fór af Jaðri í Noregi rauðhærður drengur, Eiríkur að nafni, með útlægri fjölskyldu föður síns, Þorvalds Ásvaldssonar, en hann var sekur um manndráp. Þau námu land á Íslandi og*

---

[1] Arngrímur Jónsson, *Gronlandia (1688)*, Facsimile, Einar Munksgaard, 1942, bls. 5.

bjuggu á ýmsum jörðum á Vesturlandi og var ein þeirra þannig í sveit sett, að þau kynnu að hafa séð Grænland, ef þau hefðu klifið réttan fjallstind í hagstæðu veðri.[2]

Ýmsir fleiri fræðimenn hafa líkt og Vilhjálmur Stefánsson talið, að slíkar sýnir hafi skipt máli um landafundi. Mörg fleiri og nýlegri dæmi eru til þess efnis, að menn telji unnt að sjá fjöll á Grænlandi frá Vestfjörðum.[3] Hér verður litið á nokkur atriði, sem skipta sköpum í þessu sambandi:

Fjarlægð milli staða.	Hillingar.
Bunga jarðar.	Deyfing ljóss.
Sveigja ljósgeisla í andrúmslofti.	Heimildir um lengstu sjónferla.

Fjarlægð milli Vestfjarðafjalla og hæstu tinda á Austur-Grænlandi

Lengd og breidd staða, sem koma hér við sögu, er tilgreind hér að neðan ásamt hæð yfir sjávarmál.[4]

		Lengd	*Breidd*	*Hæð*
Á Íslandi:	Bjargtangar	24,6°	65,5°	40 m
	Kaldbakur	23,7°	65,8°	1000 m
	Bolafjall	23,4°	66,1°	600 m
Á Grænlandi:	Silungsfjall	37,0°	67,0°	3360 m
	Gunnbjarnarfjall	29,9°	68,9°	3700 m

---

2 Vilhjálmur Stefánsson, *Greenland,* Doubleday, Doran & Company, Inc., Garen City, 1944, bls. 43 og 66.

3 Ólafur Halldórsson, *Grænland í miðaldaritum,* Sögufélag, 1978. Í ritinu er að finna flest dæmi úr fornum ritum, þar sem sagt er frá því, að menn þóttust sjá frá Íslandi til Grænlands og frá Íslandi til Krosseyja og Gunnbjarnareyja, sem áttu að vera í hafinu milli þess og Grænlands (bls. 272–7).

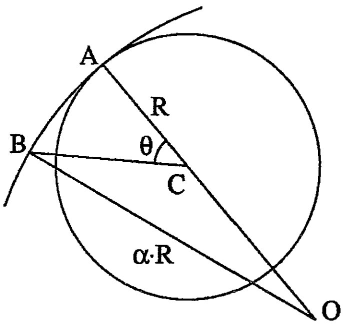
Sjá einnig *Heimsmetabók Guinness,* Örn og Örlygur hf., 1985; *Íslandsmetabók Arnar og Örlygs,* Örn og Örlygur hf., 1983; *Við sem fljúgum,* Flugleiðir hf., 1989.

4 Á Íslandi er hnattstaðan áætluð eftir uppdrætti. *Uppdráttur Íslands,* Geodætisk Institut (*Ferðakort yfir Vesturland,* Landmælingar Íslands, 1979). Hnattstaða utan Íslands er byggð á upplýsingum í *Encyclopædia Britannica* (1974).

Út frá hnattstöðu má ákvarða fjarlægðir frá útsýnisstöðunum á Vestfjörðum til fjallanna á Grænlandi og stefnuna til þeirra. Fjarlægðir til Silungsfjalls eru allar meiri en 580 km. Til Gunnbjarnarfjalls frá Bjargtöngum eru 443 km og stefnan $28,7°$ vestan við norður, frá Kaldbak eru 436 km og stefnan $34,8°$ vestan við norður og frá Bolafjalli eru 417 km og stefnan $38,7°$ vestan við norður. Hinn hái fjallshryggur á Austur-Grænlandi spannar u.þ.b. $40°$ sjónarhorn séð frá Vestfjörðum frá vest-norðvestri til norð-norðvesturs.

Bunga jarðar

Nálgun sjónferla. Þegar fjarlægð vex milli staða, ber bungu jarðar í milli. Nálgunargildi á fjarlægðum til sjóndeildarhrings fyrir sjónferla, sem eru hringbogar, má finna á eftirfarandi hátt.



1. mynd

Á *1. mynd* er O krappamiðja ljósferils, C er miðja jarðar, $s = R\theta$ er vegalengd eftir yfirborði jarðar frá A til punkts lóðrétt neðan B, sem er í hæð h. Kósínusreglu er beitt á þríhyrninginn OBC, þar sem $CA = R$ er geisli jarðar ($\approx$ 6370 km), $OB = \alpha R$ er krappageisli ljósferils, $OC = \alpha R - R = R(\alpha - 1)$ og $CB = R + h$. Þá fæst:

$$(R\alpha)^2 = (R+h)^2 + (R\alpha - R)^2 + 2(R+h)(R\alpha - R)\cos\theta.$$

Með nálguninni $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ og með því að sleppa liðum $h/R \ll 1$ fæst þá:

$$\theta^2 \approx \frac{2h\alpha}{R(\alpha-1)}, \quad \text{þ.e.} \quad s \approx \sqrt{\frac{2\alpha h R}{\alpha - 1}}.$$

Nálgun á fjarlægð til sjóndeildarhrings fyrir beina sjónferla fæst með því að láta α stefna á óendanlegt, þ.e. $s \approx \sqrt{2hR} = 3,57 \cdot \sqrt{h}$, ef hæð er sett inn í metrum og fjarlægðin mæld í km. Hliðstæð nálgun fyrir sveigða ljósferla með krappageisla αR er $s = 3,57 \cdot \sqrt{\alpha h/(\alpha - 1)}$.

Bein sjónlína milli staða. Hagstæðast ætti að vera að sjá Gunnbjarnarfjall af Kaldbak. Af 1000 m háu fjalli er sjóndeildarhringur í 115 km fjarlægð og af 3700 m háu fjalli er sjónlínan 220 km, ef reiknað er með beinum ferlum ljósgeisla. Ef sjást á milli tindanna, má fjarlægð ekki vera meiri en 335 km. Hún er hins vegar 436 km. Eigi efstu 1000 m hærra fjallsins að sjást, má fjarlægðin ekki vera meiri en um 300 km.

Ljósgeisli beygir á ferð sinni gegnum andrúmsloftið. Þess vegna útilokar þessi staðreynd ekki, að sjá megi fjöll á Austur-Grænlandi frá Vestfjörðum. Úr því álitamáli verður ekki skorið nema vitað sé, hversu mikið ljósgeisli þyrfti að beygja, og hvort skilyrði í andrúmslofti séu nokkurn tíma þannig, að hann sveigi svo mikið.

Bogi með minnstum mögulegum krappa milli tinda. Við venjuleg skilyrði í andrúmslofti veldur breyting á eðlismassa lofts með hæð því, að sem næst láréttur geisli sveigist niður á við, og er krappageisli ferilsins þá um 6 jarðargeislar. Af 1000 m háu fjalli er þá sjóndeildarhringur í 125 km fjarlægð og af 3700 m háu fjalli í 240 km fjarlægð. Fjarlægð milli þessara tinda mætti því ekki vera meiri en 365 km og reyndar ekki meiri en 330 km, sé eins og áður gert ráð fyrir, að 1000 efstu metrar hærra fjallsins sjáist.

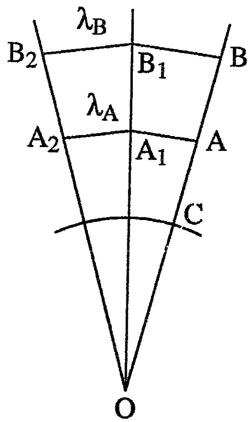
En hver er geisli hringboga milli fjalla A og B, sem snertir bungu jarðar milli A og B? Slíkur ferill mun hafa minnsta mögulegan krappa og stærstan geisla. Nota má sömu nálgun og fyrr til þess að finna hann. Hringbogi milli Kaldbaks (1000 m hæð) og Gunnbjarnarfjalls (3700 m hæð), sem snertir bungu jarðar á stórhring milli tindanna, hefur geisla, sem er 2,3 jarðargeislar eða um 14700 km, og geislinn þarf að vera enn styttri eða 1,9 jarðargeislar, ef efstu 1000 m Gunnbjarnarfjalls eiga að sjást.

Sveigja ljósgeisla í andrúmslofti

Hversu mikið sveigir ljósgeisli á leið gegnum andrúmsloftið? Til að gera sér grein fyrir, hvernig sá ljósgeisli sveigir, sem fer eftir sem næst láréttum ferli í andrúmslofti, má skoða *2. mynd.*[5]

Í A og B eru mismunandi brotstuðlar, stuðullinn er hærri í A og bylgjulengd ljóssins λ_A þar er því styttri en í B, þar sem hún er λ_B. Línan gegnum A og B er dregin um ímyndaða ölduhryggi, sömuleiðis gegnum A_1 og B_1. Séu skilyrði hin sömu í A_1 og B_1, eins og þau voru í A og B, má með sömu rökum draga línu gegnum A_2 og B_2. Allar þessar línur skerast í O.

Þannig má halda áfram koll af kolli. Þetta svarar til þess, að punktar A_i og B_i á ljósölduhrygg liggi á hringbogum með miðju í O og geisla OA_i og OB_i. OA_i er krappageisli ljósferils gegnum A_i.



2. mynd

Þríhyrningarnir OBB_1 og OAA_1 á myndinni eru einslaga og því gildir:

$$\frac{OA}{OA+AB} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{n_B}{n_A} = \frac{1+u_B}{1+u_A},$$

þar sem $n_X = 1+u_X$ er brotstuðull lofts og u_X er væntanlega lítil stærð. Nú má finna OA úr þessum líkingum og fæst þá:

$$OA = \frac{1+u_B}{u_A-u_B}AB.$$

Ef AB er látin vera örlítil hæðarbreyting dh, hæð yfir yfirborð hnattar CA táknuð með h og krappageislinn OA með r_k, fæst:

$$r_k = \frac{1+u}{\sin\beta(-du/dh)}, \tag{1}$$

þar sem du/dh er stigull fráviksins í brotstuðlinum, þ.e. breyting fráviksins, þegar hæð hækkar um 1 m, og β er hornið, sem stefna ljósgeislans

[5] W. J. Humphreys, *Physics of the Air*, Dover, 1964.

myndar við lóðlínu, því hér er tekið tillit til þess möguleika, að ljósgeisli hafi ekki nauðsynlega lárétta stefnu. Þess vegna er unnt að ákvarða krappageisla ljósferla í andrúmslofti, ef þekkt er breyting á brotstuðli með hæð. Reikna má með, að u breytist þannig með þrýstingi og hitastigi:[6]

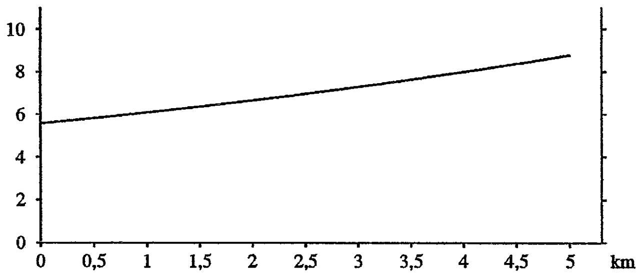
$$u = u_S \frac{B/B_S}{T/T_S}.$$

Hér er u_S frávik brotstuðulsins í andrúmslofti við staðalaðstæður ($u_S = 0,000276$), B er þrýstingur, B_S staðalþrýstingur (760 mm Hg), T er hiti mældur í Kelvín og T_S er 273,15 K.

Sé gert ráð fyrir, að hitastig breytist línulega með hæð, fæst fyrir loftþrýsting:[7]

$$\frac{B}{B_0} = (1 + \frac{ah}{T_0})^{-v/a}, \qquad v = \frac{Mg}{R}.$$

Hér er B_0 þrýstingur við sjávarmál, h hæð yfir sjávarmál, a hitastigull með hæð, T_0 hiti við sjávarmál í Kelvín, R gasfastinn (8,3143 J/(K·mól)), g þyngdarhröðun (9,82 m/s^2) og M meðalmólmassi andrúmslofts ($\approx$ 0,029 kg/mól).



3. mynd. Krappageislar mældir í jarðargeislum.

[6] *Tables of Physical and Chemical Constants*, unnar af G. W. C. Kaye og T. H. Laby, Longmans, Green and Co., 1956.

[7] Fæst með heildun loftþyngdarlíkingarinnar $dB = \frac{BMg\,dh}{RT(h)}$, þar sem $T(h) = T_0 + ah$.

Á grundvelli þessara forsendna er *3. mynd* fengin og er gert ráð fyrir $7\,^\circ$C hita við yfirborð sjávar og $a = -0,005\,^\circ\mathrm{C/m}$. Krappageisli ljósferils milli fjallstinda, sem hér er til athugunar, hlýtur samkvæmt því að vera frá 5,5 til 6,5 jarðargeislar.

Stærsti geisli hringboga, sem liggur milli tinda á Vestfjörðum og á Austur-Grænlandi og snertir yfirborð jarðar, er um 2,3 jarðargeislar. Hér munar því æði miklu. Munurinn er reyndar meiri, því þá hefur verið reiknað með ferlum milli tinda. Til að greina fjall verður efsti hluti þess að sjást, t.d. efstu 1000 metrarnir. Stærsti geisli yrði þá einungis um 1,9 jarðargeislar eins og áður hefur komið fram.

Unnt er að hugsa sér lítinn hnött með lofthjúp, þar sem þau skilyrði eru ríkjandi, að hnattarmiðja er einmitt krappamiðja ljósferla, sem beint er lárétt. Ef ekkert skyggði á og ljósgeisli deyfðist ekki, sæi geimfari mynd sína flatta um allan sjóndeildarhringinn, því hann sæi sjálfan sig í hvaða átt sem hann liti. Hann sæi stjörnu í hvirfilpunkti andfætlings, mynd hennar sæist margföld um allan sjóndeildarhringinn nálægt láréttri stefnu. Sérhver önnur stjarna sæist margföld á meira en einum stað á himinhvolfinu á sama hringboga frá hvirfilpunkti til sjóndeildarhrings nærri láréttri stefnu.

Diffurlíking ljósferla. Sömu niðurstöðu og fékkst í fyrri kafla má einnig fá með því að nota lögmál Snells

$$\sin\beta \cdot n = \sin\beta' \cdot n',$$

þar sem β er hornið, sem stefna ljósgeislans myndar við lóðlínu í hæð h, og β' er hornið í hæð $h + dh$. Þá er

$$\frac{\sin\beta' - \sin\beta}{\sin\beta} = \frac{1/n' - 1/n}{1/n},$$

svo að

$$n\cot\beta\, d\beta = -\frac{dn}{dh}\, dh,$$

sem jafngildir

$$\text{krappi} = \frac{d\beta}{ds} = -\sin\beta\,\frac{dn/dh}{n}.$$

Þetta er sama niðurstaða og í jöfnu (1), því $n = 1 + u$ og krappi $= 1/r_k$.

Séu notuð pólhnit (r, θ) og miðað við jarðarmiðju, fæst diffurlíking fyrir feril ljósgeisla:

$$\frac{r^2 + 2(r')^2 - r\,r''}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \frac{dn/dr}{n},$$

þar sem afleiður með tilliti til θ eru auðkenndar með $'$. Með nýjum breytum $b = R\theta$ og $h = r - R$, þar sem R er jarðargeisli, og með því að rita $n = 1 + u$ má lýsa ferlum ljósgeisla með líkingunni:

$$\frac{d^2h}{db^2} = \frac{2}{R+h}\left(\frac{dh}{db}\right)^2 + \frac{R+h}{R^2} + \left[\left(\frac{dh}{db}\right)^2 + \left(\frac{R+h}{R}\right)^2\right] \frac{du/dh}{1+u}, \qquad (2)$$

þar sem h er hæð geislans, b er bogalengd mæld eftir yfirborði jarðar og R er jarðargeisli.

Ef $(dh/db)_{|h=H} = 0$, þ.e. stefna geislans er lárétt í H, og að auki gildir, að

$$(R+H)\left(\frac{du/dh}{1+u}\right)_{|h=H} = -1, \qquad (3)$$

fæst:

$$\frac{d^2h}{db^2} = \frac{R+H}{R^2}\left(1 + (R+H)\left(\frac{du/dh}{1+u}\right)_{|h=H}\right) = 0,$$

en það jafngildir því, að krappageisli ljósferilsins sé einmitt jafn $R + H$. Hæðin h mun þá ekki breytast. Þessi hæð H er hér kölluð *sérstöðuhæð*. Hún tengist fyrirbærinu hillingar svo sem lýst verður í næsta kafla, og þarf sérstæð skilyrði í andrúmslofti til að (3) sé fullnægt. Rita má líkinguna í enn nýjum hnitum $y = h - H$ og sleppa öllum annars stigs liðum í dy/db og y svo og liðum með y/R^2. Í grennd við sérstöðuhæð má rita:

$$\frac{du/dy}{1+u} = \frac{1 - g(y)}{R+H} \approx -\frac{1}{R+H}[1 - g'(0)y],$$

þar sem $g(0) = 0$ og $g'(0) > 0$ (krappi minnkar með hæð). Líkingin verður þá:

$$\frac{d^2y}{db^2} = \frac{R+H}{R^2} g'(0) y.$$

Í stað þess að skoða annars stigs líkingu eru samheyrandi líkingar skoðaðar:

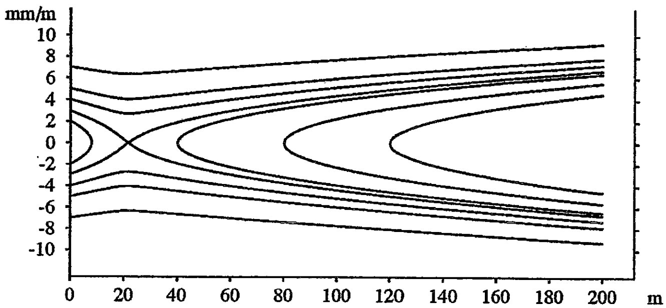
$$\frac{dy}{db} = z, \qquad \frac{dz}{db} = \frac{R+H}{R^2} g'(0)y.$$

Þetta er dæmigert diffurlíkingahneppi með sérstöðupunkti, sem er söðulpunktur, og hefur óstöðugar lausnir í grennd við sérstöðuferil. Setja má

$$f(h) = (R+h)\frac{du/dh}{1+u}$$

í (2) og margfalda báðar hliðar með dh/db. Þá er nærtæk nálgun að fella niður þriðja stigs liði í dh/db og heilda. Fæst þá nálgunin:

$$\frac{dh}{db} = \sqrt{\left(\frac{dh}{db}\right)^2(0) + 2\int_0^h \frac{R+\eta}{R^2}(1+f(\eta))\,d\eta}.$$

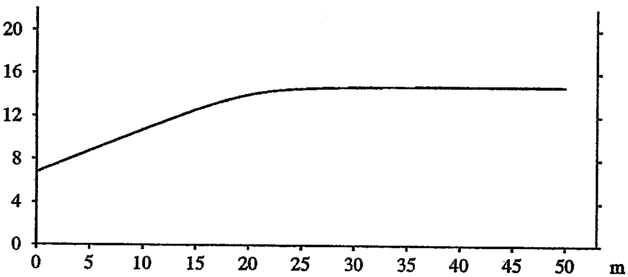


4. mynd

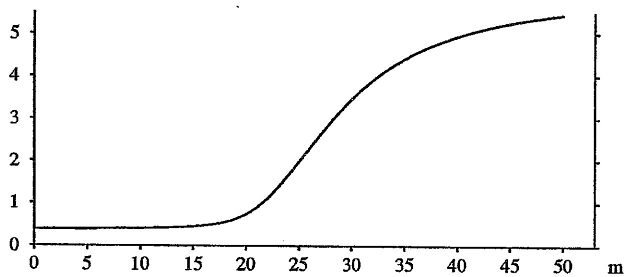
Þessa niðurstöðu má nota til að reikna út dh/db sem fall af h fyrir mismunandi lausnarferla. Ferlar slíkra falla eru sýndir á *4. mynd*, en þar er gengið út frá skilyrðum í andrúmslofti, sem tengjast hillingum. Í sérstöðupunktinum ($h = H, dh/db = 0$) mætast sérstöðuferlar. Örlítil breyting á dh/db fyrir tiltekið h ($> H$) nálægt sérstöðuferli skiptir sköpum um það, hvort lausnarferill sveigir til jarðar eins og ferlar neðan sérstöðuferlanna eða fjarlægist aftur eins og ferlar í krikanum hægra megin við sérstöðupunktinn.

Hillingar

Ferlar ljóss, sem sveigja eftir yfirborði jarðar. Hillingar tengjast skilyrðum í andrúmslofti, þegar hiti fer hækkandi með hæð. Slík skilyrði myndast oft yfir sjó á norðlægum slóðum. Hitinn getur hækkað um tíu stig á innan við tuttugu metrum, en fer síðan lækkandi. Krappageisli ljósferils í þessu þunna lagi getur verið mun minni en jarðargeisli. Þetta lag er þunnt, það er rétt yfir yfirborði sjávar og háð hita hans. Alls ekki er um jafnvægi að ræða. Erfitt er að hugsa sér það nægilega víðáttumikið og stöðugt, til þess að ljósferill sveigi hæfilega mikið langan veg. En ekki er ástæða til að útiloka það.



5. mynd. Hitastig mælt í Celcíus-stigum (° C).



6. mynd. Krappageislar mældir í jarðargeislum.

Á *5. mynd* er sýndur hiti sem fall af hæð, og á *6. mynd* krappageisli nærri láréttra ljósferla mældur í jarðargeislum og miðað við ofangreind skilyrði.[8] Af síðari myndinni má sjá, og nákvæmari athugun leiðir það í ljós, að krappageisli ljósferils, sem hefur lárétta stefnu, er jafn fjarlægð frá jarðarmiðju, ef geislinn er í um 21,6 m hæð (miðað við fyrrgreindar forsendur).[9] Ljósgeisli, sem hefur lárétta stefnu í þessari sérstöku hæð, hvorki hækkar né lækkar, hann fylgir jarðbungunni. Láréttur geisli í minni hæð sveigir niður til jarðar. Þeim mun nær sérstöðuhæð sem hann er upphaflega, þeim mun fjær sveigir hann til jarðar, og hann gæti sveigt til jarðar í 200 km fjarlægð, ef hann er upphaflega nægilega nærri sérstöðuhæð.

Geisli með lárétta stefnu í meiri hæð en nemur sérstöðuhæð, fjarlægist jörð. Hann gæti hugsanlega lent á fjallstindi handan jarðbungunnar.

Hugsum okkur mann á fjalli A í 1000 m hæð, sem horfir til fjallsins B, sem er 4000 m hátt í 400 km fjarlægð. Eins og fyrr er vikið að verður krappageisli ljósferilsins að vera innan við 2 jarðargeislar til jafnaðar svo að sjáist á milli fjallanna. Samkvæmt myndinni er krappageislinn um 2,9 jarðargeislar í 28 m hæð. Gerum ráð fyrir, að ferillinn þurfi að fara a.m.k. niður í 24 m hæð, þar sem krappageislinn er um 1,65 jarðargeislar, svo meðaltalið náist. Reikna má með, að geislinn komi næst jörðu í um 150 km fjarlægð frá A. Ferill geisla frá rótum fjallsins hlýtur að fara nær jörðu, en þó ekki neðar en u.þ.b. 21,6 m, því þá myndi hann sveigjast til jarðar of fljótt. Maðurinn í A sér þá fjallið B undir sjónarhorni, sem er minna en $2,5/150000 = 1,7 \cdot 10^{-5}$ rad. Þetta svarar til þess, að fjallið sjáist undir sjónarhorni, sem er minna en $1,7/1000$ af því, sem við væri að búast, ef ekkert skyggði á og geislar færu eftir beinum línum. Mynd hæðarinnar skreppur saman í minna en $2/1000$, en breiddin er óbreytt. Sé diffurlíkingin (2) leyst, kemur í ljós, að þessi áhrif eru hér verulega vanmetin. Vissulega geta skilyrði í andrúmslofti valdið

---

[8] Fæst með heildun loftþyngdarlíkingarinnar, sbr. síðustu nmgr., en nú hefur $T(h)$ verið skilgreint á annan veg:

$$T(h) = 288,15 + 0,2 \cdot (h - 20) - 0,205 \cdot \sqrt{(h-20)^2 + (1/0,205)^2}.$$

[9] Afleiðulíkingin (1), sem lýst er að framan, var leyst tölulega með fjórða stigs aðferð Runge og Kutta.

því, að ljósgeisli sveigi eftir yfirborði jarðar. En myndin af fjöllum, sem eru í mikilli fjarlægð, rennur saman í lárétta línu, þar sem hvorki verða greindir tindar, dalir né sjóndeildarhringur.

Sjást fjöll á Vestfjörðum og Grænlandi í senn miðja vegu milli þeirra? Í inngangi var vitnað til heimildar, þar sem þessari spurningu er svarað játandi. Bæði fjöll (A 1000 m hátt á Vestjörðum og B 3700 m hátt á Austur-Grænlandi) hverfa undir sjóndeildarhring við venjuleg skilyrði. Öðru máli gegnir um afbrigðileg skilyrði, sem hér hafa verið gerð að umtalsefni. Ljósferlar frá tindi A og til róta B og frá rótum A til tinds B skerast sem næst í sérstöðuhæðinni um það bil 160 km frá A. Einmitt í þeirri hæð er halli ferlanna minnstur. Sjónarhorn í þeirri hæð væri því verulega minna en vænta mætti, ef ferlarnir væru beinar línur, þ.e. minna en $21,6 \cdot (1/160000 + 1/280000) \approx 2 \cdot 10^{-4}$ rad í stað $1/160 \approx 6,2 \cdot 10^{-3}$. Töluleg lausn diffurlíkingarinnar gefur hins vegar þá niðurstöðu, ef horft er frá sjávarmáli á þessum stað (þar sem sjónarhornin eru sem næst jöfn), að mynd hæða skreppi saman í $2,1 \cdot 10^{-4}$ af því, sem vænta mætti, ef sjónferlar væru beinar línur.

Hvað voru hafgerðingar? Hér hefur verið litið á fyrirbæri, sem tengjast 200–400 km löngum sjónferlum. Hin afbrigðilegu skilyrði í andrúmsloftinu, sem eru forsenda fyrir mikilli sveigju ljósferla, valda einnig fyrirbærum, sem varða ferla ljóss um skemmri veg.[10]

---

[10] W. H. Lehn og H. L. Sawatzky, *Image Transmission under Arctic Mirage Conditions*, Polarforschung **45** (1975), 120–8. H. L. Sawatzky og W. H. Lehn, *The Arctic Mirage and the Early North Atlantic*, Science **192** (1976), 1300–5. Í þessum greinum fjalla höfundar um sama efni og hér er til umfjöllunar. Þeir komast að þeirri niðurstöðu, að unnt sé að sjá fjöll í 4–500 km fjarlægð. Þeim sést yfir þá staðreynd, að diffurlíkingin (2) hefur óstöðugar lausnir eins og hér hefur verið lýst, og þýðingu þess.

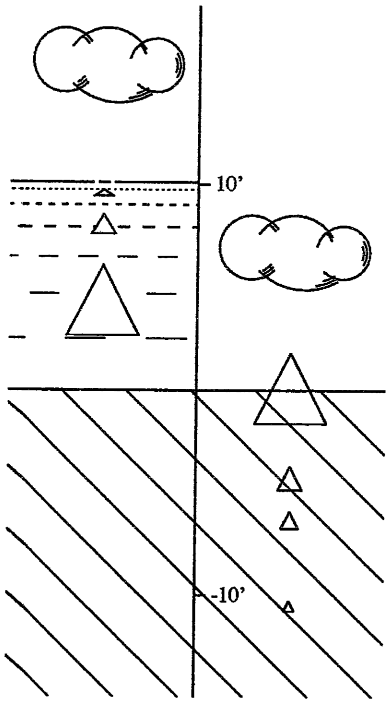
Í greinunum setja þeir fram þá athyglisverðu hugmynd, að hafgerðingar *Konungsskuggsjár*, sem sagt er frá hér á eftir, séu fyrirbæri, sem tengist hillingum á úthafi. Hér er vakin athygli á því sjónarmiði og fetað í fótspor þeirra um framsetningu á því efni.

Í *Guðmundar sögu Arasonar* (sjá t.d. *Biskupasögur I*, Hið íslenzka bókmenntafélag, 1858) er í kaflanum um hafgerðingar (bls. 483) lýst mjög vondu veðri og grunnbrotum á sjó við Suðureyjar. Orðið *hafgerðingar* hefur oftast verið skilið þeim skilningi, sbr.

Hugsum okkur sundmann, sem horfir í kringum sig á lognsléttum sjó. Augu hans eru rétt í vatnsskorpunni. Ef ljósferlar væru beinar línur, myndi hann hvergi sjá yfirborð sjávar. Við hin afbrigðilegu skilyrði sér hann hins vegar, að himinn og haf renna saman í stefnu, sem myndar um 10′07″ horn við lárétt. (Sjónarhorn fingurbreiddar á útréttum armi er um 10 bogmínútur.)

Hugsum okkur ennfremur, að í 6, 18, 25 og 40 km fjarlægð séu seglbátar, sem allir eru eins, 6 m háir og 6 m langir og í sömu stefnu frá sundmanninum. Við venjuleg skilyrði myndi hann einungis sjá efri hluta segla á þeim, sem næstur honum er. Við hin afbrigðilegu skilyrði, sem lýst er á *5.* og *6. mynd* og hér eru til athugunar, myndi hann hins vegar sjá alla bátana hvern upp af öðrum.

Á *7. mynd* er þessi afstaða sýnd. Hlutfallsleg stytting á lóðréttum línum í mynd fjarlægari bátanna er greinileg. Hæð reiknast um 99 % af lengd fyrir bátinn í 6 km fjarlægð, 81 % fyrir bátinn í 18 km fjarlægð, 34 % fyrir bátinn í 25 km fjarlægð og fyrir fjarlægasta bátinn í 40 km fjarlægð reiknast hæðin einungis 2 % af lengd. Ef sundmaðurinn er vanur sýninni, sem sýnd er hægra megin á myndinni, og sér allt í einu afstöðuna eins og hún er sýnd á myndinni til vinstri, er eðlilegt, að hann álykti (a.m.k. eftir útreikninga og íhugun), að sjórinn hafi risið í fjallháar bylgjur allt í kringum



7. mynd

greinina *Hafgerðingar* eftir Lúðvík Kristjánsson í *Árbók Hins íslenzka fornleifafélags 1967.*

hann og allt upp í 230 m hæð, þar sem fjarlægasti báturinn er. Honum finnst hafflöturinn vera djúp víðáttumikil skál og að hann sé staddur í henni miðri. Rétt er að minna á, að þessi fyrirbæri sjást innan sjónarhorns fingurbreiddar á útréttum armi.

En svipar þessum kringumstæðum ekki til myndar, sem dregin er upp í Konungsskuggsjá? Þar er lýst *„einu undri í Grænalands hafi“:*

> *Það kalla menn hafgerðingar. En það er því líkast sem allur hafstormur og bárur allar, þær sem í því hafi eru, safnist saman í þrjá staði. Og gerast af því þrjár bárur. Þær þrjár gerða allt haf, svo að menn vitu hvergi hlið á vera. Og eru þær stórum fjöllum hærri, líkar bröttum gnýpum og vitu menn fá dæmi til, að þeir menn hafi úr höfum komizt, er þar hafa í verið staddir, þá er þessi atburður hefir orðið.*[11]

Deyfing ljóss

Á leið gegnum andrúmsloft deyfist ljósgeisli vegna dreifingar á sameindum þess. Mynd fjarlægra hluta verður í bláma endurkastaðrar og dreifðrar geislunar. Eftir því sem hluturinn er fjarlægari verður hlutfall geisla frá honum sjálfum minna, en hlutfall dreifðra geisla úr öllum áttum að sama skapi meira.

Styrkur ljósgeisla minnkar með vegalengd samkvæmt lögmálinu:

$$I = I_0 \exp(-\varepsilon s),$$

þar sem s er vegalengdin, sem hann hefur farið gegnum andrúmsloft, og ε er stuðull, sem ræðst af leið hans, en er u.þ.b. $6.5 \cdot 10^{-3}\mathrm{km}^{-1}$ fyrir ljósgeisla, sem er í 20 m hæð.[12]

---

[11] *Konungs Skuggsjá. Speculum Regale.* Leiftur, 1955, bls. 53–4.

[12] Samkvæmt *Physics of the Air* (sjá 5. nmgr.), bls. 557-563, má rita:

$$\varepsilon = \frac{32\pi^3}{3N_S\lambda^4}\langle u^2\rangle = \frac{32\pi^3 u_S^2}{3N_S\lambda^4}\langle\left(\frac{BT_S}{B_ST}\right)^2\rangle_{\text{meðalt.}}.$$

N_S er fjöldi sameinda/m^3 við staðalaðstæður, þ.e. $2,687 \cdot 10^{25}$, og λ er bylgjulengd. S ritað neðan við tákn vísar til staðalaðstæðna. Meðaltal er reiknað eftir

Þegar ljósgeisli hefur farið 400 km veg í andrúmslofti (í um 20 m hæð), eru einungis um 7,3 % orðin eftir og eftir 500 km 3,8 %. Þessa deyfingu ljóss verður einnig að hafa í huga, þegar hugað er að möguleikum á að sjá fjarlæg fjöll.

Heimildir um lengstu sjónferla

Skipstjórinn Robert A. Bartlett gat sér frægðarorð á fjörutíu ára ferli sem skipstjóri á skipum, er sigldu til heimskautslanda með landkönnuði. Hann var m.a. skipstjóri á Karluk, sem flutti Vilhjálm Stefánsson og fleiri til landaleitar um hafísbreiður fyrir norðan Alaska. Bartlett taldi sig hafa séð Snæfellsjökul ($64,80°$ N; $23,28°$ V) í hillingum, er hann var staddur á skonnortunni Effie M. Morrissey miðja vegu ($63,68°$ N; $33,59°$ V) milli Hvarfs og Snæfellsjökuls 17. júlí 1939, þ.e. í 515 km fjarlægð. Til þess að svo hafi getað orðið, verður krappageisli ljósferilsins að vera rétt rúmlega jarðargeisli til jafnaðar. Ef einungis er um afbrigðilegan hitastigul að ræða, er útilokað að greina Snæfellsjökul eða efsta hluta hans úr slíkri fjarlægð eins og hér hefur verið sýnt fram á.

Af frásögn Bartletts má ráða, að mynd Snæfellsjökuls hafi verið tífalt stærri en vænta mætti vegna fjarlægðar, bæði hæð og breidd fjallsins. Það hljóta því að hafa verið einhverjar aðrar aðstæður í lofthjúpnum en hér hafa verið gerðar að umtalsefni, þannig að andrúmsloftið hafi virkað eins og risavaxið safngler og ekki hafi gætt blámóðu eða deyfingar ljósgeisla.[13] Fyrirbæri í lofthjúpnum eru margslungin og erfitt að útiloka,

---

leið geislans. Fyrir geisla með bylgjulengd $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m, sem fer í 20 m hæð, er $\varepsilon = 6,546 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}$ samkvæmt upplýsingum um hitastig í mismunandi hæð, sbr. *5. mynd*. Og fyrir sama geisla, sem að meðaltali hefur hæð kringum 4000 m, er $\varepsilon \approx 2,814 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}$.

[13] William H. Hobbs: *Remarkable Example of Polar Mirage*, Science **90** (1939), 513–4. Þar segir um þessa sýn: *„Snæfellsjökull og fleiri kennileiti á landi, er skipstjóri og stýrimaður þekktu vel, sáust glöggt eins og fjarlægðin þangað væri ekki nema 25 til 30 sjómílur, þó að raunveruleg fjarlægð samkvæmt legu skipsins væri 335 til 350 enskar mílur.“* Hobbs hefur eftir Bartlett skipstjóra: *„Ef ég hefði ekki verið viss um stað skipsins og verið á leið til Reykjavíkur, hefði ég búizt við að koma þangað innan fárra klukkustunda. Fjöllin og snæviþakin hetta Snæfellsjökuls skáru sig úr*

að afbrigðilegt lag af lofti sé á réttum stað af réttu formi á réttum tíma, svo að ólíklegustu sýnir opinberist, en þetta er með mestu ólíkindum.

Í *Íslandsmetabók Arnar og Örlygs* er einnig haldið fram, að Öræfajökull (2118 m hár, 64, 06° N, 16, 6° V) hafi sést frá Færeyjum, þ.e. úr um 520 km fjarlægð. Hæsta fjall í Færeyjum er Slættaratindur (882 m hár, 62, 3° N, 7, 0° V). Krappageisli ljósgeislans þyrfti að vera innan við 1,4 jarðargeislar að jafnaði. Ólíklegt er að þessi fullyrðing sé studd nákvæmum athugunum. Baksvið Öræfajökuls séð úr suðri er um 2000 m há jökulbunga, sem örðugt er að greina frá skýjum í mikilli fjarlægð, einkum þegar deyfing ljóssins er höfð í huga, þótt gert sé ráð fyrir, að um önnur fyrirbæri geti verið að ræða en afbrigðilegan hitastigul.

Í *Heimsmetabók Guinness* er lengsti staðfestur sjónferill talinn vera frá Stanford-fjalli (4949 m hátt, 62, 4° N, 144, 0° V) í austurhluta Alaska til McKinley-fjalls (6194 m hátt, 63, 5° N, 151, 0° V) nokkru vestar. Þessi fjarlægð er um 375 km. Hér er vafalaust byggt á athugunum þjálfaðra fjallgöngumanna með nákvæm mælitæki. Reyndar leikur enginn vafi á því, að milli þessara fjalla sést þótt sjónferlar væru beinir, meira að segja mætti sjá efstu 5000 m McKinley-fjalls. Í þessu tilfelli er það einungis spurning um áhrif deyfingar ljóssins. Ljósferill milli tinda á þessum fjöllum fer aldrei niður fyrir 3000 m og má reikna með, að hann sé til jafnaðar í 4000 m hæð. Þá komast um 35 % ljósgeislunar frá McKinley-fjalli alla leið. Það er varla ástæða til að rengja þessa fullyrðingu.

Niðurstaða

Hafa ber í huga, ef ljósferlar eru beinir, að efstu 500 m af tindi í 500 km fjarlægð sjást undir sama sjónarhorni og 1 mm í 1 m fjarlægð eða eins og fremsti oddur á kúlupenna í hendi á útréttum armi eða eins og lítil arða í sjóndeildarhring. Hillingar fletja þessa mynd, ef þær stafa af því, að hiti fari hækkandi með hæð næst jörðu. Dreifing ljósgeisla á leið gegnum andrúmsloftið veldur blámóðu, sem mynd fjallsins myndi hverfa í. Það er útilokað, að svo fjarlæg fjöll sjáist undir þeim kringumstæðum, sem

---

bakgrunninum og virtust ótrúlega nærri."

Um þessa frásögn í grein Hobbs fjallar Vilhjálmur Stefánsson í bók sinni *Ultima Thule: Torráðnar gátur úr norðurvegi*, útg. Ársæll Árnason, 1942, bls. 72–3.

hér um ræðir, jafnvel þótt ljósgeisli geti sveigt langan veg eftir yfirborði jarðar.

Á fjallshryggnum á Austur-Grænlandi gnæfir Gunnbjarnarfjall hæst og kemur eitt til greina við ólíkleg skilyrði. Jafnvel þótt allur hryggurinn, sem spannar 40° sjónarhorn, væri 3700 m hár, myndi einungis nyrsti og nálægasti hluti hans koma til greina. Hann er nær allur í meira en 500 km fjarlægð og geislarnir hljóta því að hafa dofnað í u.þ.b. 4 % af upphaflegum styrk. Mynd fjallanna hverfur í blámóðu. Helzt ætti að vera von til að sjá slík fjöll undir sjónarhorni, sem væri minna en 5° í stefnu nærri norð-norðvestri. (10° horn svarar til þess sjónarhorns, sem hnúinn á útréttum handlegg spannar eða 10 cm í 60 cm fjarlægð.) Það er einungis lítið brot af sjónarsviði augans en u.þ.b. sjónarsvið algengra sjónauka, sem stækka tífalt.

Fyrirbærið, sem oftast er álitið vera fjöll á Grænlandi, þegar horft er frá Vestfjörðum, spannar sjóndeildarhringinn frá vestri til norðurs, og er það þá örugglega skýjabólstrar handan hans. Auðvitað er hugsanlegt og reyndar sennilegt, að misskilningur hafi stundum ýtt undir menn að leita nýrra landa handan sjóndeildarhrings.[14]

---

[14] Sbr. Björn Sigfússon, *Ísland í erlendum miðaldaheimildum fyrir 1200 og hafsvæði þess. Safn þýddra texta; brot.* Saga, tímarit Sögufélags, **2** (1958), 452-498. Þar segir í nmgr. (bls. 455):

„En ef einhver furðulegur misskilningur Beda prests á vitneskju, sem hann telur runna frá samtíðarmönnum sínum, þeim sem að heimskautsbaug hafa siglt, hefur leitt hann til þeirrar réttu niðurstöðu um legu Thile, að Írar gátu farið eftir leiðbeiningu hans til að finna landið (sbr. Dicuílus), eykur það eigi litlu við heilagleik hans og er mikil jartein, að **sagnaskrök** *hafi vísað honum á Ísland ófundið.“* (Leturbreyting hér.)

Sverrir Örn Þorvaldsson:

ÓLYMPÍULEIKARNIR Í STÆRÐFRÆÐI 1992

Á liðnu sumri voru *Alþjóðlegu Ólympíuleikarnir í stærðfræði* haldnir austur í Moskvu, höfuðborg Rússlands. Þeir voru nú haldnir í 33. sinn, en þetta var í áttunda sinn, sem Íslendingar sendu sveit til þátttöku. Að þessu sinni voru þrír framhaldsskólanemar í sveit Íslands, þeir Alfreð Hauksson og Bjarni V. Halldórsson úr Menntaskólanum í Reykjavík og Daníel Fannar Guðbjartsson úr Fjölbrautaskóla Suðurnesja. Robert Magnus sinnti dómnefndarstörfum fyrir okkar hönd, en Sverrir Örn Þorvaldsson var fararstjóri. Bestum árangri Íslendinganna náði Bjarni, hann hlaut 12 stig og var nálægt því að komast í hóp þeirra, sem hlutu bronsverðlaun, en til þess þurfti 14 stig. Hann hlaut hins vegar sérstaka viðurkenningu fyrir að leysa fyrsta dæmið hnökralaust. Hinir piltarnir tveir náðu þokkalegum árangri, en allir þrír eiga þeir möguleika á þátttöku í næstu Ólympíuleikum í stærðfræði, en þeir verða haldnir næsta sumar austur í Miklagarði.

Í óformlegri landakeppni báru Kínverjar sigur úr býtum með yfirburðum, en þeir hlutu 240 stig af 252 mögulegum. Alls voru sex dæmi og voru gefin sjö stig fyrir hvert þeirra, en í fullskipaðri sveit eru sex keppendur. Næstu þjóðir voru með um 180 stig, en meðal þeirra voru sveitir Bandaríkjanna, Rúmeníu, Bretlands og Samveldis sjálfstæðra ríkja. Alls voru þátttökuþjóðir ríflega 60. Í samanburði við sveitir hinna Norðurlandanna var árangur íslensku sveitarinnar vel viðunandi.

Að venju voru dæmin mjög erfið, sem lögð voru fyrir unglingana. Þau eru birt hér í heild á næstu síðu og eru lesendur *Fréttabréfs* hvattir til að reyna við þau öll. Greinarhöfundur vill þó benda sérstaklega á fimmta dæmið. Það reyndist að vísu þeirra erfiðast, en lesendur gætu kannski spreytt sig á að útvíkka það verkefni, svo að úr verði skemmtileg setning um heildi.

Ólympíuleikarnir sjálfir stóðu í tvo daga, 15. og 16. júlí, og voru hvorn dag veittar fjórar og hálf klukkustund til að leysa verkefnin. Fyrstu þrjú dæmin voru lögð fyrir keppendur fyrri daginn. Lausnir á dæmunum er svo að finna á bls. 68–73 hér á eftir og geta menn þá borið þær saman við eigin lausnir.

1. dæmi. Finnið allar heilar tölur a, b, c með $1 < a < b < c$, þannig að talan $(a-1)(b-1)(c-1)$ gangi upp í töluna $abc - 1$.

2. dæmi. Látum $\mathbb{R}$ vera mengi allra rauntalna. Ákvarðið öll föll $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sem uppfylla jöfnuna

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

fyrir allar rauntölur x og y.

3. dæmi. Í þrívíðu rúmi eru níu punktar tilteknir, þannig að engir fjórir liggi í sama plani. Sérhverjir tveir eru tengdir með *legg*, þ.e. línustriki, og er sérhver leggur litaður blár eða rauður eða látinn ólitaður.

Ákvarðið minnstu náttúrulegu töluna n, þannig að í hvert skipti sem nákvæmlega n leggir eru litaðir, myndi þrír þeirra þríhyrning, sem hefur allar hliðar í sama lit.

4. dæmi. Í plani er tilgreindur hringur C, lína ℓ, sem snertir C, og punktur M á línunni ℓ. Ákvarðið leg allra þeirra punkta P, sem uppfylla eftirfarandi skilyrði:

Til séu tveir punktar Q og R á línunni ℓ, þannig að M sé miðpunktur striksins QR og C sé innritaður hringur þríhyrningsins PQR.

5. dæmi. Í þrívíðu rúmi með venjulegu rétthyrndu hnitakerfi er endanlegt punktamengi S tiltekið. Látum S_1, S_2, S_3 vera þverstæðu ofanvörp mengisins S á hnitaplönin þrjú, YZ-planið, XZ-planið og XY-planið. Sannið að:

$$|S|^2 \leq |S_1| \cdot |S_2| \cdot |S_3|,$$

þar sem $|A|$ táknar fjölda staka í endanlegu mengi A. (Athugið, að þverstætt ofanvarp punkts á plan er fótpunktur þverlínunnar frá punktinum á planið.)

6. dæmi. Fyrir sérhverja jákvæða heila tölu n skilgreinum við töluna $S(n)$ sem hér segir: $S(n)$ er stærsta heila talan, þannig að fyrir sérhverja heila tölu k með $1 \leq k \leq S(n)$ sé hægt að skrifa n^2 sem summu k jákvæðra ferningstalna.

(a) Sannið: $S(n) \leq n^2 - 14$ fyrir sérhverja heila tölu $n \geq 4$.
(b) Finnið heila tölu n, þannig að $S(n) = n^2 - 14$.
(c) Sannið: $S(n) = n^2 - 14$ fyrir óendanlega margar heilar tölur n.

Af dæmakeppni í stærðfræði það sem af er vetri, er annars vegar það að segja, að hin innlenda keppni hófst í haust og hins vegar, að sú nýlunda var í starfinu, að okkur var boðið að taka þátt í *Eystrasaltsmóti* í stærðfræði.

Fyrri hlutinn í *stærðfræðikeppni framhaldsskólanema* fyrir skólaárið 1992–3 var haldinn í framhaldsskólum landsins þann 20. október sl. og var keppnin með svipuðu sniði og undanfarin ár. Alls tóku 411 nemendur úr 22 skólum þátt í keppninni, þar af 217 nemendur á efra stigi og 194 á neðra stigi keppninnar. Þeim sem bestum árangri náðu á hvoru stigi, var boðið að taka þátt í fjarkennslu í vetur og síðan í úrslitakeppni, sem verður haldin í Háskóla Íslands í marsmánuði.

Dagana 5.–9. nóvember sl. tóku Íslendingar þátt í stærðfræðikeppni með nokkuð nýstárlegu sniði, sem fór fram í Vilníus í Litháen. Sú keppni var sveitakeppni, sem fólst í því að hver sveit fimm framhaldsskólanema leysti *í sameiningu* tuttugu verkefni, sem lögð voru fyrir hana, og hafði hún til þess fjórar klukkustundir. Í sveit Íslands voru valdir fimm framhaldsskólanemar, Ólympíufararnir þrír frá því í sumar, Alfreð, Bjarni og Daníel, og auk þeirra tveir nemendur úr Menntaskólanum í Reykjavík, Jóhannes Loftsson og Sigurður Freyr Marinósson. Með þeim fóru Benedikt Jóhannesson, sem sat í dómnefnd, og Sverrir Örn Þorvaldsson, sem var fararstjóri.

Ferðin var öll hin besta, gestrisni Litháa var með eindæmum góð, þrátt fyrir bágan efnahag. Keppnin var vel skipulögð af gestgjafanna hálfu og tókst hún afar vel. Sá sérstaki háttur, að þetta var sveitakeppni, féll unglingunum vel og kváðust þeir hafa notið samvinnunnar, en ekki einungis skipt verkefnunum milli sín og síðan leyst þau hver í sínu lagi. Þátttökusveitir voru sjö frá jafnmörgum löndum og skipuðu þær sér í þessa röð:

Danmörk, Pétursborg í Rússlandi, Pólland, Lettland, Ísland, Litháen og saman í neðstu sætum voru Eistland og Svíþjóð.

Þetta var í þriðja sinn, sem slík keppni var haldin, en í fyrstu tvö skiptin voru það einungis Eystrasaltsríkin þrjú, sem tóku þátt í henni. Næst verður hún haldin í Lettlandi og þá á svipuðum árstíma.

EVRÓPSKA STÆRÐFRÆÐINGAÞINGIÐ Í PARÍS

Sem kunnugt er var *Fyrsta evrópska stærðfræðingaþingið* haldið við Sorbonne-háskólann í París dagana 6.–10. júlí sl. Þingið var sett með athöfn mánudagsmorguninn 6. júlí í hinum mikla fyrirlestrasal háskólans, *Grand Amphithéâtre*. Mikilfenglegur og forn byggingarstíll þessa salar, þar sem þeir gnæfa yfir í þungum þönkum meðal annarra Richelieu, Pascal, Lavoisier og Descartes, átti sinn þátt í því að bregða blæ virðuleika yfir setningarathöfnina. Vitaskuld hafa viðstaddir skynjað með misjöfnum hætti einhver brot þeirrar sögu, sem tengist þessum gamla sal, en þó var væntanlega ofarlega í huga margra, að þetta var einmitt salurinn, þar sem David Hilbert flutti sinn fræga fyrirlestur á öðru alþjóðaþingi stærðfræðinga árið 1900. Þar lýsti hann sem kunnugt er 23 djúpstæðum viðfangsefnum, sem hann taldi miklu skipta fyrir þróun stærðfræði, að leyst yrðu á nýrri öld, sem þá var senn að hefjast.

Enginn Hilbert var víst þarna staddur, en Frakkar tefldu fram við þessa athöfn einum sínum fremsta stærðfræðingi, hinum aldna Henri Cartan, sem ávarpaði samkomuna. Ekki bagaði hann elli, en hann varð 88 ára gamall þá í miðri vikunni, þegar þingið var haldið.

Alls voru á þrettánda hundrað þátttakendur á þinginu frá hinum ýmsu löndum Evrópu, þar af fjórir frá Íslandi. Af sérstökum viðburðum var sá helztur, að fimmtudagskvöldið 9. júlí var boðið til verðlaunaveitingar í ráðhúsi Parísar. Borgarstjórinn, Jacques Chirac, afhenti þar tíu ungum stærðfræðingum verðlaun Parísarborgar, en sérstök dómnefnd á vegum Evrópska stærðfræðifélagsins hafði valið þá. Verðlaunahafarnir eru fæddir á árunum 1959–64 og eru af ýmsu þjóðerni. Einn þeirra skal nafngreindur hér, en sá er Gábor Tardos frá Búdapest, sem var meðal ungversku fyrirlesaranna á málþinginu á Laugarvatni sumarið 1990 til heiðurs Bjarna Jónssyni sjötugum.

Áður en þingið hófst var haldinn fundur í fulltrúaráði *Evrópska stærðfræðifélagsins* og var það sá fyrsti eftir stofnfundinn haustið 1990. Þar voru samþykktar inntökubeiðnir nokkurra stærðfræðifélaga, þar á meðal frá Ísraelska stærðfræðifélaginu. Jafnframt var tekið boði frá ungverska stærðfræðifélaginu, *„Bolyai János Matematikai Társulat“*, um að halda annað evrópska stærðfræðingaþingið í Búdapest að fjórum árum liðnum.

Robert Magnus:

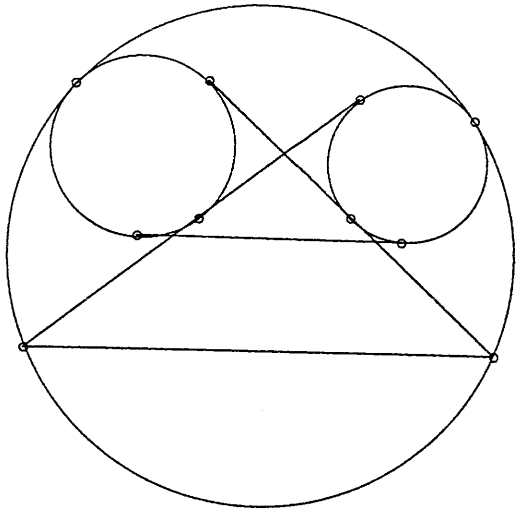
HRINGAR SEM SNERTAST

Alþjóðlegu Ólympíuleikarnir í stærðfræði, sem haldnir eru á hverju ári, draga til sín kennara, sem eru snjallir í þess konar stærðfræði, sem ekki er kennd í neinum skólum. Af því tagi eru mörg stærðfræðileg fyrirbæri, sem eru forvitnileg og heillandi í senn. Og svo bætist við um marga kennarana, sem tengjast þessum Ólympíuleikum, að ekki er síður heillandi að kynnast þeim. Þetta á einkum við um þá, sem eldri eru og hafa sótt Ólympíuleikana árum saman.

Herman Duparc er Hollendingur á áttræðisaldri, sem hefur fengizt við stærðfræðikennslu frá byrjun seinni heimsstyrjaldar. Hann er áheyrnarfulltrúi í hollenzku sveitinni; þátttakandi, sem gestgjafarnir bera engan kostnað af, en fylgir fararstjóra og dómnefndarfulltrúa og aðstoðar þá. Djúpstæð reynsla er væntanlega hinn bezti kostur við slíkan fylgdarmann, og þar sem hann er laus við þá ábyrgð, sem hvílir á fararstjóra og dómara, er þetta kjörið verkefni fyrir roskinn stærðfræðing.

Að loknum Ólympíuleikunum í Peking sumarið 1990, þar sem ég var dómnefndarfulltrúi, þurfti íslenzka sveitin að bíða flugfars heim á leið í þrjá daga. Þá daga var Herman þennan yfirleitt að finna við sundlaug gistihússins, þar sem hann sat í hitamollu Peking-sólarinnar. Ég gaf mig á tal við hann og áttum við samræður um hugleikið efni: rúmfræði. Þekkti hann kannski einfalda sönnun á *setningu Feuerbachs*? Það er hún sem segir, að níupunkta hringur þríhyrnings snerti alla fjóra þrísnertihringana, þ.e. innanverða snertihringinn og utanverðu snertihringana þrjá. Jú, reyndar gerði hann það; þegar hann var stríðsfangi Japana hafði hann haldið sjálfum sér og öðrum föngum uppi við að glíma við stærðfræði, og í einu efni hafði hann gert dálitla uppgötvun sjálfur. Hann rissaði teikningu á blað og rétti mér. (Sjá *1. mynd.*)

Tveir sundurlægir hringar snertu stærri hring að innanverðu. Sameiginlegar snertilínur hringanna, þær sem lágu milli þeirra, skáru stóra hringinn í tveimur punktum, og hann hafði teiknað strenginn milli þeirra. „Þú átt að geta sannað,“ sagði hann, „að strengurinn sé samsíða sameiginlegri ytri snertilínu hringanna.“ Ég virti teikninguna fyrir mér. Hún var athyglisverð vegna einfaldleika síns og glæsileika og líka vegna þess, að ég hafði aldrei séð neitt þessu líkt fyrr. „Þú sérð víst, hvernig þetta



1. mynd

tengist setningu Feuerbachs?" „Ójá", skrökvaði ég. „Ég ætla að veita þér dálitla vísbendingu til að sanna þetta. Þú notar alkunna setningu á óvæntan hátt."

Auðvitað vildi ég ekki þiggja frekari vísbendingu, því ég vildi sjálfur fá að glíma við þetta ögrandi verkefni. Næstu tvö árin teiknaði ég myndina öðru hverju og virti hana fyrir mér. Reynslan sýnir, að dæmi, sem fela í sér hringa, snertla og strengi, leysir maður venjulega með því að nota sér innritaða ferhyrninga og ferilhorn. En samt var mér ekki nokkur leið að komast neitt áfram við að leysa dæmið með því móti. Vísbending Hermans var gagnslítil. Það var ekki fyrr en seinna, að mér varð ljóst, að málið snerist ekki um að nota einhverja alkunna setningu á óvenjulegan hátt, heldur átti að nota útvíkkun á alkunnri setningu; útvíkkun, sem var mér ókunn á þeim tíma, og mig grunar, að hún sé einnig ókunn flestum lesendum mínum.

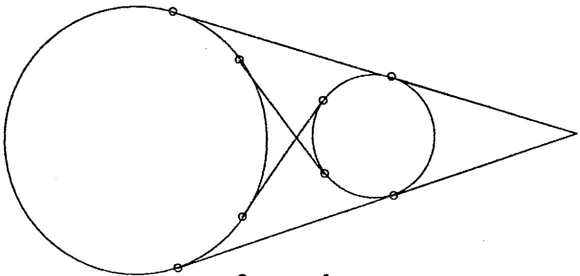
Setningu Ptólemeosar var yfirleitt að finna í menntaskólanámsefni í stærðfræði; hún var ein þeirra æðri setninga, sem nemendur lærðu á síðasta ári. Hún segir um punkta A, B, C og D, sem liggja á hring í þessari röð, að

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Stjörnufræðingurinn, landfræðingurinn og stærðfræðingurinn *Claudius Ptólemeos* notaði hana á annarri öld e. Kr. til að skrá fyrstu hornafallatöflurnar. Reyndar má svo heita, að setningin feli í sér samlagningarregluna fyrir sínusfallið. Það var svo í fyrrasumar, þegar ég var að skoða eitt þeirra dæma, sem verið var að velja úr fyrir Ólympíuleikana, að ég kynntist því fyrst, að til var útvíkkun á setningu Ptólemeosar, þannig að til viðbótar punktunum A, B, C og D koma *hringar* S_a, S_b, S_c og S_d, sem snerta aðalhringinn í þessum punktum A, B, C og D. Setningin segir þá, að

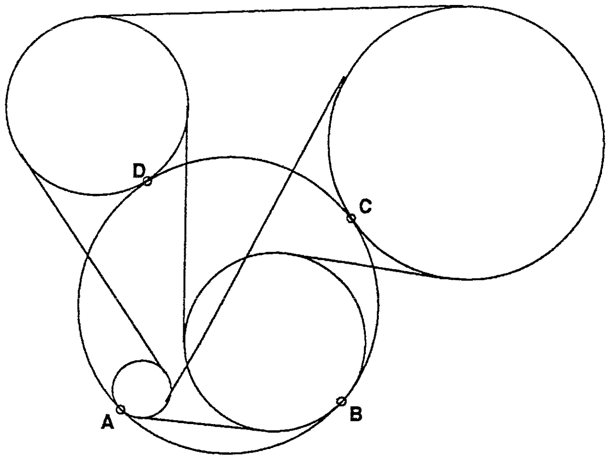
$$t_{ab} \cdot t_{cd} + t_{bc} \cdot t_{ad} = t_{ac} \cdot t_{bd},$$

þar sem t_{ab} (og hliðstætt fyrir t_{cd} o.s.frv.) er lengdin á sameiginlegum snertli hringanna S_a og S_b. Tveir hringar hafa tvenns konar sameiginlegar snertilínur, og tveir snertlar af hvorri gerð eru jafnlangir. Þetta eru sameiginlegu snertilínur hringanna, hinar innri og hinar ytri. Innri snertilínurnar eru þær, sem liggja milli hringanna, en hringarnir eru báðir sömu megin við sameiginlega ytri snertilínu. (Sjá *2. mynd*.)



2. mynd

Í útvíkkuninni á setningu Ptólemeosar er stærðin t_{ab} lengdin á sameiginlegum ytri snertli, ef hringarnir S_a og S_b eru sömu megin við aðalhringinn, en hún er lengdin á sameiginlegum innri snertli, ef hringarnir S_a og S_b eru sitt hvorum megin hans. Á *3. mynd* er sýnd ein hugsanleg niðurröðun á hringunum í setningunni.



3. mynd

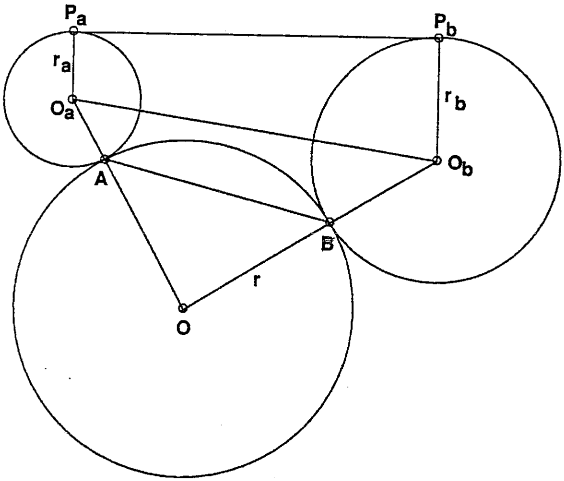
Nú var mér orðið ljóst, að með hina útvíkkuðu setningu Ptólemeosar að vopni væri hægt að ráðast á dæmi Hermans, því þar var niðurröðunin af hinu rétta tagi, þar sem tveir af snertihringunum fjórum voru orðnir að punktum. En áður en við fjöllum frekar um dæmi Hermans skulum við sanna útvíkkunina á setningu Ptólemeosar, sem ég ætla hér á eftir að kalla *setningu Caseys* og verður ástæðan fyrir því skýrð seinna.

Köllum geisla aðalhringsins r og lítum einungis á tvo hringa S_a og S_b, sem snerta hann hvor í sínum punkti A og B. Köllum geisla þeirra r_a og r_b. Þá held ég því fram, að

$$t_{ab} = AB\sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon_a r_a}{r}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_b r_b}{r}\right)},$$

þar sem $\varepsilon_a = \pm 1$ $[\varepsilon_b = \pm 1]$ og fer formerkið eftir því, hvort hringurinn S_a $[S_b]$ er utan aðalhringsins eða innan hans. Þá er um þrjú tilvik að ræða og ræðst skilgreiningin á t_{ab} af þeim eins og rakið var að framan. Við látum O_a og O_b tákna miðjur hringanna S_a og S_b, O táknar miðju aðalhringsins og P_a og P_b eru snertipunktar þeirrar snertilínu við hringana S_a og S_b, sem til skoðunar er.

1. tilvik. *Báðir hringarnir utan aðalhringsins (4. mynd).*



4. mynd

Samkvæmt setningu Pýþagórasar er

$$t_{ab}^2 = P_aP_b^2 = O_aO_b^2 - (r_b - r_a)^2$$

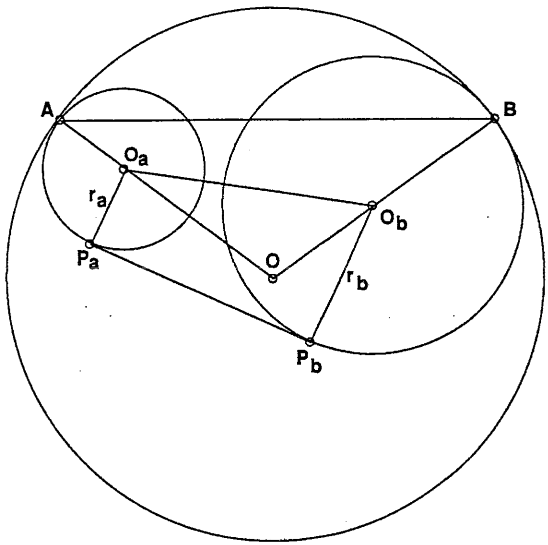
og samkvæmt kósínusreglunni er

$$O_aO_b^2 = (r + r_a)^2 + (r + r_b)^2 - 2(r + r_a)(r + r_b)\cos\angle O_aOO_b.$$

Þess vegna er

$$\begin{aligned} t_{ab}^2 &= (r + r_a)^2 + (r + r_b)^2 - (r_b - r_a)^2 - 2(r + r_a)(r + r_b)\cos\angle O_aOO_b \\ &= 2(r + r_a)(r + r_b)(1 - \cos\angle O_aOO_b) \\ &= 4(r + r_a)(r + r_b)\sin^2\frac{1}{2}\angle O_aOO_b \\ &= 4(r + r_a)(r + r_b)\left(\frac{AB}{2r}\right)^2 \\ &= AB^2\left(1 + \frac{r_a}{r}\right)\left(1 + \frac{r_b}{r}\right). \end{aligned}$$

2. tilvik. *Báðir hringarnir innan aðalhringsins (5. mynd).*



5. *mynd*

Samkvæmt setningu Pýþagórasar og kósínusreglunni er

$$t_{ab}^2 = P_aP_b^2 = O_aO_b^2 - (r_b - r_a)^2$$

og

$$O_aO_b^2 = (r - r_a)^2 + (r - r_b)^2 - 2(r - r_a)(r - r_b)\cos\angle O_aOO_b,$$

sem gefur okkur

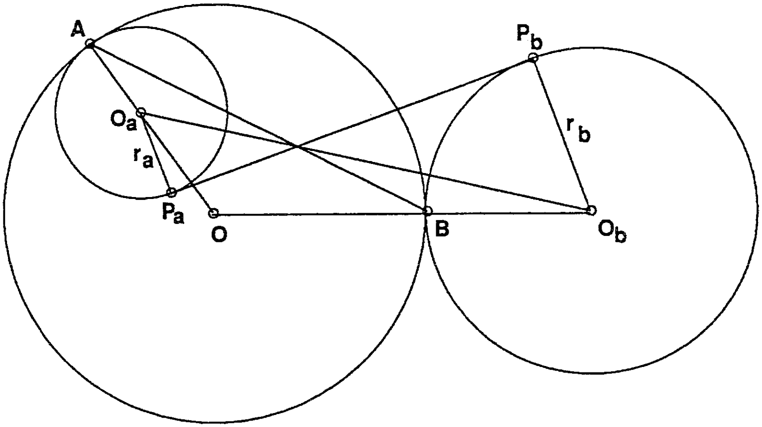
$$t_{ab}^2 = AB^2\left(1 - \frac{r_a}{r}\right)\left(1 - \frac{r_b}{r}\right).$$

3. tilvik. *Hringarnir sitt hvorum megin aðalhringsins (6. mynd).* Í þessu tilviki fáum við, að

$$t_{ab}^2 = P_aP_b^2 = O_aO_b^2 - (r_b + r_a)^2$$

og

$$O_aO_b^2 = (r - r_a)^2 + (r + r_b)^2 - 2(r - r_a)(r + r_b)\cos\angle O_aOO_b,$$



6. mynd

sem gefur okkur

$$t_{ab}^2 = AB^2\left(1-\frac{r_a}{r}\right)\left(1+\frac{r_b}{r}\right).$$

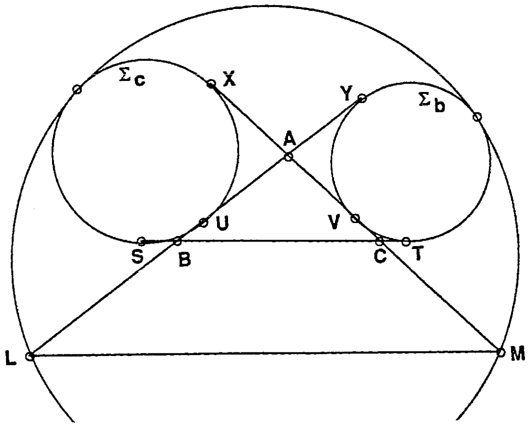
Nú getum við lokið sönnuninni á setningu Caseys. Lítum á fjóra hringa S_a, S_b, S_c og S_d, sem snerta aðalhringinn í punktum A, B, C og D, sem liggja þar í þessari röð. Þá er

$$\begin{aligned}
&t_{ab}\cdot t_{cd} + t_{bc}\cdot t_{ad} - t_{ac}\cdot t_{bd}\\
&= (AB\cdot CD + AD\cdot BC - AC\cdot BD)\\
&\qquad\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon_a r_a}{r}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_b r_b}{r}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_c r_c}{r}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_d r_d}{r}\right)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

samkvæmt setningu Ptólemeosar sjálfri.

Síðan skulum við glíma við dæmi Hermans. Ég teiknaði hringana á nýjan leik með viðbótarnafngiftum á *7. mynd*. Á miðri mynd er þríhyrningurinn ABC. Eins og venjulega köllum við hliðarnar a, b og c og við látum s vera hálft ummálið. Snertihringana köllum við núna Σ_b og Σ_c og þeir eru þá tveir af þremur utanverðum snertihringum þríhyrningsins ABC. Þá er vel kunnugt, að

$$BS = BU = CT = CV = s - a$$
$$AY = AV = s - c$$
$$AX = AU = s - b$$



7. mynd

Við skulum beita setningu Caseys á $\Sigma_c\Sigma_b ML$. Við ályktum þá, að

$$LM \cdot ST + LU \cdot MV = LY \cdot MX,$$

þ.e.

$$LM(SB+BC+CT)+(LA-UA)(MA-VA) = (LA+AY)(MA+AX),$$

sem aftur gefur okkur, að

$$LM(b+c) + (LA - s + b)(MA - s + c) = (LA + s - c)(MA + s - b).$$

Við einföldun fæst, að

$$\begin{aligned} LM(b+c) &= LA(s-b) + MA(s-c) + LA(s-c) + MA(s-b) \\ &= LA(2s-b-c) + MA(2s-b-c) \\ &= LA \cdot a + MA \cdot a. \end{aligned}$$

Þá er

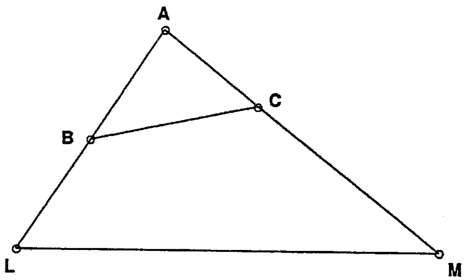
$$\frac{b+c}{a} = \frac{LA + MA}{LM}. \tag{1}$$

Af þessu viljum við álykta, að LM sé samsíða BC. Því miður er það svo, að þótt þetta sé nauðsynlegt skilyrði þess, að LM sé samsíða BC, þá er það engan veginn nægjanlegt. Hvað verður þá ályktað af jöfnu (1)? Eftirfarandi hjálparsetning skýrir það.

Hjálparsetning. *Lítum á 8. mynd hér til hliðar og gerum ráð fyrir, að*

$$\frac{AB + AC}{BC} = \frac{AL + AM}{LM}.$$

Þá gildir annað hvort, að BC er samsíða AC eða að punktarnir B, C, L og M liggja á hring. Andhverfa fullyrðingin gildir einnig.



Til að sanna aðalfullyrðinguna umritum við jöfnuna og fáum

$$(AB + AC)^2 LM^2 = (AL + AM)^2 BC^2$$

og beitum svo kósínusreglunni. Þá fæst

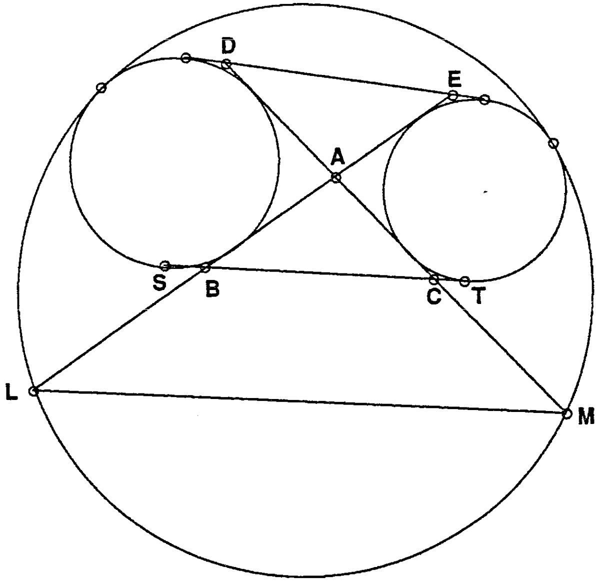
$$\begin{aligned}&(AB + AC)^2(AL^2 + AM^2 - 2AL \cdot AM \cos A)\\ &= (AL + AM)^2(AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A).\end{aligned}$$

Eftir nokkra einföldun fáum við, að

$$(AL \cdot AC - AB \cdot AM)(AL \cdot AB - AM \cdot AC) = 0,$$

svo að um tvo kosti er að ræða. Annað hvort er

$$AL \cdot AC - AB \cdot AM = 0,$$



9. mynd

sem gefur okkur, að BC sé samsíða LM; eða við höfum, að

$$AL \cdot AB - AM \cdot AC = 0$$

en samkvæmt *reglu Þalesar* leiðir það til, að punktarnir B, C, M og L liggja á hring.

Í dæmi Hermans mundum við vilja halda okkur við fyrri kostinn einan. Við skulum þess vegna skoða seinni kostinn í tengslum við dæmi Hermans. (Sjá *9. mynd.*)

Ef $BCML$ er umritanlegur ferhyrningur, þá er $\angle CML = \angle ABC = \angle ADE$. Þess vegna er LM samsíða DE. Við höfum því sannað, að ef strengurinn LM er ekki samsíða ST, þá er hann samsíða DE. Annar hvor hinna sameiginlegu ytri snertla er því samsíða strengnum LM.

Nú skulum við láta stóra hringinn bjagast, þannig að hann snerti áfram innri hringana tvo, en þeim höldum við föstum. Strengurinn LM

breytist við þessa bjögun, en hann helzt samsíða þeim sameiginlega ytri snertli, sem hann var samsíða í upphafi, hvor þeirra sem það var. Stóri hringurinn getur bjagazt, þannig að geisli hans vaxi og þannig að snertipunktar hans við minni hringana nálgist punktana S og T. Á endanum verður hann að beinni línu, sem inniheldur S og T og það sem meira er, strengurinn LM fellur saman við BC. Og úr því að strengurinn LM reynist vera samsíða ST í þessari markstöðu, þá hlýtur hann að hafa verið samsíða ST allan tímann.

Ég byrjaði á því að gefa fyrirheit um einfalda sönnun á setningu Feuerbachs. Hér er komið að því að bregðast því fyrirheiti. Sannleikurinn er sá, að hið snotra dæmi Hermans er ekki einmitt það, sem á þarf að halda í setningu Feuerbachs. Lesandinn gæti víst verið búinn að sjá fyrir sér, að það eru tvær aðrar gerðir af dæmi Hermans. Í annarri þeirra snerta hringarnir tveir aðalhringinn að utanverðu og í hinni eru þeir sitt hvorum megin aðalhringsins. Herman hefur birt grein (á hollenzku) með þessum setningum og beitt þeim til að sanna setningu Feuerbachs, en þar sem sannanirnar fela í sér aukalegar flækjur, sem ekki komu fram eins og dæmið var sett fram hér, þá þykir mér fara betur á því að fjalla um þær í sérstakri grein. Svo við skulum bara líta á þessa grein sem kynningu á hinni merkilegu útvíkkun á setningu Ptólemeosar.

Nýlega fékk ég bréf frá Herman, þar sem hann segir athyglisverða sögu þessa dæmis síns. Árið 1936 var hann nemandi í efsta bekk í menntaskóla. Kennari hans, dr. van Hasselt að nafni, hafði tveimur árum fyrr sýnt honum útvíkkunina á setningu Ptólemeosar og kennt þá setningu við Casey. Herman uppgötvaði þetta dæmi sitt, þegar hann var að glíma við níupunkta hringinn, en hann hafði enga sönnun. Hann bara sannfærði sig um það með því að teikna myndir, að niðurstaðan hlyti að vera rétt. Hann sýndi kennara sínum niðurstöðuna, en hann gat ekki heldur sannað hana og bætti við: „Þetta er verkleg eðlisfræði hjá þér.“ Þriðjudagskvöld eitt í febrúar árið 1936 fékk Herman hugljómun og honum tókst að sanna niðurstöðuna með því að beita setningu Caseys, að miklu leyti á svipaðan hátt og hér. Daginn eftir sýndi hann van Hasselt sönnunina. Hún var svo ekki birt fyrr en árið 1942, en þá hafði van Hasselt lagt verkefnið fram sem keppnisdæmi í hollenzka stærðfræðifélaginu án þess að nein önnur lausn bærist. En í millitíðinni hafði Herman verið sendur til kennslu í hinum hollenzku Austur-Indíum. Skip hans varð fyrir tundurskeyti, hann komst í björgunarbát og var bjargað og komst loks til Jakarta árið 1940. Þar tók japanska innrásarliðið hann til fanga. Meðan hann var stríðsfangi á Jövu sýndi hann nokkrum stærðfræðilega þenkjandi félögum sínum dæmið án þess að láta sönnun fylgja. Seinna var hann sendur til að vinna við járnbrautargerð í Burma (sbr. kvikmyndina um *„Brúna yfir Kwai-fljót“*). Eftir stríð gegndi hann ýmsum störfum í Hollandi og varð um síðir prófessor við Tækniháskólann í Delft. Árið 1967 hafði hann aðstoðarmann að nafni Baron van Lennep. Eitt sinn varð honum gengið fram hjá kennslustofu, þar sem van Lennep hélt málstofu um algebru, og sá þar dæmi sitt á töflunni með nýrri lausn, sem byggðist ekki á setningu Caseys. Van Lennep útskýrði, að faðir sinn hefði sýnt sér dæmið og hann hefði verið stríðsfangi á Jövu og kynnzt dæminu af samfanga sínum. Þar með var hringnum lokað. Van Lennep birti sönnun sína árið 1968, einnig á hollenzku, og með inngangi eftir Herman.

En hver skyldi hann hafa verið sá Casey, sem sagður er hafa uppgötvað þessa útvíkkun á setningu Ptólemeosar? Herman gat ekkert frætt mig um það. Þegar ég byrjaði að skrifa þessa grein, hafði ég einungis eina heimild um hann. Í ritaskránni í bók Coxeters, *„Introduction to Geometry“*, er nefnd bók eftir J. Casey, *„A sequel to the first six books of the Elements of Euclid“*, sem kom í 6. útgáfu í Dublin árið 1892. Þýðandi þessarar greinar minnar hafði svo upp á annarri heimild um hann, því hans er getið í *„Mathematisches Wörterbuch“* eftir J. Naas og H. L. Schmid. Þar kemur fram, að John Casey (1820–91) hafi starfað í Dublin og rannsakað algebrulega ferla. Það ætti því víst að vera óhætt að álykta, að hann hafi verið írskur. Næsta flettiorð í þessu riti á eftir *„Casey“* er svo *„Setning Caseys“*, þar sem einmitt er lýst þeirri setningu, sem hér er fjallað um og um hana vísað til greinar frá 1943 eftir M. Zacharias. Sú grein er mér reyndar ekki tiltæk á bókasafni hér né heldur fyrrnefnd bók Caseys.

Að lokum, ef einhver lesandi skyldi búa yfir einhverri frekari vitneskju um Casey, þætti mér fengur að fregna af því.

Jón Ragnar Stefánsson þýddi úr ensku.

Halldór I. Elíasson:

VERÐLAUN ÓLAFS DANÍELSSONAR OG SIGURÐAR GUÐMUNDSSONAR

Verðlaunasjóður dr. phil. Ólafs Daníelssonar og Sigurðar Guðmundssonar arkitekts, svo sem sjóðurinn heitir fullu nafni samkvæmt skipulagsskrá, var stofnaður árið 1954 af Svanhildi Ólafsdóttur, en hún var dóttir dr. Ólafs og eiginkona Sigurðar arkitekts. Stofnfé sjóðsins var hálf húseignin á Hagamel 21 í Reykjavík. Tilgangur sjóðsins er samkvæmt 3. gr. skipulagsskrár:

a. Að verðlauna íslenzkan stærðfræðing, stjörnufræðing eða eðlisfræðing. Skal verðlaununum úthlutað án umsókna og í fyrsta sinn 31. okt. 1955, á 78 ára afmæli dr. phil. Ólafs Daníelssonar, tuttugu þúsund kr. Heita verðlaunin „Verðlaun Ólafs Daníelssonar". Þeim má ekki skipta. Úthlutun fer fram þriðja hvert ár, í annað hvort skipti samkvæmt 3. gr. a, en í annað hvort skipti samkvæmt 3. gr. b. Úthlutunarupphæðirnar a og b eru ætíð jafnar innbyrðis. Úthlutun 1955 kallast 1. úthlutun a, en 1958 1. úthlutun b, 1961 2. úthlutun a o. s. frv.

b. Að verðlauna teikningar íslenzkra arkitekta að nytsömum byggingum í landinu eða skipulagningu innanbæjar í Reykjavík, að undangenginni samkeppni. Heita verðlaunin „Verðlaun Sigurðar Guðmundssonar". Stofnandi sjóðsins áskilur sér og manni sínum, meðan annars hvors þeirra nýtur við, rétt til að ákveða verkefni það, sem um ræðir í hvert sinn, en eftir þeirra dag Húsameistarafélagi Íslands. Auglýst skal um samkeppnina hálfu ári fyrir úthlutun. Leita skal tillagna dómnefndar, er Húsameistarafélag Íslands skipar samkvæmt reglum félagsins um samkeppni.

c. Eftir fyrstu úthlutun og síðan (þ. e. í fyrsta sinn árið 1961) má veita aukaverðlaun úr sjóðnum, er samtals nemi helmingi aðalverðlauna. Við úthlutun a. skal styrkja stúdent úr stærðfræðideild Menntaskólans í Reykjavík, en við úthlutun b. skal styrk úr sjóðnum varið til verndunar þjóðminja og leita tillagna þjóðminjavarðar.

Stjórn sjóðsins. Samkvæmt skipulagsskrá er stjórn sjóðsins þannig skipuð, að í henni eiga sæti *„prófessor í stærðfræði við Háskóla Íslands,* *rektor Menntaskólans í Reykjavík og skrifstofustjórinn í menntamálaráðuneytinu*". Fyrstu stjórnina skipuðu dr. Leifur Ásgeirsson prófessor, Pálmi Hannesson rektor og Birgir Thorlacius skrifstofustjóri. Nú skipa stjórnina þeir dr. Halldór I. Elíasson prófessor, sem tók við af Leifi árið 1973, Guðni Guðmundsson rektor og Knútur Hallsson ráðuneytisstjóri. Eftir lát Pálma 1956 kom í stjórnina Kristinn Ármannsson rektor og síðan Einar Magnússon rektor 1965, en Guðni tók við af Einari 1970. Knútur Hallsson tók við af Birgi í stjórn sjóðsins árið 1980 og hlutaðist þá til um, að stjórnin gerði Halldór I. Elíasson að formanni sínum. Birgir Thorlacius hafði þá gegnt starfi formanns frá upphafi.

Fjármál sjóðsins. Í byrjun síðasta áratugar steðjaði sá vandi að sjóðnum, að meðeigandi að Hagamel 21 krafðist þátttöku hans í viðhaldi og framkvæmdum við eignina. Leigutekjur höfðu reynzt ófullnægjandi til að standa undir kostnaði af eigninni og skuldbindingum vegna verðlauna. Stjórnin ákvað því að kanna sölu eignarinnar og hlutaðist Knútur Hallsson til um, að skipulagsskrá yrði breytt, þannig að salan yrði heimil. Haustið 1983 tók gildi þannig breytt skipulagsskrá og fól stjórnin formanni að sjá um sölu eignarinnar og síðan ávöxtun á eignum sjóðsins. Sala fór fram strax þá um haustið og fengust 2.796 þ.kr. fyrir eignina, þar af útborgun 1.376 þ.kr. Ennfremur átti sjóðurinn um 40 þ.kr. á bankabók. Þetta var tekið sem upphafleg skipting sjóðsins í stofnfé og svo lausafé, en það átti að standa undir hlutverki sjóðsins. Stjórnin samþykkti, að fyrstu árin skyldi ávöxtun sjóðsins umfram 1% að raungildi renna í stofnsjóð, en 1% raunávöxtun skyldi renna til lausafjár. Nú í haust ákvað svo stjórnin að hækka framlag til lausafjár í 2% raunávöxtunar. Stjórnin hefur alltaf talið áfallnar verðbætur til eigna í útreikningi eigna, en svo var ekki gert í uppgjöri til ríkisendurskoðunnar fyrr en 1990 að ríkisendurskoðun breytti sínum reglum, þannig að nú falla skilgreiningar saman. Áfallnir en ógreiddir vextir eru ekki reiknaðir með í ársuppgjöri. Í árslok 1991 voru eignir sjóðsins 17.812 þ.kr., þar af 17.344 þ.kr. sem stofnfé og 468 þ.kr. sem lausafé. Meðalraunávöxtun frá 1984 hefur verið um 8%. Eignir eru allar í verðtryggðum skuldabréfum með veði í fasteignum eða ríkistryggð. Innheimta er hjá Vesturbæjarútibúi Landsbankans, en Lögheimtan hefur séð um innheimtu vanskila.

Stjórn sjóðsins þarf að fara að hugleiða betur framtíð sjóðsins, bæði varðandi þá áherzlu, sem leggja ber á vöxt stofnfjár, og einnig hlutverk sjóðsins í heild. Væntanlega er að komast á meiri festa í peningamálum landsins, þannig að óvissa verði minni. Raunar hefur geta sjóðsins allt til þessa verið minni en stofnandi hefur getað gert sér vonir um, en nú er það að breytast.

Verðlaunaveitingar. Frú Svanhildur Ólafsdóttir hafði mælt svo fyrir, að dr. Leifur Ásgeirsson skyldi fyrstur hljóta verðlaun úr sjóðnum, og var svo gert 31. október 1955 á 78 ára afmæli dr. Ólafs Daníelssonar.

Verðlaun Ólafs Daníelssonar samkvæmt a)-lið skipulagsskrár hafa verið veitt sem hér segir:

1955: dr. Leifur Ásgeirsson prófessor (20 þ.kr.).

1961: dr. Trausti Einarsson prófessor *„fyrir vísindastörf á sviði jarðeðlisfræði“* (20 þ.kr.).

1968: Þorbjörn Sigurgeirsson prófessor *„fyrir forystustarf á sviði íslenzkra vísindarannsókna í eðlisfræði“* (20 þ.kr.).

1973: dr. Guðmundur Pálmason jarðeðlisfræðingur *„fyrir brautryðjandastarf í heilsteyptri jarðeðlisfræðilegri könnun á jarðskorpu Íslands“* (100 þ.kr.).

1981: dr. Jón Kr. Arason dósent *„fyrir framúrskarandi rannsóknir í stærðfræði“* (120 þ.kr.).

1987: Eggert Briem prófessor *„fyrir miklar og árangursríkar stærðfræðilegar rannsóknir á sviði fallaalgebru“* (200 þ.kr.).

Sigurður Guðmundsson hafði undirbúið samkeppni um skipulagsuppdrátt fyrir svæðið milli Hverfisgötu og Grettisgötu vegna verðlauna samkvæmt b)-lið skipulagsskrár, en hann andaðist áður en málið var útkljáð. Raunar reyndist erfitt að samræma þessa hugmynd því heildarskipulagi Reykjavíkur, sem þá var í lokavinnslu. Í ljós hefur komið, að óraunhæft er að stofna til samkeppni sjötta hvert ár fyrir jafn litla upphæð og þá tækist að safna. Safna yrði fyrir fullnægjandi verðlaunum samkvæmt b)-lið í lengri tíma.

Verðlaun Sigurðar Guðmundssonar hafa verið veitt einungis einu sinni til þessa. Það var árið 1976, en þá hlaut Guðrún Jónsdóttir arkitekt 500 þ.kr. verðlaun fyrir samkeppnisverkefni um *„skipulagningu Þingholtsstrætis og Þingholtanna með tilliti til varðveislu fornra húsa í vax-*

andi nýtísku borg" eða eins og verkefnið var nefnt í auglýsingu um samkeppnina: „*Þáttur Þingholtanna í Reykjavík í þróun vaxandi borgar.*" Stjórn sjóðsins er núna að velta því fyrir sér, hvort skipulag svæðis undir Menntaskólann í Reykjavík sé heppilegt næsta verkefni.

Aukaverðlaun samkvæmt c)-lið skipulagsskrár hafa verið veitt einu sinni. Það var árið 1988 og hlaut þá Sverrir Örn Þorvaldsson 100þ.kr. fyrir frábæran árangur bæði í námi við Menntaskólann í Reykjavík og í keppni á vegum Íslenzka stærðfræðafélagsins.

Um stofnanda sjóðsins. Svanhildur Ólafsdóttir lézt 17. nóvember 1954 einungis nokkrum mánuðum eftir að sjóðurinn var stofnaður. Hún var fædd 14. nóvember 1905 og varð því réttra 49 ára að aldri. Faðir hennar, dr. Ólafur Daníelsson, lézt 10. desember 1957, en eiginmaður hennar, Sigurður Guðmundsson, ári síðar, 21. desember 1958.

Svanhildur var elzt þeirra barna dr. Ólafs Daníelssonar og Ólafar Sveinsdóttur konu hans, sem upp komust. Hún lauk stúdentsprófi árið 1924. Starfsævi hennar skiptist að mestu milli tveggja þátta. Framan af ævi starfaði hún í skrifstofu Alþingis en síðar um langt skeið í utanríkisþjónustu, bæði hér heima og erlendis. Hún var sett sendiráðsritari í Moskvu 1946 og síðan skjalavörður utanríkisráðuneytisins 1952. Öðrum störfum sinnti hún einnig, t.d. starfaði hún við orðabók Sigfúsar Blöndals á skólaárum sínum og varð síðar löggiltur skjalaþýðandi og dómtúlkur í dönsku. Hún giftist Sigurði Guðmundssyni arkitekt árið 1951 og hafði hjónaband þeirra því aðeins staðið hálft fjórða ár, þegar hún lézt.

Ekki verður hér í þessari frásögn af verðlaunasjóðnum gerð grein fyrir föður hennar, dr. Ólafi Daníelssyni, svo nátengd sem saga Íslenzka stærðfræðafélagsins er nafni hans. Verðugt væri, að það yrði gert með sérstökum hætti. Hins vegar verða hér sögð nokkur deili á manni hennar.

Sigurður Guðmundsson var á sínum tíma einn af fremstu arkitektum hér á landi. Hann stundaði nám í húsagerðarlist í Kaupmannahöfn og starfaði um skeið erlendis áður en hann setti á fót vinnustofu í Reykjavík árið 1925, þá fertugur að aldri. Margar kunnar og markverðar byggingar eru meðal verka hans og má nefna Austurbæjarskóla í Reykjavík, Elliheimilið Grund, Landakotsspítala nýja (sem nú er reyndar orðinn gamli spítalinn), spítalann í Stykkishólmi, turninn við dómkirkjuna á Hólum og Hallgrímskirkju í Saurbæ. Frá árinu 1938 rak Sigurður vinnustofu sína ásamt Eiríki Einarssyni arkitekt og eru Sjómannaskólinn, Þjóðminjasafnið og Fossvogskirkja ásamt bálstofu meðal sameiginlegra verka þeirra. Allar rafstöðvarnar við Sog teiknaði Sigurður, fyrst Ljósafossstöð og síðar ásamt Eiríki Írafossstöð og Steingrímsstöð.

Sigurður lét skipulagsmál mjög til sín taka, einkum skipulag Reykjavíkur, bæði með greinum í blöðum og tímaritum um húsagerð og skipulagsmál og beinum tillögum um það efni. Sigurður samdi *Tækniorðasafn*, sem kom út að honum látnum, og einnig þýddi hann leikrit Jóhanns Sigurjónssonar, *Mörð Valgarðsson.*

Þeir tengdafeðgar, dr. Ólafur og Sigurður arkitekt, voru báðir Skagfirðingar, en móðir Sigurðar var sunnan úr Borgarfirði; þeir voru systkinasynir Sigurður og Leifur Ásgeirsson prófessor. Meðan Leifur sat í stjórn verðlaunasjóðsins og lengi síðan var honum umhugað um hið tvíþætta hlutverk sjóðsins, annars vegar hlutverk hans á sviði stærðfræðilegra vísinda og hins vegar hlutverk hans á sviði byggingarmála og skipulagsmála. Með rausnarskap við stofnun sjóðsins á sínum tíma voru heiðraðir merkir frumherjar á hvoru þessara sviða.

ALÞJÓÐAÞINGIÐ UM STÆRÐFRÆÐIMENNTUN

Sjöunda alþjóðaþingið um stærðfræðimenntun var haldið við Laval-háskólann í Québec í Kanada dagana 16.–23. ágúst í sumar. *Alþjóðanefnd um stærðfræðikennslu* sá um þingið, en hún starfar á vegum *Alþjóðasambands stærðfræðinga.* Þingið sóttu á fjórða þúsund manns og voru fjórir þátttakendur frá Íslandi.

Aðalfundur alþjóðanefndarinnar var haldinn einn þingdaginn og sótti Kristín Halla Jónsdóttir hann, en hún er fulltrúi okkar gagnvart nefndinni svo sem greint var frá í síðasta *Fréttabréfi.* Alþjóðaþingin um stærðfræðimenntun eru haldin fjórða hvert ár og verður hið næsta þeirra haldið í Sevilla á Spáni árið 1996.

Alþjóðlegir starfshópar, sem starfa við athuganir á tilteknum verkefnum, geta að uppfylltum vissum skilyrðum tengst Alþjóðanefndinni um stærðfræðikennslu. Meðal þeirra er hópur, sem starfar að málefnum kvenna og stærðfræðimenntunar. Meðan á þinginu stóð var Anna Kristjánsdóttir kjörin ritstjóri þess fréttabréfs, sem starfshópurinn gefur út.

SKRÁ YFIR FYRIRLESTRA 1990–92

Hér fer á eftir skrá yfir fyrirlestra og fundi í *Íslenzka stærðfræðafélaginu* á árunum 1990–92. Getið er fundardags, fyrirlesari er nefndur ásamt heiti fyrirlestrarins og efnislýsing fylgir með eins og hún var sett fram í fundarboði. Fjöldi fundargesta samkvæmt gestabók félagsins er tilgreindur innan sviga.

Aðalfundir félagsins voru haldnir 29. desember 1989, 31. janúar 1991, 9. janúar 1992 og 21. janúar 1993, en ekki voru fyrirlestrar fluttir þar.

5. apríl 1990.

Michael Fell: *„Symmetry—from mathematical foundations to broad physical vistas.“*

„Symmetry of the laws of physics means that there exists a large collection of possible observers who are „intrinsically indistinguishable“. Starting from general postulates concerning such a collection of observers, we shall see how groups and group representations necessarily arise; and we shall briefly indicate the application of these ideas to such important ideas as energy and elementary particles.“ (25)

24. apríl 1990.

Sverrir Örn Þorvaldsson: *Hótel með óendanlega mörgum herbergjum.*

Davíð Aðalsteinsson: *Hversu víða eru frumtölurnar?*

Geir Agnarsson: *Mandelbrot-mengið.*

Þessir þrír fyrirlestrar voru fluttir á vegum félagsins í Menntaskólanum á Akureyri undir samheitinu *Undraheimur stærðfræðinnar.* Þeir höfðu nokkru áður verið fluttir á kynningardegi við Háskóla Íslands, en fyrirlesararnir voru allir stúdentar þar. (56)

2. maí 1990.

Rafn Sigurðsson: *Um skoðanakannanir á Íslandi.*

„Fjallað verður um aðferð til að meta skoðanakannanir, sem byggist á því, að þegar svör liggja fyrir, er svarendum skipt í hópa, t.d. eftir aldri, kyni, búsetu, eða afstöðu í síðustu kosningum; lagskipting er því gerð eftir á en ekki fyrirfram.

Gerð verður grein fyrir samanburði við aðferðir, sem notaðar voru við skoðanakannanir fyrir síðustu alþingiskosningar.“ (21)

20. júní 1990.

Walter Rudin, Wisconsin-háskóla í Madison: *„A survey of the many differences that exist between one complex variable and several.“ (Yfirlit yfir hinn margvíslega mun, sem er á föllum af einni tvinntalnabreytu og mörgum.)* (31)

4. október 1990.

Sigurður Helgason: *Tveir töframenn rúmfræðinnar, Poncelet og Jacobi.* Fyrirlesturinn birtist í *Fréttabréfi* 1991. (128)

29. nóvember 1990.

Björn Birnir: *Um iðustreymi í vökva.*

„Í fyrirlestrinum verður fjallað um veika og sterka iðu. Rifjaðar verða upp aðferðir til að greina iðu í vökvastreymi, og rædd verður þróun á slíkri greiningu.

Sýndar verða af myndbandi tölulegar niðurstöður annars vegar um veikt iðustreymi, sem lýst er með tvívíðum hlutafleiðujöfnum kenndum við Ginzburg og Landau, og hins vegar um sterkt iðustreymi, sem kemur fram í útreikningum á lausnum á þrívíðu Euler-jöfnunum.“ (31)

7. marz 1991.

Hjálmtýr Hafsteinsson: *Torleysanleg viðfangsefni í tölvunarfræði.*

„Mörg viðfangsefni á ýmsum sviðum tölvunarfræði og stærðfræði virðast ekki hafa neinar góðar lausnaraðferðir. Sem dæmi má nefna ákvörðun á því, hvort gefin tala sé frumtala, farandsalavandamálið og einnig almennar útgáfur af ýmsum leikjum svo sem skák og *go*-tafli. Ekki hefur enn tekizt að sanna, að ómögulegt sé að leysa flest þessara verkefna á hraðvirkan hátt. Þeim hefur þó verið skipað í nokkra flækjustigsflokka og inniheldur sá frægasti þeirra svokölluð *NP-fullkomin* viðfangsefni.

Í fyrirlestrinum verður fjallað um, hvað það þýðir að viðfangsefni sé *torleysanlegt*, hvers konar viðfangsefni þetta eru og hvað er til ráða, ef leysa þarf slíkt torleysanlegt viðfangsefni.“ (27)

2. maí 1991.

Jón Ingólfur Magnússon: *Ólympíuleikar í stærðfræði.*

„Fyrirlesarinn mun segja lítillega frá sögu og tilhögun keppninnar, en fyrst og fremst mun hann segja frá nokkrum verkefnum á fyrri Ólympíuleikum og sýna lausnir á fáeinum þeirra.“ (32)

8. maí 1991.

Michael Weinstein, Michigan-háskólanum í Ann Arbor: *„A class of eigenvalue problems with applications to non-linear wave instabilities.“*

„Í fyrirlestrinum verður fjallað um bylgjulausnir á ólínulegum hlutafleiðujöfnum. Athugun á því, hvort slíkar lausnir séu stöðugar, leiðir til eigingildisverkefnis, sem getur verið mjög flókið. Í fyrirlestrinum verður sér í lagi rætt um þetta eigingildisverkefni og hvernig það veitir upplýsingar um stöðugleika á bylgjulausnunum.“ (12)

29. maí 1991.

Guðmundur R. Jónsson, sérfræðingur við verkfræðideild H.Í.: *Mat á stikum í diffurjöfnulíkönum.*

„Í fyrirlestrinum verður fjallað um mat á stikum í líkönum, sem eru samfelld í tíma. Líkönin svara til venjulegra diffurjöfnuhneppa, sem almennt eru ólínuleg og með tímaháðum stikum. Stikarnir eru metnir með því að finna lággildi á markfalli, sem verður til ýmist út frá aðferð minnstu ferninga eða aðferð mestu líkinda. Tekin verða dæmi um líkön af varmaskiptum og sýnt hvernig meta má stika út frá mælingum, sem eru strjálar í tíma.“ (13)

20. september 1991.

Grétar Tryggvason, Michigan-háskólanum í Ann Arbor: *Tölulegir reikningar á tvívökvastreymi.*

„Hefðbundin reiknilíkön fyrir tvívökvastreymi, þ.e. streymi þar sem vökvinn er af tveimur mismunandi gerðum, miða að því að líkja eftir niðurstöðum tilrauna, þar sem könnuð er hegðun smæstu eininga, svo sem loftbólu í vatni eða dropa í lofti. Erfitt er að mæla þessa hegðun, en stærðfræðilega má lýsa henni með jöfnum Naviers og Stokes. Lausn þeirra jafna er þó líka vandkvæðum bundin, en nú orðið er unnt að ákvarða lausnir fyrir margs konar líkön, þegar vökvinn er allur af einni gerð. Hins vegar er viðfangsefnið enn að mestu óleyst, þegar um tvívökvastreymi er að ræða. Fyrirlesarinn lýsir nýlegum framförum á þessu sviði og sýnir tölulegar niðurstöður fyrir einföld líkön af tvívökvastreymi.“ (17)

10. október 1991.

Skúli Sigurðsson: *Afstæðiskenning, rúmfræði og alheimskenning: Einstein, Weyl og vísindin í Göttingen.*

Fyrirlesturinn birtist í *Fréttabréfi* 1992. (55)

28. nóvember 1991.
Ólympíuleikarnir í stærðfræði og stærðfræðikeppni framhaldsskólanema. Kristín Halla Jónsdóttir sagði frá Ólympíuleikunum í Sigtúnum þá um sumarið og Sverrir Örn Þorvaldsson rakti lausnir á völdum dæmum. Kristín Bjarnadóttir og Robert Magnus sögðu frá reynslu sinni af framhaldsskólakeppninni og undirbúningi fyrir Ólympíuleikana. (24)

20. febrúar 1992.
Hermann Þórisson: *Hvernig má herma án byrjunarbjögunar?*
„Algengt er að nota langtímameðaltöl sem mælikvarða á eiginleika kerfis. Þannig er t.d. meðalfjöldi framleiddra eininga oft notaður sem mælikvarði á afkastagetu framleiðslukerfis og meðalbiðtími sem mælikvarði á hversu gott afgreiðslukerfi er. Slíku kerfi er gjarnan lýst stærðfræðilega með stöðugu slembiferli (t.d. Markov-keðju) og ákvarðast langtímameðaltalið þá formlega séð af grunnstikum þess, en langtímameðaltalið er einfaldlega meðalgildi jafnvægisdreifingar ferlisins. Jafnvægisdreifingin er hins vegar yfirleitt hulin og er því oft gripið til þess ráðs að *herma* ferlið yfir eitthvert tiltekið tímabil og notast við það meðaltal, sem þannig fæst. Nú er upphafskafli ferlis yfirleitt mjög háður því upphafsástandi, sem valið er, og ef það er ekki valið samkvæmt jafnvægisdreifingu, kemur fram *byrjunarbjögun.*

Spurningin er því, hvort unnt sé að herma ferli, sem er í jafnvægi frá byrjun, þó að jafnvægisdreifingin sé hulin, en hingað til hefur ekki þekkst nein leið til þess. Að þessu hefur fyrirlesarinn unnið í samstarfi við aðra og liggja nú fyrir nokkuð óvæntar niðurstöður, sem hann mun gera grein fyrir.“ (18)

1. apríl 1992.
Ottó J. Björnsson: *Hvernig á að skilgreina miðgildi? Um mikilvægi skilgreininga í stærðfræði.*

„Allir, sem hafa einhverja nasasjón af tölfræði, vita hvað *miðgildi* er og *„fraktíl“* (e. *fractile, quantile*). Engu að síður greinir tölfræðinga á um, hvernig skilgreina eigi þessi hugtök, og er það oft gert með losaralegum hætti.

Í fyrirlestrinum verða settar fram skilgreiningar á þessum hugtökum og sýndar tvær snotrar setningar, sem réttlæta þær. Jafnframt varpa þær ljósi á, hversu mikilvægar skilgreiningar eru í stærðfræði.“ (19)

13. apríl 1992.
Einar Steingrímsson: *Lýsitölur umraðana. Hnig og slig og fleira i þeim dúr.*

„Menn hafa lengi fengizt við að rannsaka ýmsa eiginleika umraðana í samhverfugrúpunni S_n. Lítum til dæmis á umröðunina 45132. Við segjum, að hún *hnígi* í 2. og 4. sæti, af því að tölurnar í þeim sætum eru stærri en þær, sem fylgja næst á eftir ($5 > 1$ og $3 > 2$). Ennfremur er sagt, að 1. og 2. sæti séu *sliguð*, því að tölurnar í þeim sætum eru stærri en raðtölur sætanna ($4 > 1$ og $5 > 2$). Ef við látum $A(n,k)$ vera fjölda umraðana í S_n með k hnig og $E(n,k)$ fjölda þeirra, sem hafa k slig, þá má sýna fram á, að $A(n,k) = E(n,k)$.

Tölurnar $A(n,k)$, eða margliðan

$$A(n,0) + A(n,1)t + A(n,2)t^2 + \cdots + A(n,n-1)t^{n-1},$$

og aðrar *lýsitölur* samhverfugrúpunnar (þ.e. tölur, sem lýsa tilteknum eiginleikum umraðana) birtast í ýmsu samhengi bæði í *talningarfræðinni* og í öðrum greinum stærðfræði, svo sem í *algebru, rúmfræði* og *svipfræði.* Í fyrirlestrinum verður gerð nokkur grein fyrir þessu efni, þar á meðal rannsóknum fyrirlesarans.“ (21)

20. maí 1992.
Tómas Jóhannesson: *Landslag á jöklum.*

„Landslag á jöklum mótast einkum af flæði jökulíssins yfir ójöfnur í landinu, sem undir liggur, þó önnur atriði, t.d. jarðhiti, komi þar oft við sögu. Jökullandslag er yfirleitt ekki áberandi úr fjarlægð, vegna þess að yfirborðið er snjóhvítt og erfitt er að greina misfellur. Þegar sól er lágt á lofti, sést þó greinilega, að landslagið auðkennist af gárum eða bylgjum, sem oft eru með bylgjulengd í grennd við 3–4 ísþykktir og útslag á stærðarþrepinu 10–20 m. Skýra má myndun þessa landslags út frá almennum kenningum um flæði jökulíss með því að reikna þá lögun jökulyfirborðsins, sem svarar til stöðugs ísflæðis yfir skarpan tind í jökulbotninum. Þessi aðferð veitir mun betri skilning á eðli jökulflæðisins en hefðbundnar aðferðir, sem byggjast á Fourier-greiningu og yfirfærsluföllum.

Í erindinu verður fjallað almennt um flæði jökla og mótun jökullandslags. Einnig verður fjallað um viðbrögð jökla við loftslagsbreytingum og útskýrt, hvernig kenningarnar, sem notaðar eru til þess að skýra mótun landslags á jöklum, leiða til nýrra niðurstaðna á því sviði.“ (27)

2. júlí 1992.

Kristján Jónasson: *Niður hlíðina og út dalinn. Ítrekuð línuleg beztun fyrir ólínulega hámarkslágmörkun.*

„Í erindinu verður fjallað um nýja aðferð til að leysa verkefni við *hámarkslágmörkun*, sem eru *rýr* og *ólínuleg*. Í slíku verkefni á að finna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sem gefur minnsta gildi á stærðinni

$$\max_{1 \leq i \leq n} c_i(\mathbf{x}),$$

þar sem hvert fallanna $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er þjált. Að verkefnið sé *rýrt* þýðir, að hvert fall c_i, sem er fall af n breytistærðum, sé í rauninni óháð sumum þeirra.

Aðferðinni má líka beita á venjuleg beztunarverkefni með hliðarskilyrðum, því þau er hægt að umrita sem verkefni við hámarkslágmörkun af ofangreindri gerð. Tölvukerfið *Matlab* mun verða notað til að sýna aðferðina myndrænt í verki og útskýra með því heiti erindisins.“ (21)

8. október 1992.

Guðmundur Guðmundsson og Gunnar Stefánsson: *Mat á stærð fiskistofna.*

„Í flestum aðferðum til að meta stærð fiskistofna er á því byggt, hversu mörgum fiskum er landað úr hverjum árgangi, ef fáanlegar eru upplýsingar um það. Nánast allar aðferðirnar nota sama líkanið til að tengja aflatölurnar við stofnstærð, en talsverður munur er á, hvernig reiknað er með að skekkjur hafi áhrif. Oftast eru til viðbótar notaðar upplýsingar um sókn eða afla á sóknareiningu.

Kynntar verða aðferðir, sem notaðar eru hér á landi, og má flokka þær eftir því, hverjar forsendurnar eru. Fyrst er að nefna reikniaðferðir, þar sem gert er ráð fyrir fastri sókn og engum skekkjum, en þær eru ekki notaðar nema sem hluti af öðrum aðferðum. Þá koma tvenns konar aðferðir, þar sem gert er ráð fyrir, að ekki séu neinar skekkjur í aldursgreindum afla, en mismikið tillit er tekið til skekkju í sóknargögnum. Að lokum verður kynnt aðferð, sem byggð er á tímaraðagreiningu og Kalman-síu, en í henni er tekið tillit til skekkju í aflagögnum auk sóknargagna. Auk þess nýtir þessi aðferð öðrum aðferðum betur upplýsingar, sem felast í aflagögnum.“ (42)

29. október 1992.

Þórður Jónsson: *Um tengsl grannfræði og skammtafræði.*

„Í fyrirlestrinum verður lýst nýlegum stærðfræðiaðferðum, sem tengja hugmyndir úr skammtafræði við sígildar spurningar í grannfræði og hnútafræði. Aðferðunum verður að mestu lýst með einföldum dæmum.“

Í upphafi fundar var á það minnt, að tveimur dögum síðar yrðu liðin 45 ár frá stofnun félagsins. Lesið var bréf frá Bjarna Jónssyni um Vilhjálm Ögmundsson á Narfeyri, sem birt er í þessu *Fréttabréfi.* (31)

26. nóvember 1992.

Rögnvaldur G. Möller: *Óhefðbundinn örsmæðareikningur.*

„Í kennslubókum er víða sagt frá því, að fyrr á öldum hafi menn byggt stærðfræðigreiningu á hugleiðingum um *óendanlega litlar stærðir,* til dæmis hafi *Leibniz-táknið dx*, sem víða skýtur upp kollinum, verið hugsað sem óendanlega lítil stærð. Hvorki Leibniz né sporgöngumönnum hans tókst að gera viðunandi grein fyrir því, hverjar þessar óendanlega litlu stærðir væru né hvaða lögmálum þær lytu. Um 1960 tókst svo rökfræðingnum *Abraham Robinson* að byggja rökfræðilegan grundvöll fyrir stærðfræðigreiningu, sem réttlætir hugmyndir Leibniz. Bók hans, *Non-standard Analysis,* kom svo út árið 1966.

Í fyrirlestrinum verður gerð grein fyrir hugmyndum Robinsons. Engum rökfræðilegum galdrabrögðum verður beitt, heldur byggt á algengum stærðfræðilegum aðferðum, sem flestir ættu að kannast við. Einnig verða notuð einföld dæmi til útskýringar.“ (27)

Þriðji dagur jóla 1991 og fjórði dagur jóla 1992.

Jólafundir voru haldnir í *Skólabæ,* þar sem málefni félagsins og önnur stærðfræðileg hugðarefni voru rædd með óformlegum hætti. Á fyrri fundinum spjallaði Guðmundur Arnlaugsson um fyrstu ár félagsins og las úr Þjóðólfi frá 1861 eftirmæli Björns Gunnlaugssonar um Jón Bjarnason bónda og stjörnufræðing í Þórormstungu. Á seinni fundinum las Jón Ragnar Stefánsson valda kafla úr reikningsbók Ólafs Stefánssonar stiftamtmanns, *Stuttri undirvísun í reikningslistinni og algebra,* sem var samantekin og útgefin árið 1785 handa skólalærisveinum og öðrum unglingum á Íslandi. (22) (29)

Reynir Axelsson:

RÆÐA EFTIR BJÖRN GUNNLAUGSSON

Í nokkuð mörg ár hef ég vitað af handriti með skólasetningarræðu um *nytsemi mælifræðinnar* (þ.e. stærðfræðinnar) eftir Björn Gunnlaugsson. Þetta er handritið *ÍB 92, 8vo,* sem varðveitt er í Landsbókasafni, og er ritað með hendi Magnúsar Bergssonar (1799–1893), síðar prests (og föður Eiríks Magnússonar í Cambridge). Ekki er það alveg óþekkt, því að þess er getið í *Landfræðissögu* Þorvalds Thoroddsen, í kaflanum sem fjallar um landmælingar Björns Gunnlaugssonar.[1] Ræða Björns hefur mér alltaf þótt stórskemmtileg og eiga það skilið að koma fyrir augu allra sem hafa áhuga á stærðfræði og stærðfræðikennslu. Þegar til tals kom að birta hana hér í *Fréttabréfi* fannst mér hins vegar rétt að leita hvort ræðan væri til í eiginhandarriti Björns. Leitin bar skjótan árangur. Ræðan er varðveitt í litlu kveri í handritinu *Lbs. 2119, 8vo,* sem er böggull með ýmsum samtíningi úr eigu Björns.

Handritið *ÍB 92, 8vo,* hefur titilblað með eftirfarandi texta:

Ræda
haldin vid Skólatíma-Býriun þann 2^{an} *October haustid 1823–24*
af Adjunctus vid Bessastada-Skóla
Mathematicus Býrni Gunnlögssýni
til gamans mínum kiæra elskuverda Ólafi Ólafssýni,
ad skilnadi, af mier undirskrifudum upphripud.
in fidem. Magnus Bergsson.

Eiginhandarrit Björns Gunnlaugssonar ber hins vegar aðeins yfirskriftina *October 1822.* Nú kynni einhverjum að þykja forvitnilegt að vita hvaða ár ræðan var flutt, þó ekki væri nema vegna þess að haustið 1823 settist Jónas Hallgrímsson í skólann. Ekki hef ég þó óyggjandi svar við því.

Björn Gunnlaugsson var gerður að *Adjunct ved Bessestad lærde Skole* með bréfi dagsettu í maí 1822. Í uppkasti lektors (þ.e. rektors) Bessastaðaskóla að skýrslu um skólastarfið, sem varðveitt er í Þjóðskjalasafni, má lesa að við skólatímabyrjun 1. október 1822 hafi mátt hlýða á *„Sang og en Tale paa Islandsk af Hr Adjunct Gunlögsen“.* Árið

[1] Þorvaldur Thoroddsen: *Landfræðissaga Íslands, III,* Khöfn, 1902, bls. 330.

1823 var skólatímabyrjun hins vegar 2. október, eins og segir í handriti Magnúsar Bergssonar. Í uppkasti lektors er getið um *„Sang og Tale paa Islandsk“*, en ekki er nefnt hver ræðuna flutti. Nú er eðlilegt að ætla að Björn hafi flutt ræðuna um nytsemi mælifræðinnar haustið 1822. Þá má spyrja hvort hann hafi endurtekið hana næsta ár, eða hvort Magnús hefur misminnt hvert árið var. Magnús útskrifaðist úr Bessastaðaskóla í maí 1824 með góðum vitnisburði í stærðfræði. (Í einkunnabókum skólans í Þjóðskjalasafni fær hann m.a. einkunnirnar *arithmetica et algebra: egregia laude* og *geometria: magna laude.*) Hann hefði væntanlega hlýtt á ræðu Björns hvort árið sem hún var flutt.

Það má velta því fyrir sér hvernig handrit Magnúsar er til komið. Talsverður orðalagsmunur er á því og eiginhandarriti Björns, en enginn sem máli skiptir efnislega. Titilblaðið er eina ástæðan til að ég ræði handritið frekar. Ekki treysti ég mér nægilega í handritafræði til að dæma um hvort það geti verið afskrift af því handriti Björns sem er í *Lbs. 2119, 8vo.* (Ég hef ekki reynt að leita af mér allan grun um hvort til gæti verið annað og seinna handrit með hendi Björns). Enginn vafi getur þó leikið á því að það er afskrift, því að í því eru villur sem stafa greinilega af mislestri frekar en misheyrn. Sem dæmi má nefna að í handritinu kemur fyrir orðasambandið *theoremata gloriarum*, og olli það mér og mörgum sem ég spurði talsverðum heilabrotum, því að vandséð var hvaða niðurstöðu gæti verið um að ræða. Skýringin fannst í handriti Björns, því að þar stendur *theorema taylorianum.* Þá er ljóst að *y* hefur verið mislesið sem *g*, *n* verið mislesið sem *r*, og stafirnir *ta* hafa verið fluttir milli orða. Ekki er ljóst hvenær handrit Magnúsar var skrifað, og ekki treysti ég mér nú til að leiða getum að hver sá Ólafur Ólafsson var sem það var skrifað fyrir.

Í ræðu Björns sem hér kemur fyrir sjónir hef ég fylgt handriti hans sjálfs í *Lbs. 2119, 8vo.* Mér þótti ekki ástæða til að hafa það stafrétt, heldur færði ég stafsetningu til nútímalegra horfs, leiðrétti það sem ég taldi vera ritvillur (sem voru örfáar), gerði lítilsháttar breytingar á greinarmerkjasetningu (til dæmis bætti ég inn kommum í upptalningum) og fjölgaði greinaskilum. Burtséð frá stafsetningu reyndi ég að halda upphaflegum orðmyndum og samræmdi þær ekki. Neðanmálsgreinar eru skýringar mínar.

Björn Gunnlaugsson:

UM NYTSEMI MÆLIFRÆÐINNAR

Þegar menn taka sér eitthvört verk fyrir hendur kærir lærisveinar! þá er skynsamlegt að yfirvega, og spyrja sjálfan sig: hvarfyrir gjöri ég þetta? og hvaða nytsemi er af því? Þegar þér nú til skólans komið, þá er tilgangur ykkar að undirbúa ykkur til að geta á síðan með lærdómi gagnað ykkur sjálfum og föðurlandinu. Þar eð nú í skólanum eru viss vísindi á borð fyrir ykkur borin, *religion, tungumálafræði, historia, geographia* og *mathematik,* þá kynni ykkur til hugar koma að spyrja: hvarfyrir eigum vér að læra þessi vísindi? og hvör er nytsemi þeirra?

Nytsemi religionarinnar þekkið þér, að gjöra manneskjurnar fyrir dyggðina farsælar; tungumálafræðinnar einninn, að opna aðgang til framandi rita og annarra þanka; um historiuna munið þér hvað Cicero sagt hefur: *Historia est magistra vitæ;*[1] og að *geographia* er undirtylla historiunnar. En þar mathematik er nú fyrst hér innfærð þá þekkið þér væntanlega síður nytsemi hennar, og þessvegna vil ég í trausti yðar á þessu stundarkorni hjala eitthvað um nytsemi *mælifræðinnar.*

Nytsemi mælifræðinnar er bæði almennileg fyrir lönd og lýði og sérdeilisleg fyrir iðkarann sjálfan. Látum oss fyrst yfirvega þá almennu, og er hún so margföld, að ekki nærfellt upptalin verður. Á meðal mælifræðinnar greina er hér í landi reikningslistin mest kunnug, og hvörsu *margföld* er ekki nytsemi *hennar*? Án hennar gæti engin kauphöndlan staðizt, hvörki við útlendar né innlendar þjóðir, engin kaupskip yfir hafið siglt, að ég ekki tali um það, að enginn bóndi gæti hokrað, ef öngva tölu vissi, og ekkert stand er utanlands eða innan sem ekki þurfi einhvörsstaðar tölunnar við.

Bókstafareikningur og algebra útvíðkar reikningslistina so mjög, að menn fyrir þeirra hjálp geta útreiknað þau tilfelli sem eru so flókin, að enginn mannlegur skilningur gæti þau annars sundurgreitt og gegnumséð, og hjálpast so bókstafa- og talnareikningur þanninn að, að bókstafareikningurinn útreiknar á undan sjálfa aðferðina eða regluna, en talnareikningurinn brúkast á eftir til að finna það eftirleitaða í tölum

[1] Sagan er skóli lífsins.

eftir þeirri reglu sem bókstafareikningurinn hjálpaði til að finna. Bókstafareikningurinn ætti að heita reglureikningur, því eins og talnareikningurinn útreiknar tölur af tölum, eftir þekktum[2] reglunum so reiknar bókstafareikningurinn út sjálfar reglurnar af öðrum reglum, samansetur þær, sundrar og umsnýr uppá ótalfaldan máta. Bókstafareikningurinn vísar veginn, en talnareikningurinn gengur hann.

Af bókstafareikningi framkemur því engin útreiknuð tala, hann er ráðagjörð en engin framkvæmd. Þar á móti er talnareikningurinn framkvæmdin, hvör eð þó á stundum ekki getur skeð án undangangandi ráðagjörðar. Þó að nú þessu sé þanninn varið að bókstafareikningurinn sé ráðagerðin og talnareikningurinn sé framkvæmdin, þá hefur bókstafareikningurinn samt þar að auki aðra nytsemi, nefnilega að hann útreiknar stærðanna og talnanna almennilegu eða allsstaðar gildandi lögmál, afmálar eins og í spegli hvörninn stærðirnar hanga saman og hvörninn þær útleiðast hvör af annarri, hann kennir því náttúru talna og stærða, langtum framar en talnareikningurinn, og sýnir hvörninn menn geta uppá margbreytilegan máta hugleitt sömu stærðina og umbreytt henni úr einu formi í annað. Að geta virt fyrir sér sama hlutinn uppá fleiri máta er mikið nytsamt, því af þeim mörgu skoðunarmátum geta menn þá útvalið þann sem það og það sinn er hentugastur, líka verða hlutirnir oss ljósari og kunnugri þegar vér getum velt þeim fyrir oss á allar síður og skoðað öllumegin; líka er yfrið skemmtilegt að sjá hvörninn þessi ýmislegu álit á stærðunum samstemma hvört öðru, hvörninn þau tengjast hvört við annað og hvörninn leiðir liggja frá einu til annars, og hvörninn það eina sjónarmið lítur út þegar það er skoðað frá öðru. Bókstafareikningurinn verður þá eins og stærðanna almennileg skuggsjá í hvörri má skoða stærðanna heila samanhengi öllumegin. Af þessum margvíslegu innbyrðis tilsýndaskiptum má þá skilja að fram verða að koma og opnast nýir reikningsvegir flokkum saman, og að þarmeð útvíðkist margfaldlega nytsemi talnareikningsins. Hvörsu fallegt og skemmtilegt er þá ekki að yfirsjá í einu, rétt eins og í landkorti málaða alla þá margvíslegu vegi, sem liggja frá hvörju einu takmarki, til hvörs eins annars takmarks?

Algebra í þrengri merkingu er partur bókstafareikningsins í víðari merkingu; rétt eins og fjölkunnug norn leysir hún allar stærða- og talna-

[2] Í handriti: þeckum.

flækjur og greiðir úr þeim hvörja stærð er vill; hún umsnýr reikninganna völundarhúsum álíkt og konur umsnúa fati og lætur útsnúa hvað hún vill. Hún leiðir hvörja stærð er hún vill út úr samanhenginu og ákvarðar hana annaðhvört með tölu eða reglu útaf hinum stærðunum í samanhenginu. Hún burtvísar stærðum sem henni ekki líkar, og innkallar aðrar, sem henni er betur í þokka við.

Nú veit ég að einhvör vill segja og spyrja: Verið getur það að sönnu að þessir reikningar kenni alla mögulega umsnúninga og umveltingar stærðanna; og þetta sé gott fyrir þá sem ekki hafa annað að gjöra, og mega því eyða tíðinni með að vera að leika sér að þessu, eins og nokkurskonar tafli; en eru þá allir þessir umsnúningar og umveltingar í nokkru meira verðir en leikfang? Geta þjóðirnar nú ekki eins vel án þeirra verið, eins og í fyrndinni, áður en veltingakunstir þessar uppfundnar voru? Þú lofaðir að sanna að mælifræðin væri nytsöm eða nauðsynleg fyrir lönd og lýði, og lengra ertu enn nú ekki kominn í því en að þú hefur sannað að talnareikningur væri flestum stöndum nauðsynlegur, og að bókstafareikningur og algebra útvíðkuðu talnareikninginn, með sínum umsnúningum og byltingum. En er þá þarfyrir allur sá byltingalærdómur nauðsynlegur fyrir lönd og lýði? Er þá öll þessi útvíðkan talnareikningsins er þar af leiðist ómissandi löndum og lýðum? Er þá þjóð hvör því farsællri sem hún kann fleiri reikningaveltur? Er þá að minnsta kosti ekki sumthvað af þessu ónauðsynlegt?

Hér uppá svara ég: að allar mælifræðinnar lærdómssetningar hafa sína nytsemi; og þó þær í fyrstu sýnist gagnslausar í sambúð manna, þá má samt ómögulega kasta þeim, því næst um því öll *mathesis pura*[3] hefur hvervetna þá leyndarkosti, sem ekki koma fyrir sjónir fyrr en aðrar kunstir og vísindi koma til, so sem náttúruspeki, hvörjar í sameiningu með henni útrétta oft og tíðum allra stærsta gagn; og so er hvör lærdómsgrein í *mathesi pura* að þegar menn sjá hana fyrst vita menn varla til hvörs hún er, en þó er hún sem oftast lykill til óteljandi dyra á náttúrunnar notabúri, í hvört vér sækja verðum allar vorar nauðþurftir. Hafi maður þá forsmáð þennan lykil, fyrir því maður ekki vissi *hvar að* hann gekk, og því ekki hirt um að geyma hann í minnisvasa sínum, þá kemst

[3] Hrein stærðfræði, sem Björn Gunnlaugsson hefði kannski kallað óblandaða mælifræði.

maður ekki inn um dyrnar, þó einhvörn tíma að þeim komi, og meinar jafnvel að enginn lykill að þeim gangi og að náttúrunnar höfundur hafi fyrirmunað öllum mannlegum krafti inngönguna um þær dyr.

En hafi maður geymt lykilinn, þá ekki einasta kemst maður inn, heldur finnur þar inni marga áður óþekkta fjársjóðu og oft og tíðum þar innaraf enn nú margar dyr, að hvörjum ævinlega finnst lykill einhvörsstaðar á mælifræðinnar lyklahring, og menn ekki vissu til hvörs var, fyrr en menn fundu þessar innri dyr, hvörjar allar sá fyrri ytridyra lykill geymdi, án þess nokkur af þeim vissi; og þanninn sannast málsháttturinn: *Ignoti est nulla cupido.*[4]

Til þess að geta lifað, og lifað þægilegu lífi, verðum vér að nota þau gæði sem guð hefur oss í náttúrunni fyrirbúið, til að nota náttúrunnar gæði verðum vér að þekkja hennar gang; til að geta þekkt hennar gang verðum vér eða að minnsta kosti nokkrir af oss að rannsaka hann; til að rannsaka hann verðum vér að reikna hann út oft og tíðum með *mathesi applicata;*[5] til að reikna með *mathesi applicata* verðum vér að þekkja *mathesin puram* og það til hlítar; og til þess að þekkja hana að gagni verðum vér að kynna oss öll veltingabrögð hennar að so miklu leyti sem oss er mögulegt; og höfum vér ekki allir tækifæri og tómstundir til þess, þá verðum vér að senda nokkra njósnarmenn út sem gjöri það fyrir oss. Sérhvör þjóð ætti því að hafa sína *mathematicos* til að senda þá út í náttúruna sem njósnarmenn á undan sér til að rannsaka hennar leyndardóma og sem vísi síðan þjóðinni á eftir hvört hún leita skuli til að finna þau gæði sem í henni eru fólgin.

So að ég færi eitthvört dæmi uppá það hvað þjóðunum gagnar að þar séu meðal þeirra nokkrir *mathematici* sem fyrir þær njósnist um náttúrunnar ókunna land; nefni ég hinn gamla Archimedes sem sagt er að hafi með brennispeglum eða einhvörju öðru sem vísindi hans hjálpuðu honum til; kveikt eld í skipaflota Rómverja sem ásókti föðurland og fæðingarstað hans Syracusa á þriðju öld fyrir Christi fæðing. Sama hafði Proclus gjört í Constantinopel við skipaflota Vitaliani.[6] Menn halda þeir hafi gjört það með brennispeglum frá staðarins múrum; en hvörninn sem þeir hafa

[4] Lauslega þýtt: Enginn girnist það sem hann þekkir ekki.

[5] Heimfærð stærðfræði.

[6] Af orðanna hljóðan mætti ætla að Proclus hafi verið uppi á undan Arkimedesi.

að því farið, þá er víst að þeir hafa þar til brúkað eitthvað sem náttúruspeki þeirra vísaði þeim einum á og sem öngvum öðrum var kunnugt. Líka hafa menn margar frásögur um Archimedes hvörsu hann með sinni mechanik gagnaði sínu föðurlandi, so sem að reisa uppá endann skip óvinanna, og granda þeim með ýmsum maskínukröftum. Hvörsu nytsamar eru ekki í stríðstíðum sovel þær gömlu valslöngur og kastmaskínur sem þær nýjari púðurmaskínur, byssur, fallstykki, bombur og so framvegis. Þessar bombur eru nokkurskonar fallstykkiskúlur sem eru hvör innaní annarri, so tilbúnar að þegar sú eina er dottin, og hefur gjört óvinunum tjón, sprengir sú sem er innanundir henni hana utan af sér, ólmast af stað að nýju og eyðileggur, og þegar hún er fallin sprengir hin þriðja innaní henni hana utan af sér, og gjörir eyðileggingar bæði með brotum þeirrar sprengdu og so með sínum eigin stökk, og gengur þetta koll af kolli þangað til allar kúlurnar í bombunni eru sprungnar. Skuli menn með fallstykkjum í stríðstíðum geta skotið til óvinanna verða menn að kunna rétta brúkun þeirra, og meðal annars halla þeim mátulega, so að kúlan eftir að hafa mátulega skáhallt uppstigið, áframhlaupið og skáhallt fallið slengist niður í mátulegri fjarlægð. Þessi boglína útreiknast með *analysi sublimiori*, nefnilega *integral- og differentialreikningi* og þessir hærri reikningar byggjast aftur á *analysi inferiori*, bókstafareikningi, *algebra* og *geometria*. Hafi maður ekki numið þessa, þá geta menn ekki brúkað hina; því í allri mathematik hleðst hvað ofan á annað eins og lög í veggjum; og eins og ef í veggjunum undirlagið ekki er fyrst lagt, þá verður ekki síðan ofaná byggt, so er og í mathematik; hafi menn forsómað hið lægra kemst maður ekki til þess hærra. Þanninn verða menn bæði að læra þá hærri og lægri mathematik til að geta duganlega forsvarað sitt föðurland. Hérí verða þjóðirnar að hlaupa í kapp hvör við aðra til að rembast við að verða ekki miður útbúnar en aðrar so aðrar sterkari ekki yfirfalli og eyðileggi þær. En til að uppfinna og útvega sér þessar varnir þarf ríkdóm af járni og öðrum málmum og kunnáttu til að tilbúa þær varnir þaraf. Þetta gjörist og léttist alltsaman með maskínum so bæði hjálpar mathematik til að draga ríkdóminn að sér úr náttúrunnar skauti, og líka til að gjöra sér af honum varnir.

Umsátur Rómverja um Sýrakúsu var árið 214 f. Kr., en umsátur Vitalianusar um Konstantínópel var hins vegar árið 514 e. Kr. eða rúmum sjö öldum síðar.

Þó að nú ekki sé allra lyst og áform að læra stríðsaðferð; þá er samt þarfyrir utan margföld nytsemi mælifræðinnar fyrir lönd og lýði. Með *geometria* mælast lönd, semjast landkort, útskiptast jarðir millum eigenda og nágranna so enginn hafi skaða; hér í landi má mæla tún, afmarka dagsláttur, útkljá landaþrætur, mæla vegi, fastsetja mílnamót og þingmannaleiðir; hún væri líka mikið þénanleg smiðum öllum til að máta eitt og annað við smíðar sínar, og þar að auki brúkast *geometria* ásamt arithmetik allsstaðar í öllum mathematiskum vísindagreinum.

Með *mechanica* sem er einn parturinn af *mathesi applicata* eru uppfundnar ótal maskínur með hvörjum að menn láta vatn og vind mala korn, saga tré, höggva steina, þæfa þóf og fleira. Þaðan eru fengnar ótal maskínur fleiri sem vinna mannaverk með meira flýtir, stærri nákvæmni, með minna kostnaði og með léttara verði en það gæti gjörzt með mannahöndum, t.d. bómullar verksmiðjur hvar bómullin kembist og spunnin verður með maskínum, og samanberi menn það sem þaraf er ofið við það sem maskínulaust er gjört finna menn að það yfirgengur það í gæðum, fínleika og léttu verði. Frá þessari mechanik eru tilkomnar vogir, reiðslur, pundarar, stundaklukkur, spunarokkur, vefstólar, hjólagangur, talía og vinda, dúnkraftar, skrúfur, vatns- og loftpumpur allar, hitamælir, loftþyngdarmælir ómissandi til astronomiskra observationa, þar að auki dampamillnur, dampskip sem siglt geta móti vindi, flugmaskínur í hvörjum menn geta siglt í loftinu, þó þessar enn séu ófullkomnar og þessvegna hættulegar; *areometer* eður lagarvog með hvörri vega má eðlisþyngd rennandi og fastra hluta; vatnsspýtir (sprauta) eður *hydroconsisterium* til að slökkva húsbruna með; vatnsskrúfa Archimedis með hvörri má skrúfa vatn hátt upp, Heronsbrunnur, vatnshefjarar Siphones, og ótal fleiri maskínur sumpart til gamans og sumpart til gagns.

Eftir hydrostatiskum og hydrauliskum reglum gjörast allskonar byggingar í vatni, byggjast brúr og skip, stíflur og so framvegis. Þar að auki er *mechanica* fræði sú er kennir að útreikna krafta alla með sínum hræringum, flýtirum, hindrunum, so hún nær eða á að ná yfir allt sem er þreifanlegt í tíð eða rúmi eins og *geometria,* hún brúkast því víðast hvar í *mathesi applicata* og má reikna með henni margt það sem mörgum mundi sýnast ómögulegt út að reikna.

Þar næst kemur *optica* eður sjónarkunstin, sem er lærdómur um ljósið og skuggann samt hvörninn hlutirnir sýnast útlíta fyrir auganu með litum sínum og þeirra umbreytingum. Með þeirri fræði eru uppfundnir og útskýrðir speglar, stækkunargler og sjónpípur, so hafi maður við höndina það sem þar til heyrir, þá má so stækka það ósýnilega smáa með stækkunarglerum og nálægja það ósýnilega fjarlæga með kíkirum að hvorutveggja sjáanlegt verði; gjöra þá nærsýnu mátulega langsýna og þá of langsýnu mátulega nærsýna, gjöra margt það sýnilegt með náttkíkir og so kölluðu kattarauga, sem ósýnilegt er vegna dimmu; veita sólargeislum eins og vatnsstraumi ígegnum bognar krár og kima; gjöra margvíslegar sjónhverfingar; sýna ókunnar byggingar, afstöðu og landspláts fólki sem ei hefur séð þær; kveikja eld með sólargeislum við brennigler og brennispegla og yfirhöfuð á *optica* að útreikna hvörninn sérhvör þekktur hlutur lítur út fyrir auganu.

Hvað stjörnulistina *astronomiam* áhrærir þá er alkunnugt að hún ákvarðar fyrir oss tíðirnar, útvegar oss rétt útmæld sjó- og landkort, auðgar stýrimannskunstina með meðölum til að geta leiðbeint siglendum yfir höfin, gjörir sjóferðir meir og meir óhultar og vissar eftir sem þekkingin á himintunglanna gangi vex og jarðarhnattarins ásigkomulag verður meira kunnugt. En auk þessa fyllir stjörnulistin oss með gegnumþrengjandi undrun yfir guðs takmarkalausa mætti og speki, með því að láta oss með vorum mælinga- og reikningakunstum ekki geta botnað í þessum ómælanlega himinsins sólnageimi sem er undrunarfullur, bæði í tilliti til víðáttu og líka í tilliti til spekifullrar niðurskipunar.

Loksins eru byggingavísindin *architectura* eirninn mathematik heimfærð uppá byggingar til að gjöra hýbýlin sem rammbyggðust, hentugust og fegurst, að byggja skip þanninn að best gangi, séu sterk og rúmgóð. Hér í landi væri nytsamt að útreikna hvörninn bátar ættu að lagast til þess þeir gengju bezt og þartil ætti að brúkast *methodus de maximis et minimis in calculo variationum* eða máti að finna hóf hinnar stærstu eða minnstu verkunar í breytingareikningi. Þar að auki er stríðsbyggingakunstin sem kennir að byggja festingar sem og sókn og vörn í stríðum.

Þanninn hjálpar bæði mathematik og physik hvör annarri til að farsæla lönd og lýði. *Physica* útvegar úr náttúrunni efnið allt og gjörir tilraunirnar; en mathematik opnar vegi, útreiknar og metur smíðvélanna krafta og verkfæranna dugnað, samankeðjar langa röð af kunstugum ráðum til að ná því og því augnamiði; raðar niður eftir vissum reglum í vissa flokka þeim einfaldari ráðum eins og í velskipaða bókahillu so fljótt megi finna nær sem á þarf að halda, tekur þau so fram þegar vill hvört úr sínum skápi og setur þanninn saman ráð þessi að hún getur farið með sniðugleikans gandreiðum í gegnum margt eitt náttúrunnar ginnungagap eða *chaos* til þess tilætlaða miðs; og læt ég so þarmeð úttalað um gagnsemi hennar fyrir lönd og lýði, en eftirfylgir að tala um gagnsemi hennar fyrir iðkarann sjálfan.

Með nytsemi mælifræðinnar fyrir iðkarann sjálfan ætla ég þetta sinn fyrst að telja gaman eða skemmtun þá sem maður af henni hefur. Það skeður oft fyrst þegar menn fara að læra mathematik, að hún sýnist vera nokkurskonar óratandi myrkur, og verður þá hvört fótmál í henni so örðugt eins og maður ætti að vaða í klof einhvörja ófærð. En ekki skyldu menn uppgefast fyrir það því myrkur þetta verður að skærasta ljósi og færðin batnar. Menn verða smámsaman varir við að eitt hangir við annað eins og á taugum. Eftir sem menn finna þessar taugar fleiri, kemst maður uppá að leiða sig fram á þeim, þykist hróðugur að hafa sigrað hindranir, og þykir gaman að þeim smáíþróttum sem maður þar með lært hefur.

Þegar menn fara að finna að þessar taugar liggja útí náttúruna lengra og lengra eins og æðar útum líkama, þá fara menn að dansa á þessum listanna strengjum frá einu takmarki til annars, og þykir skömm til koma að stíga nokkrusinni fæti til jarðar. Til dæmis hér uppá vil ég tiltaka, að þegar menn hafa lært þá smákunst að mæla fjarlægðir, alleina með því að sigta á hlutina; mun mönnum víst þykja það snillilegra, en að mæla þær allar með sextugu færi. Þar að auki lærir maður ótal skrítnar smáíþróttir sem ómögulegt er að gjöra án kunstar, so sem með trigonometriu að útreikna hvað langt sé héðan til Pequin, ákvarða himintunglaganginn þar uppá það ítrasta, eins og maður væri þar; útreikna almanak fyrir innbyggjarana í einhvörjum blettinum í tunglinu, til dæmis fyrir þá sem búa undir Draumhöfða þar, *Promontorio somnii,* ákvarða hvaða lönd á jarðarhnettinum á vissri tíð sjáist þaðan, mæla fjöllin í tunglinu, og með einu orði að segja, uppá allan upphugsanlegan máta leika sér að plánetukerfi voru án nokkurar fyrirstöðu, og skoða það í krók og kring eins og það væri dálítil hnyklakippa. Að mathematik þanninn er saman-sett öllsaman af soddan smáíþróttum eða kunstum er þá sú fyrsta orsök hvarfyrir hún verður skemmtileg iðkara sínum; þar sérhvört verkefni eða *problema* er íþrótt sem sniðugleik þarf til að leysa; og er það áþekkt því að ráða gátur og þó enn líkara því, að setja leikbróður sínum hnyttilegt mát í skáktafli.

Sú önnur orsök til mælifræðinnar skemmtilegleika er sú fagra orða í hvörri þessar kunstir tengjast hvör við aðra, hvörninn þær samankoma eins og pílur sín úr hvörri áttinni, eins og Davíð segir um mann og kvinnu, giftast eins og manneskjur saman, og fæða af sér nýjar kunstir; verður so öll mathematik að samanhangandi íþrótta ætt; sem er útbreidd um alla náttúruna af sífelldum *generationum*. Þanninn er í *geometria* til dæmis sampössunar grunnstæðan móðir til hornamáls og jöfnuðar þríhyrninga, en hornamál gefur af sér lærdóminn um samsíðalínur og so framvegis, og er það næsta skemmtilegt að yfirskoða þessa skyldugleika og tengdir meðal mælifræðinnar lærdóma.

Það þriðja sem prýðir mathematik er hennar *elegantia* eða snilli, og er allteins ómögulegt hana að útmála fyrir þeim sem ekki þekkja hana eins og það að útmála fríðleikann fyrir þeim blinda; og víst er það að *Urania* skenkir eins áfengt á fyrir *mathematicos* sem *Polyhymnia* fyrir skáldin. Fyrir utan það að í mathematik hleðst kunst á kunst ofan, og sniðugleiki á sniðugleik ofan, fyrir utan það himinháa djúpsæri sem að eins af kunnugum fundið verður en aldrei fyrir ókunnugum útskýrt, djúpsæri sem þrengir sér í gegnum náttúruna eins og eldur, ekki til að eyðileggja hana heldur til að auglýsa hennar samstemmuprýði, hvarmeð náttúran sýnist og gjörist vísindamanninum langtum fegurri og elskuverðari en annars; fyrir utan allt þetta þá er í allri mathematik hátignarfull *subordination*, hvar allar lærdómssetningar í náttúrukraftaformi drottna eins og einvalds guðdómar í eilífri tíð og takmarkalausu rúmi; og eru maktir þessar so grundvallaðar, að þó himinn og jörð forgangi haggast ekki neitt um þeirra sannleiksríki, því það er ekki byggt eða stiftað á neinum líkamlegum eða umbreytanlegum grundvelli.

Einhvörjum þykir máske þetta ótrúlegt, en til að sanna mál mitt vísa ég til einnrar spurningar sem gamlir theologar og *scholastici* hafa verið að þrefa um nefnilega: hvort Guð með sínu almætti gæti gjört að einn og hinn sami hlutur væri undireins teningur og kúla? Hér uppá hafa þeir svarað: að tvennt væri það sem Guð gæti ekki, nefnilega það sem mótstæðilegt væri annaðhvort hans eða hlutanna veru og kölluðu það *impossibile respectu Dei* og *respectu rei;* og til þessa síðara heyrir áðurnefnt spursmál, og ræð ég þar af að þeim muni hafa þótt tvísýnt um hvort Guð gæti umbreytt mathematiskum setningum þar það væri *impossibile respectu rei.* Allt eins ómögulegt sem það er að sami hluturinn sé undireins teningur og kúla eða undireins tvennt mótstríðandi í sama tilliti, allteins ómögulegt er að haggist um lög þau sem drottna í mælifræðinnar lærdómssetninga kóngaríkjum.

Ég var farinn að tala um þær mathematisku *subordinationir* og vík nú til þeirra aftur. Þó að nú hvörein setning drottni í takmarkalausri tíð og rúmi, þá hafa þó þessi ríki samt í öðru tilliti sín takmörk so þau uppá vissan máta umgyrða hvört annað, og þaug víðari gjöra eins og hærri *sphæras* utanum ótal önnur. Þegar menn þá í þönkunum lyftast upp frá þeim lægri ríkjum og komast upp í hinar hærri *regiones,* þá opnast fyrir manni so hátignarlegt himneskt víðsýni að manni sýnist sem hann sjái útyfir eilífð fulla af eilífðum. Frá þessari sjónarhæð lítur maður í náttúrukraftarformi þá samstemmu, er setur milljónir af samstemmum í orðu, þá fegurð sem er lögmálið fyrir ótal ótal fegurðum. Og þá sýnist manni sem hann sé orðinn laus við allt veraldlegt, og upphafinn í himin þann, hvar samstemmuprýðirnar mætast á alþingi. Hér uppá vil ég taka eitt dæmi sem að nokkru leyti er ykkur fleirstum kunnugt. Útdráttur qvadratrótar er samsíða cubikrótarútdrætti, biqvadratrótar, surdesolidrótar, zensicubicrótar, bisurdesolidrótar, triqvadratrótar, bicubicrótar og so framvegis. Ómögulegt væri þeim minnisbezta manni að læra og nema aðskildar ýmislegar reglur til að útdraga sérhvört rótarkyn, þar þessi rótarkyn eru allt eins mörg sem þar eru margar ýmislegar tölur til, og þyrfti því að muna óendanlegan reglufjölda til að kunna að útreikna öll þessi óendanlega mörgu rótakyn. En allur þessi óendanlegi reglufjöldi innilykst í einni einustu höfuðreglu, sem er höfuðlögmálið fyrir öllum rótakynjum. Þetta höfuðlögmál var á fyrri öldum innifalið í hinni sokölluðu *tabula mirifica,* en á seinni tíðum í *theoremate binomiali* sem langt yfirgengur *tabulam mirificam.* Þar sér maður öll rótakyn í endalausri röð hvört við hliðina á öðru; þar sér maður á hina síðuna aðra endalausa röð af sokölluðum talnaveldum allt í lögmálsformi. Þar sér maður þá nýstárlegu samgöngu millum velda og róta.[7] Frá þessu *theoremate binomiali* liggur aftur vegur, upp í enn hærra himinhvolf; og fær maður ennú meira rómantíska útsjón útum *theorema taylorianum*, hvarí má sjá fyrir utan þetta *theorema binomiale* ótal aðrar himinfrægar sjónir sem ekki tjáir út að skýra.

Af þessum orsökum sem nú eru taldar er mathematik yfrið skemmtileg iðkara sínum, nefnilega þar hún er innifalin í íþróttum, er í fagri orðu, djúpsær, útgrunduð með sniðugleik, hefur subordineraðar og samsíða víðsýnir og skoðast í ótal myndum. En þar að auki er hún honum nytsöm til að æfa þenkingarkraft hans.

Á meðal heimspekinnar vísinda er fræði ein sem heitir *logica*, og kennir að þenkja reglulega, vera strangur sannleikans rannsakari, vera var í sínum ályktunum, regla niður vísindi, og leiða með gætni eitt út af öðru, færa röksemdir, gjöra aðgreiningu milli þess óbrjálanlega, þess mögulega, þess ómögulega, þess vissa, þess líklega, þess tvísýna, þess ólíklega; þetta kennir *logica*. En sökum þess að *usus magister est optimus*[8] og vaninn gefur listina og menn læra betur af æfingu helduren af lærdómsreglum tómum þá verður maður ekki fullnuma í þenkingarkunstinni þó maður læri logik, þar hún alleina kennir þenkingar reglurnar, menn þurfa því fyrir utan hana að hafa eitthvað sem inniheldur þankaæfingar, og þar til hafa menn ekkert sem í fyrstunni er hentugra helduren mathematik; so þar sem logik útvegar oss þenkingarinnar *theoriam*, þar útvegar oss mathematik þenkingarinnar *praxin*; og skuli annarshvors án vera, þá er betri minni *theoria* og meiri *praxis*, heldur en meiri *theoria* og minni *praxis*. Hér af kemur að öllum upplýstum þjóðum þykir logik og enn framar mathematik nauðsynleg vera öllum vísindamönnum, og þar vísindamennirnir skulu menntast í skólunum og síðan með eigin rannsóknum útvíðka vísindanna takmörk, þá er við alla vísindaskóla einninn kennd mathematik. Þetta hefur Plato gamli meint, þá hann ritaði yfir

[7] Ljóst má vera að Björn er hér að tala um tvíliðusetninguna fyrir brotna veldisvísa, með öðrum orðum óendanlegu tvíliðuröðina. Ekki hefur mér enn tekizt að finna hvað *tabula mirifica* er; en reglur um rótarútdrátt byggjast venjulega á venjulegu tvíliðusetningunni fyrir heila veldisvísa, og þá á tvíliðustuðlunum. Gæti þetta verið það sem við nú köllum *þríhyrning Pascals*?

[8] Æfingin er bezti kennarinn.

skóladyrnar hjá sér γδεις αγεομετρητος εισειτω, enginn vankunnandi í *geometria* gangi hér inn! Hann vildi ekki að neinn heyrði sínar djúpsæru kenningar nema sá sem með geómetrískum rannsóknum væri æfður orðinn í að þenkja og álykta.

En hvað mun þá til þess koma að mathematik er öðrum vísindum hentugri til í fyrstu að æfa mann í logik? *Í fyrstu* segi ég, því vera kann að hún sé ekki þar til öldungis einhlít og önnur vísindi þurfi því að koma til með. Þar uppá svara ég: Fyrst þarf það, hvar á viðvaningar skulu æfast, í fyrstu að vera létt; því annars fara þeir jafnnærri frá því. Þennan eiginlegleika hefur mathematik, því hvörgi er sannleikurinn í öðrum vísindum so hægur rannsóknar, og so greinilega aðskilinn frá ósannindunum sem í mathematik, því í öðrum vísindum má so oft disputera með og mót, framkoma oft orðastríð, og sannleikurinn fæst varla nema oft og tíðum hálfkarraður út úr þeim að lyktum. Hvar eru í nokkrum vísindum so litlar þrætur og kappræður um sannleikann sem í mathematik? Hvörsu lítið þarf ekki til þess að komast að sannleikanum í mathematik? og hvörsu mikið þarf ekki til þess þar á mót í öðrum vísindum? Menn þurfa ekki við *mathesin puram* að gjöra nein vandhæf né kostnaðarsöm *experimenta*, ekki gjöra langar reisur til fjarlægra landa, ekki að róta í neinum vandfengnum, illlæsum og vandskildum fornaldarskruddum og *manuscriptis*, ekki að byggja uppá vitnisburði lagasetningar og réttarbætur, ekki að reiða sig uppá annarra ráðvendni né dugnað. Menn þurfa yfirhöfuð ekki að trúa neinum nema sjálfum sér, en alleina nýta það sem aðrir segja, efað það þá samstemmir því sem maður sjálfur finnur, eða ef oss sjálfum so líkar, en annars ekki, og yfirhöfuð að tala, menn hafa allt hjá sjálfum sér; og hvar eru nokkur vísindi sem þanninn má útkljá? Þau mathematisku óblönduðu vísindi eru því hin auðveldustu og þess vegna hentugust viðvaningum til þankaæfingar.

Hin önnur orsök hvarfyrir mathematik er hin bezta æfing í logik, er sú að þótt sannleikann sé hægt að prófa í henni, þá liggur hann samt ekki strax í augum uppi. Menn verða því að rembast við í kút og kvartil að geta fundið hann, þó ekki sé hann langt að sækja. Menn æfast því betur í að leita hans þegar hann ekki strax hleypur í flasið á manni. Og *logica* sem maður skal æfast í er það einasta sem vísar manni á hann. Menn komast þar ekki fram nema með að leiða eitt út af öðru, og þvingast maður so til að tengja saman langa röð af ályktunum til að finna það sem maður vill finna, og þetta er eitt af því sem *logica* kennir. Þar á mót fá menn í öðrum vísindum ekki alltíð sannleikann einn útaf öðrum, heldur verða sannleikarnir þar oft samferða og samsíða, fæst annaðhvort enginn þeirra með neinu móti, ellegar þeir bjóða sig fram óeftirleitað, byggjast á frásögum og þesshattar og eru sundurlausir, reynir því ekki neitt á logiskar kunstir í því að ná þeim heldur alleina á philologiskar og anthropologiskar.

Sú þriðja orsök hvarfyrir mathematik er besta æfingarmeðal í logik, er sú nægð sem í henni er af samankeðjuðum djúpsærum lærdómum, so menn geta eins og á sundi sökkt sér so djúpt og grunnt sem vilja, valið sér mátulega þungt og þyngt á sér eftir auknum kröftum. Þó er ekki meining mín að mathematik sé einhlít til að æfa vísindamanninn fullkomlega í rannsókn sannleikans, hann ætti að venjast við fleiri tilbreytingar helduren fyrirkoma í mathematik. Til að rannsaka náttúruna þá lærir maður í physik að gjöra ítarlegar tilraunir samt í lögspeki og historískum vísindum að þekkja manneskjurnar og vara sig við þeirra brellum.

Lýk ég so tali mínu um nytsemi mælifræðinnar, vonandi að þér sjálfir á síðan sannið hvað ég sagt hefi jafnvel þó ykkur máske þyki nú eitthvað ótrúlegt sökum þess þér eruð henni öldungis ókunnugir, og hún so frábrugðin flestum öðrum vísindum. Hafið nú heilir hlýtt, og njóti sá er nemur!

RITFREGNIR

Við byrjum á ritfregn, sem af vangá einni saman hefur ekki birzt hér fyrr. Í *Tímariti Háskóla Íslands*, nr. 5, 1. tbl. 5. árg. (1990), bls. 57–66, er greinin *Er sólkerfið stöðugt?* eftir Robert Magnus. Greinin er byggð á erindi, sem höfundurinn hélt í nóvember 1987 á ráðstefnu Eðlisfræðifélags Íslands og Félags áhugamanna um heimspeki í tilefni af því að þrjár aldir voru liðnar frá útgáfu bókarinnar *Stærðfræðilögmál náttúruspekinnar (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)* eftir Isaac Newton.

Í greininni er fjallað um, hvernig skilningur manna á hreyfingu reikistjarna hefur þróast frá dögum Newtons til vorra daga. Greinin birtist svo í danskri þýðingu í *Normat (Nordisk Matematisk Tidskrift)*, 40 (1992), bls. 100–118, undir heitinu *Er solsystemet stabilt?*

Hugur, tímarit um heimspeki, var nefnt í ritfregn í síðasta *Fréttabréfi* og má vera, að einhverjir lesendur hafi ekki fyrr en þar séð þess getið. En hér verður þess getið öðru sinni, því þar [5 (1992), bls. 100–106] er nú að finna ítarlegan ritdóm eftir Kristínu Höllu Jónsdóttur og Skúla Sigurðsson um bókina *Stærðfræðisýnir: Iðkun rúmfræði á dögum Viktoríu drottningar á Englandi (Mathematical Visions: The Pursuit of Geometry in Victorian England)* eftir Joan L. Richards (Academic Press, 1988).

Þriðja og síðasta ritfregnin að þessu sinni er af gjörólíku tagi og tengist minningu látins félagsmanns.

Bókin *Örlagastund (Zero Hour)* (Red Deer College Press, 1991) eftir Kristjönu Gunnars, svo sem yngri dóttir Gunnars heitins Böðvarssonar nefnir sig í nýju heimalandi sínu, hefur að geyma meitluð minningabrot skáldsins um samskipti þeirra feðgina þann sára reynslutíma, sem þau áttu saman, eftir að ljóst varð, að örlagastundin rynni senn upp.

Meðan þess er beðið á sjúkrahúsi daglangt og nóttina alla, að faðirinn skýri frá ákvörðun sinni, hvort hann vilji leggjast undir skurðhníf að morgni nýs dags — ákvörðun, sem í huga Gunnars Böðvarssonar gat ekki orðið nema á einn veg — við læknana sagði hann alúðlega, þegar þeir höfðu haft spurnir af, hver vilji hans væri: „Það má vera, að þið vitið ekki, að ég er upprunninn úr þeirri siðmenningu, þar sem það telst hin mesta ógæfa, sem nokkurn mann getur hent, að deyja í rúmi sínu.“ — þá hrannast upp í huga dótturinnar minningar, þar sem hún sjálf gekk fram á svið í föður síns stað og tók við skjali heiðursdoktors frammi fyrir því fólki, sem var hreykið af honum og hann var hreykinn af.

Gunnar Böðvarsson (1916–89) var einn af stofnendum *Íslenzka stærðfræðafélagsins.* Hann starfaði erlendis síðasta aldarfjórðunginn en var hér tíður gestur og fylgdist af athygli með framvindu mála og lagði gott til þeirra. Hann var sæmdur nafnbót heiðursdoktors í raunvísindum við Háskóla Íslands sumarið 1988, en þá athöfn gat hann ekki sótt handan um haf sökum vanheilsu. Þeir mörgu félagsmenn, sem höfðu af honum kynni hver með sínum hætti, minnast hans með hlýhug og virðingu. Sú bók, sem hér er sagt frá og fjallar um reisn hans á hnignunarskeiði, telst til fagurbókmennta í fyllstu merkingu þess orðs.

Sverrir Örn Þorvaldsson:

LAUSNIR Á ÓLYMPÍUDÆMUNUM 1992

Hér á eftir sýnum við lausnir á dæmunum frá Ólympíuleikunum í stærðfræði 1992, sem birt eru á bls. 24–26 að framan.[1]

Lausn á 1. dæmi

Setjum $x = a - 1$, $y = b - 1$ og $z = c - 1$. Nú er

$$abc - 1 = (x+1)(y+1)(z+1) - 1 = xyz + (xy + xz + yz) + (x + y + z).$$

Við sjáum þá, að $(a-1)(b-1)(c-1) \mid abc - 1$ þá og því aðeins að $xyz \mid (xy + xz + yz) + (x + y + z)$. Skilgreinum nú fallið

$$H(x,y,z) = \frac{xy + xz + yz + x + y + z}{xyz}, \quad \text{ef} \quad x, y, z > 0.$$

Við eigum þá að ákvarða allar heilar tölur x, y, z með $0 < x < y < z$, þannig að talan $H(x,y,z)$ sé heil. Ljóst er við deilingu, að H er minnkandi sem fall af hverri breytistærð fyrir sig. Þar sem $H(1,2,3) = 17/6 < 3$, koma því einungis $H(x,y,z) = 1$ og $H(x,y,z) = 2$ til greina sem heil gildi á H. Einnig er $H(3,4,5) = 59/60 < 1$, svo að einungis $x = 1$ og $x = 2$ koma til greina.

$x = 1$: Athugum, að $H(1,y,z) = 1 + \dfrac{1 + 2(y+z)}{yz} > 1$, svo að við reynum að leysa jöfnuna $H(1,y,z) = 2$, en hún jafngildir jöfnunni $(y-2)(z-2) = 5$. Við fáum þá $y = 3$ og $z = 7$.

$x = 2$: Nú er $H(2,3,4) = 35/24 < 2$, svo að við reynum að leysa jöfnuna $H(2,y,z) = 1$, en hún jafngildir $(y-3)(z-3) = 11$. Við fáum þá $y = 4$ og $z = 14$.

Lausnir á verkefninu eru því $(a,b,c) = (2,4,8)$ og $(a,b,c) = (3,5,15)$.

---

[1] Lausnir á Ólympíudæmunum árið áður, 1991, birtust ekki hér í *Fréttabréfi*, en dæmin sjálf eru hins vegar í ágústhefti 1991. Lesendum er þess vegna bent á, að í *Normat (Nordisk Matematisk Tidskrift)*, **39** (1991), bls. 181–4, er sýnd valin lausn á hverju dæmi frá keppanda frá Norðurlöndum; meðal þeirra er lausn frá einum Íslendinganna, Frosta Péturssyni.

Lausn á 2. dæmi

Setjum $x = 0$ inn í jöfnuna og fáum

$$f(f(y)) = y + f(0)^2 \quad \text{fyrir öll} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Af þessu sést, að f er gagntæk vörpun. Setjum $s := f^{-1}(0)$. Þá er $f(s) = 0$ og

$$f(s^2) = f(s^2 + f(s)) = s + f(s)^2 = s,$$

svo að $f(f(s^2)) = f(s) = 0$. En við höfum einnig, að

$$f(f(s^2)) = s^2 + f(0)^2,$$

svo að $s = 0$. Þar með fæst um $x \in \mathbb{R}$, að

$$f(x^2) = f(x^2 + f(0)) = 0 + f(x)^2 = f(x)^2,$$

en þá er $f(-x)^2 = f(x)^2$, svo að $f(-x) = -f(x)$ (því f er eintæk). Einnig sést, að $f(x) > 0$, ef $x > 0$, en það notum við hér á eftir til að sýna, að f er sívaxandi. Við höfum nú

$$f(x^2 + y) = f(x^2 + f(f(y))) = f(x^2) + f(y) \quad \text{fyrir öll} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

svo að

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{fyrir öll } x, y \in \mathbb{R} \text{ með } x \geq 0. \tag{2}$$

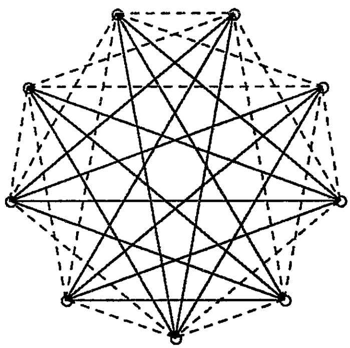
Ef $x < 0$, þá er

$$f(x + y) = -f(-x - y) = -(f(-x) + f(-y)) = f(x) + f(y),$$

svo að jafnan (2) gildir um öll $x \in \mathbb{R}$. (Þar stendur því velþekkt fallajafna.) Nú er f að auki sívaxandi, því ef $x > y$, þá er $f(x) - f(y) = f(x - y) > 0$. Þar sem $f(0) = 0$, fæst þar með af jöfnu (1), að $f(x) = x$ fyrir allar rauntölur x.

Lausn á 3. dæmi

Við sýnum, að minnsta slík tala sé $n = 33$. Ef 33 leggir eru litaðir, þá eru 3 ólitaðir. Veljum 3 hnúta, þannig að sérhver ólitaður leggur hafi annan endahnút sinn þeirra á meðal. Um hina hnútana 6 gildir þá, að sérhverjir tveir þeirra eru tengdir með lituðum legg. Það er velþekkt þraut að sýna, að einhverjir þrír þeirra myndi einlitan þríhyrning, og er lesandanum látið eftir að sýna það. Við þurfum því einungis að finna dæmi um net með 32 lituðum leggjum, þar sem ekki er unnt að finna einlitan þríhyrning, en slíkt net má sjá á myndinni að neðan.

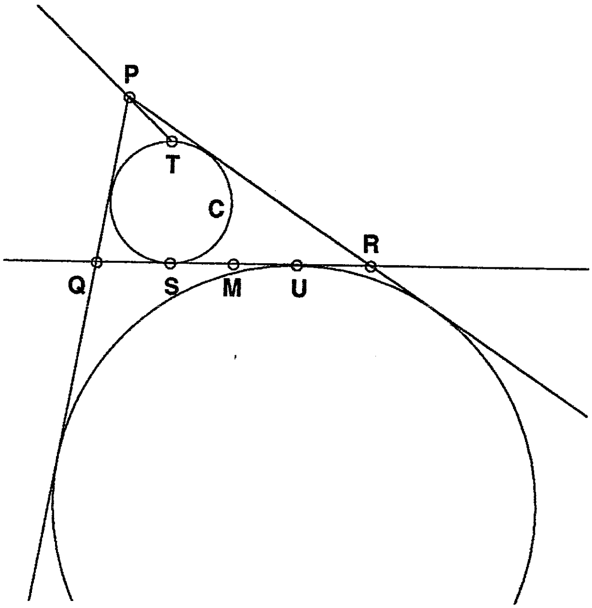


Lausn á 4. dæmi

Látum S vera snertipunkt ℓ og C. Veljum punkt T á C, þannig að ST sé miðstrengur C, og veljum punkt U á ℓ, þannig að M sé miðpunktur SU. Látum v vera opna geislann út frá T, sem er samsíða UT og sker ekki ℓ. Við sýnum, að v sé leg punktanna P, sem uppfylla skilyrðið.

Látum P vera punkt á v, drögum frá P snertla til C og látum Q og R vera skurðpunkta þeirra við ℓ. Stríkkum nú um punktinn P, þannig að T falli í U. Hringurinn C fellur þá í úthring $\triangle PQR$, sem snertir hliðina QR í T. Vel er þekkt, að þá er $|QS| = |RT|$, svo að M er miðpunktur QR.

Ef P uppfyllir skilyrðin í dæminu, þá stríkkum við um P, þannig að C falli í fyrrnefndan úthring. Punktinum T er þá varpað í punkt W, sem er snertipunktur ℓ og úthringsins. Eins og áðan er $|QS| = |RW|$, svo að M er miðpunktur SW. En þá er $W = U$, svo að P liggur á v.



Tvær lausnir á 5. dæmi

Látum $\pi_1 : S \to S_1$, $(x,y,z) \mapsto (y,z)$, vera þverstæða ofanvarpið af S á S_1. Þá er samkvæmt ójöfnu Cauchys og Schwarz:

$$|S|^2 = \left(\sum_{(y,z)\in S_1} |\pi_1^{-1}(y,z)| \right)^2 \leq |S_1| \cdot \sum_{(y,z)\in S_1} |\pi_1^{-1}(y,z)|^2.$$

Athugum nú, að vörpunin

$$\bigcup_{(y,z)\in S_1} \pi_1^{-1}(y,z)^2 \ni ((x,y,z),(x',y,z)) \mapsto ((x,z),(x',y)) \in S_2 \times S_3$$

er eintæk, svo að

$$\sum_{(y,z)\in S_1} |\pi_1^{-1}(y,z)|^2 \leq |S_2| \cdot |S_3|.$$

Þetta er sú lausn, sem höfundar dæmisins gáfu. Hún er glæsileg, en ekki veit ég til þess að neinn þeirra fáu, sem leystu dæmið, hafi gert það með svipuðum hætti. Það er því ekki úr vegi að sýna hér lausn eftir Frosta Pétursson, en hún er einnig snotur.

Við lítum á þau plön samsíða XY-planinu, sem innihalda stök úr S. Látum $Z_1, \ldots, Z_n$ vera upptalningu á þessum plönum. Látum x_i og y_i vera fjölda staka í ofanvarpi $Z_i \cap S$ á YZ-planið annars vegar og XZ-planið hins vegar, en látum z_i vera fjölda staka í $Z_i \cap S$. Athugum, að $z_i \leq x_i y_i$ fyrir öll i. Nú er

$$|S_1| = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad |S_2| = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{og} \quad |S| = \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Setjum $z_0 := \max\limits_{1 \leq i \leq n} z_i$. Við tökum eftir, að $|S_3| \geq z_0$. Þá er

$$|S_1| \cdot |S_2| \cdot |S_3| \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot z_0.$$

Nú er

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j + x_j y_i),$$

en

$$z_0(x_i y_j + x_j y_i) \geq 2z_0\sqrt{x_i y_j x_j y_i} \geq 2z_0\sqrt{z_i z_j} \geq 2z_i z_j,$$

svo að

$$\begin{aligned} z_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j + x_j y_i) \right) \\ \geq \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2z_i z_j = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \right)^2 = |S|^2. \end{aligned}$$

Af hvorri lausninni sem er sést, að jafnaðarmerkið gildir þá og því aðeins að $S = A \times B \times C$, þar sem A, B og C eru endanleg mengi.

Lausn á 6. dæmi

(a) Við sjáum fyrst, að jöfnurnar

$$n^2 = \sum_{i=1}^{n^2-13} k_i^2 \quad \text{og} \quad 13 = \sum_{i=1}^{n^2-13} (k_i^2 - 1)$$

eru jafngildar. Þar sem ljóst er, að ekki er unnt að rita 13 sem summu talna úr menginu $\{0, 3, 8, 15, \dots\}$, fæst, að ekki er unnt að rita n^2 sem summu af $(n^2 - 13)$ jákvæðum ferningstölum. Þá er $S(n) \leq n^2 - 14$.

(b)–(c) Samkvæmt setningu Lagrange má rita sérhverja jákvæða tölu af taginu $8k + 7$ sem summu nákvæmlega fjögurra ferningstalna. Ef unnt er að leysa jöfnuna

$$n^2 - a - 4b \equiv 7 \pmod 8) \quad \text{með} \quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ n^2 - a - 4b \geq 0, \tag{3}$$

þá má því rita $n^2 - a - 4b$ sem summu fjögurra ferningstalna, p^2, q^2, r^2, s^2. Þar með er n^2 summa m ferningstalna með $m = a + b + 4$:

$$n^2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 2^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

Við viljum því vita fyrir hvaða tölur m er unnt að finna a og b, þannig að (3) gildi með $m = a + b + 4$. Innsetning gefur

$$b \equiv 3(n^2 - m) - 1 \pmod 8.$$

Við veljum b, þannig að $0 \leq b \leq 7$, svo að viðbótarskilyrðin í (3) eru uppfyllt, ef $11 \leq m \leq n^2 - 17$. Svipað og í (a)-lið er einfalt að ganga úr skugga um, að fyrir m með $n^2 - 17 < m \leq n^2 - 14$ er hægt að rita n^2 sem summu m ferningstalna. Við höfum því sýnt, að ef $S(n) \geq 11$, þá er $S(n) = n^2 - 14$. Nú er

$$\begin{aligned}
13^2 &= 5^2 + 12^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 4^2 + 4^2 + 4^2 + 11^2 \\
&= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 12^2 \quad = 4 \cdot 2^2 + 3^2 + 12^2 \\
&= 4 \cdot 2^2 + 4^2 + 4^2 + 11^2 \quad = 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 12^2 \\
&= 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3^2 + 12^2 \quad = 8 \cdot 2^2 + 4^2 + 11^2,
\end{aligned}$$

svo að $S(13) \geq 11$ og þar með er $S(13) = 13^2 - 14 = 155$. Við sjáum einnig, að $S(k \cdot 13) \geq 11$ fyrir allar náttúrulegar tölur k, svo að $S(k \cdot 13) = (k \cdot 13)^2 - 14$ fyrir allar náttúrulegar tölur k.

NÝIR FÉLAGSMENN

Hér er birtur viðauki við *Félagatal*, sem kom í *Fréttabréfi* 1991. Eftir að það var gefið út hafa fimmtán nýir félagsmenn bætzt við og eru þeir allir í skránni hér að neðan. Að auki vantar í hina fyrri skrá einn félagsmann frá fyrri tíð og er bætt úr því hér. Félagsmenn eru nú 138 alls.

Þess er óskað, að upplýsingum til viðbótar eða beinum leiðréttingum við skrárnar verði komið á framfæri við félagið.

Agnar Höskuldsson, cand. stat., lektor, Danmarks Ingeniørakademi; Arnegårdsallé 7, DK 2840 Holte, Danmörku; hs. 4542 803516, vs. 4542 882144. *1992*

Anna Kristjánsdóttir, cand. pæd., prófessor, Kennaraháskóla Íslands; Vesturgötu 34, 101 Rvk; hs. 17817, vs. 688700, ak@rhi.hi.is. *1992*

Bjarni Guðmundsson, cand. act., tryggingafræðingur, Íslenzkri endurtryggingu; Rauðagerði 45, 108 Rvk; hs. 678197, vs. 681444. *1992*

Einar Steingrímsson, Ph. D.; Ásvallagötu 5, 101 Rvk; hs. 21601. *1992*

———————, Matematiska Institutionen, Chalmers Tekniska Högskola; Nordostpassagen 48, S-413 11 Göteborg, Svíþjóð; hs. 031-145209, vs. 031-7723583, einar@math.chalmers.se.

Erlendur Lárusson, fil. lic., forstöðumaður, Tryggingaeftirliti ríkisins; Fremristekk 4, 109 Reykjavík; hs. 74960, vs. 685188. *1966*

Eygló Guðmundsdóttir, B. A., menntaskólakennari, Menntaskólanum við Hamrahlíð; Breiðvangi 34, 220 Hafnarfirði; hs. 50001, vs. 685140/685155. *1992*

Fjóla Rún Björnsdóttir, licence; Grettisgötu 98, 105 Reykjavík; hs. 16664. *1992*

———————, Université de Paris VII; 39, rue Dauphine, 75006 Paris, Frakklandi.

Guðrún Gunnarsdóttir, Ph. D., Hafrannsóknastofnun; Háaleitisbraut 22, 108 Reykjavík; hs. 39027, vs. 20240. *1992*

Gunnar Traustason, B. S.; Eskihlíð 12b, 105 Rvk; hs. 19782. *1992*

———————; Balliol College, Oxford, traustas@vax.ox.ac.uk.

Gunnlaugur Björnsson, Ph. D., sérfræðingur, Raunvísindastofnun Háskólans (eðlisfræðistofu); Unnarbraut 9, 170 Seltjarnarnesi; hs. 612289, vs. 4428, gulli@raunvis.hi.is. *1992*

Helgi Þorleifsson, dr. rer. nat.; Bólstaðarhlíð 62, 105 Reykjavík; hs. 681773. *1992*

————, Math. Inst. der Univ. Göttingen; Bunsenstraße 3/5, D-3400 Göttingen, Þýzkalandi; hs. 0551-300988, vs. 0551-397770, hthorle@cfgauss.uni-math.gwdg.de.

Magnús Már Halldórsson, Ph. D.; Smáraflöt 30, 210 Garðabæ; hs. 657647. *1993*

————; School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku, 15 Asahidai, Tatsunokuchi, magnus@jaist-east.ac.jp.

Ragnar Þ. Ragnarsson, cand. scient., Tryggingaeftirliti ríkisins; Engihjalla 17, 200 Kópavogi; hs. 45620, vs. 685188. *1992*

Ragnheiður Guðmundsdóttir, Ph.D., lektor, Kennaraháskóla Ísl.; Miðstræti 5, 101 Rvk; hs. 17354, vs. 688700, ragngud@ismennt.is. *1992*

Sverrir Örn Þorvaldsson, B. S., Softis hf.; Öldugötu 55, 101 Reykjavík; hs. 11897, vs. 694911, sverrir@softis.is. *1992*

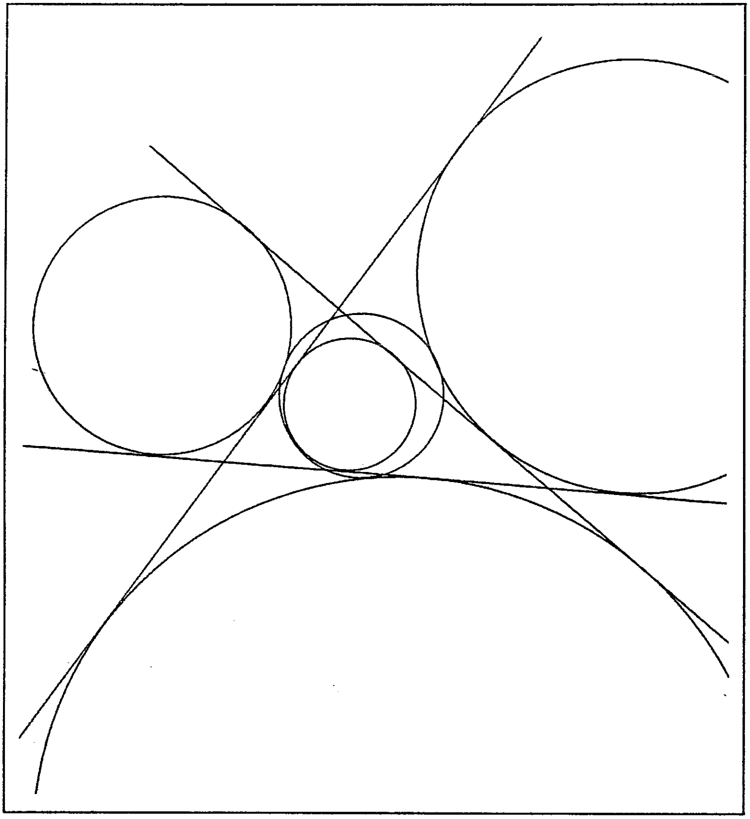
Þorsteinn Sigfússon, Ph. D., prófessor, Háskóla Íslands (eðlisfræðiskor raunvísindadeildar); Austurbrún 17, 104 Reykjavík; hs. 30900, vs. 694690, this@raunvis.hi.is. *1992*

ÚTGÁFURIT FÉLAGSINS

Á liðinni tíð hefur *Íslenzka stærðfræðafélagið* gefið út tvö rit og komu þau reyndar bæði út árið 1985. Þar sem verulegur hluti núverandi félagsmanna hefur bætzt við eftir þann tíma, látum við þessara rita getið hér.

Annars vegar eru það *Tveir fyrirlestrar fluttir í tilefni áttræðisafmælis dr. Leifs Ásgeirssonar prófessors 25. maí 1983*, en þá fyrirlestra fluttu Halldór I. Elíasson og Sigurður Helgason um verk Leifs. Ritið var á sínum tíma sent öllum félagsmönnum án endurgjalds og er þeim, sem síðar hafa gengið í félagið, velkomið að vitja eintaks.

Hins vegar gaf félagið út *Þingtíðindi nítjánda norræna stærðfræðingaþingsins í Reykjavík 1984.* Ritið hefur verið selt til bókaverzlana innan lands sem utan og jafnframt eru afgreiddar pantanir frá einstaklingum og bókasöfnum erlendis. Ritið, sem er 270 bls. alls, er selt félagsmönnum á lágu verði, 600 kr.



Íslenzka stærðfræðafélagið
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

FJÖLRITUNARSTOFA
DANÍELS HALLDÓRSSONAR