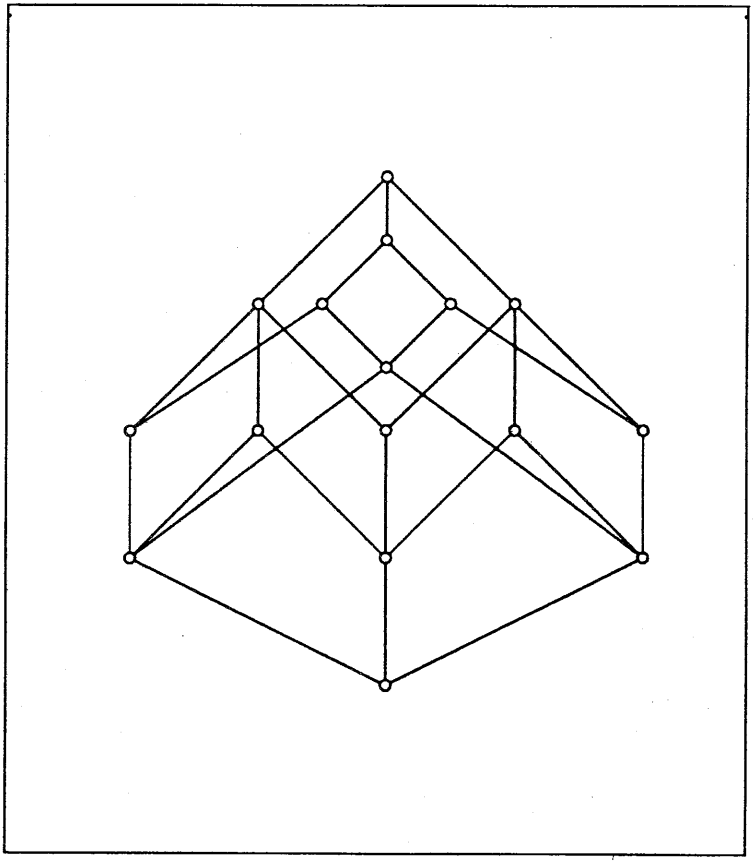
FRÉTTABRÉF

ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGSINS

1. tbl. 6. árg. **Júní 1994**



Fréttabréf Íslenzka stærðfræðafélagsins

Ritstjóri: Jón Ragnar Stefánsson

Stjórn Íslenzka stærðfræðafélagsins:
Hermann Þórisson, *formaður*
Rögnvaldur Möller, *gjaldkeri*
Jón Kr. Arason, *ritari*

Póstfang:
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Efni

Á forsíðu er sýnd *grind,* sem tekin er úr grein eftir J. B. Nation í nýju greinasafni frá málþinginu til heiðurs Bjarna Jónssyni sjötugum (sjá bls. 31). Ungur stúdentinn við Vanderbilt-háskólann var enn lítt að sér í fræðunum, og þegar honum var sagt, að nýi prófessorinn þeirra væri *grindafræðingur,* svaraði hann að bragði: „Fínt, og hvað er grind?“ Þegar honum hafði verið sagt, að *grind væri raðað mengi, þar sem sérhver tvístökungur hefði bæði efra mark og neðra mark,* gerðist hann lærisveinn Bjarna og var löngu síðar meðal þeirra, sem höfðu forgöngu um málþingið á Laugarvatni sumarið 1990.

Af grindinni sjálfri á forsíðu segir svo ekki frekar hér — en lesandinn gæti farið í spor hins leitandi stúdents og krufið eiginleika hennar.

AF EFNI BLAÐSINS

Langt er nú umliðið frá útgáfu síðasta *Fréttabréfs* í febrúarbyrjun í fyrra, en vonandi stuðla félagsmenn að því að skemmri tími líði næst. Margvíslegt efni er hér að finna, sumpart af því tagi sem lesandinn býst við að sjá á síðum blaðsins en annað er kannski óvænt efni.

Hér er birtur í ítarlegri gerð fyrirlestur frá félagsfundi, þar sem *Rögnvaldur Möller* lýsti byrjunaratriðum óhefðbundins örsmæðareiknings.

Hvert er gildi stærðfræðinnar fyrir menninguna? *Christer Kiselman* fjallar um það í grein, sem *Jón Hafsteinn Jónsson* þýddi úr esperanto. Höfundurinn, sem er mörgum félagsmönnun góðkunnur, setur hér fram menningarlega hugvekju um stöðu mála í stærðfræði. Þetta er þriðja þýðing greinarinnar á eitthvert heimsmálanna; áður hefur hún einungis birzt í kínverskri og japanskri þýðingu.

Af föstu efni er svo viðamest hér skýrsla um framhaldsskólakeppnina í stærðfræði, enda er í þetta sinn um að ræða skýrslu tveggja vetra.

Á baksíðu beinist athyglin fyrst að utanverðum snertihringjum þríhyrnings og síðan teiknum við þann snertihring þeirra, sem umlykur þá alla þrjá. Á fyrsta fundi *Íslenzka stærðfræðafélagsins* eftir stofnun þess árið 1947 var það viðfangsefni dr. Ólafs Daníelssonar að ákvarða geisla þessa *ytrihrings* (sjá bls. 48). Samkvæmt niðurstöðu hans, sem hann hafði birt tveimur árum áður í *Matematisk Tidsskrift* (*Lidt elementær Geometri,* 3.-4. hefti 1945, bls. 85–86), gildir um tvo þríhyrninga, að ef þeir hafa sama flatarmál og sama ummál, þá hafa þessir ytrihringar þeirra sama flatarmál.

Kannski má ætla, að geislaregla þessi hafi verið áður óþekkt í evrópskri stærðfræði, en hún var Japönum kunn löngu áður, þótt í annarri mynd væri. Um aldamótin 1800 var þetta viðfangsefni að finna í japönskum hofum — utan á þeim héngu málaðar töflur undir þakskeggi með rúmfræðimyndum — og í handriti frá 19. öld er umræddur geisli ákvarðaður.

Og nú ætti lesandinn að rifja upp baksíðumyndina í síðasta *Fréttabréfi,* því myndefnið er náskylt: *Níupunkta hringurinn,* sem þar var fjallað um og lesandinn á enn til góða að heyra meira um, er sá snertihringur hinna utanverðu snertihringa þríhyrningsins, sem liggur *á milli þeirra* allra.

Jón Ragnar Stefánsson:

KR. GUÐMUNDUR GUÐMUNDSSON
1908 – 1993

Kr. Guðmundur Guðmundsson tryggingastærðfræðingur lézt hinn 29. ágúst sl. hálfníræður að aldri. Hann var einn af stofnendum Íslenzka stærðfræðafélagsins árið 1947 og var dyggur félagsmaður alla tíð. Hann var jarðsunginn frá Fossvogskirkju 7. september og birtust þann dag eftirmæli í *Morgunblaðinu* eftir tvo félagsmenn, Bjarna Þórðarson og Erlend Lárusson, auk þess sem þar var kveðja frá Félagi íslenzkra tryggingastærðfræðinga svo og eftirmæli eftir Gunnar Felixson, Gylfa Þ. Gíslason og Ólaf B. Thors.

Kristján Guðmundur svo sem hann hét fullu nafni fæddist 17. maí 1908 á Indriðastöðum í Skorradal, þar sem hann ólst upp, sonur hjónanna Guðmundar bónda þar Guðmundssonar og konu hans Hólmfríðar Björnsdóttur; móðirin var þaðan úr Skorradal en faðirinn vestan úr Dölum. Það er eftirtektarvert, þótt ekkert verði ályktað hér um það efni, að á skömmu árabili uxu þarna úr grasi í borgfirzkum grannsveitum þrír stærðfræðingar, því Leifur Ásgeirsson, réttum fimm árum eldri, var úr Lundarreykjadal og Bjarni Jónsson, röskum áratug yngri, er úr Svínadal. Lætur nærri, að stærðfræðingar upprunnir annars staðar á landinu á þessu árabili hafi verið ámóta margir.

Guðmundur varð stúdent frá Menntaskólanum í Reykjavík 1931 eftir einungis tveggja vetra nám, en áður hafði hann gengið á Hvítárbakkaskóla og Flensborg. Skólaskýrslur bera með sér, að þrátt fyrir skamma skólagöngu hafi hann verið dúx á stúdentsprófi í stærðfræðideild.

Guðmundur hélt þegar til náms við Hafnarháskóla og lauk þar kandídatsprófi í tryggingastærðfræði og tölfræði árið 1939. Við heimkomuna það ár hófst svo fjölþætt starf hans að íslenzkum tryggingarmálum. Í byrjun starfaði hann bæði hjá Tryggingastofnun ríkisins, en hann var svo tryggingafræðingur hennar í hálfan annan áratug, og hjá Sjóvátryggingarfélagi Íslands hf., en þar störfuðu á þeim tíma fleiri stærðfræðingar en á öðrum vinnustað hérlendis, auk hans þeir tveir tryggingastærðfræðingar, sem áður höfðu lokið prófi í þeirri grein, Brynjólfur Stefánsson og Árni Björnsson, og ennfremur dr. Ólafur Daníelsson, sem þar starfaði svo um árabil eftir að hann lét af embætti við Menntaskólann. Og allir voru þeir Hafnarstúdentar. Svo hermdu heimildir mínar, að stærðfræðilegar vangaveltur hefðu verið ríkjandi í kaffitímum þeirra í Eimskipafélagshúsinu og blöð gengið á milli yfir kaffiborð með teikningum, spurningum og úrlausnarefnum.

Í byrjun seinni heimsstyrjaldar, sem fór saman við heimkomu Guðmundar frá námi, var komið á fót *Stríðstryggingafélagi íslenzkra fiskiskipa* og var hann ráðinn framkvæmdastjóri þess. Nokkrum árum síðar breyttist félagið í *Íslenzka endurtryggingu* og var hann framkvæmdastjóri þess fyrirtækis alla tíð síðan til sjötugs. Þetta var meginstarf Guðmundar og lagði hann traustan grunn að innlendri starfsemi á þessu sviði. Hann hafði jafnframt með traustri ráðgjöf sinni mikilsverð áhrif á almenna vátryggingarstarfsemi hér á landi, en of langt mál yrði hér að rekja í heild víðtæk störf hans að vátryggingarmálum og má vísa til eftirmælanna, sem áður getur. Þess skal einungis getið, að af því hafði ég nána afspurn um langt skeið, hversu ríkan trúnað Guðmundur átti og af hversu miklum heilindum hann veitti ráð sín. Ekki verða heldur rakin hér önnur störf hans að málefnum almannatrygginga og lífeyrissjóða.

Í grein Guðmundar í *Nordisk Matematisk Tidskrift* frá árinu 1960 (*Et determinantproblem fra den íslandske skattelovgivning*) er að finna dæmi um fræðilegan afrakstur af ráðgjöf hans fyrir stjórnvöld, þar sem til álita kom, hvort unnt hefði verið að framfylgja lögum frá 1957 um skatt á stóreignir, þannig að álagning eignarskatts á hluthafa væri með ótvíræðum hætti. Út úr því kom snotur lausn á ákveðuverkefni um skilyrði þess, að tiltekið línulegt jöfnuhneppi hafi ótvíræða lausn.

Samhliða meginstarfi sínu að tryggingarmálum sinnti Guðmundur áratugum saman kennslu í tölfræði fyrir stúdenta í viðskiptafræði við Háskólann, raunar byrjaði hann slíka kennslu þegar við Viðskiptaháskólann og hélt henni áfram fram á áttræðisaldur.

Þegar að því kom í tengslum við hálfrar aldar afmæli Háskóla Íslands árið 1961, að aðstæður sköpuðust til að efla þar starfsemi í raunvísindum, fyrst með rannsóknarstofnun og síðar háskólakennslu, svo óvenjuleg sem sú röð er við uppbyggingu á háskóla en jafnframt eftirbreytniverð, var Guðmundur meðal þeirra, sem leitað var til. Það sem fyrir liggur með formlegum hætti um hlut hans að þeirri uppbyggingu, er annars vegar að hann átti sæti í byggingarnefnd Raunvísindastofnunar Háskólans, sem skipuð var undir árslok 1962 og skilaði af sér fullbúnu húsi 1966; það var ekki sízt að ráði Leifs Ásgeirssonar, að hann tók þetta starf að sér. Hins vegar var það, að í lok áratugarins lagði hann með öðrum á ráð um, hvernig koma ætti upp kennslu við Háskólann í hagnýtingargreinum stærðfræði, rafreiknifræði og aðgerðarannsóknum, svo sem þær greinar voru nefndar þá, og tölfræði og tölulegri greiningu. Við mótun á þessum hugmyndum af hálfu stærðfræðiskorar verkfræði- og raunvísindadeildar varð úr sú námsleið til BS-prófs í stærðfræði, sem þá í upphafi var nefnd reiknifræði.

Sem fyrr segir var Guðmundur Guðmundsson meðal stofnenda Íslenzka stærðfræðafélagsins fyrir hartnær hálfri öld. Gerðabók félagsins ber með sér, að í öndverðu var hann meðal hinna fremstu í fámennum hópi til að sinna starfsemi þess. En einnig þegar tímar liðu og fjölgaði í félaginu, þótti gott að leita halds og trausts hjá svo útsjónarsömum manni. Og enn á efri árum hélt hann áfram tíðum komum á fundi í félaginu og fylgdist með starfi þess. Í Félagi íslenzkra tryggingastærðfræðinga starfaði hann vitaskuld einnig, formaður þess í fyrstu og síðar heiðursfélagi. Jafnframt átti hann um nokkurra ára skeið sæti í stjórn Alþjóðasamtaka tryggingastærðfræðinga.

En Guðmundur lagði Íslenzka stærðfræðafélaginu til fleira en starfskrafta sína og holl ráð. Í bókstaflegri merkingu lagði hann því einnig til nýja félagsmenn, því þrjú barna hans hafa í tímans rás hlotið inngöngu í félagið — og er það vissulega markvert framlag til fræðanna!

Guðmundur var tvíkvæntur. Fyrri konu sína, Ragnheiði Kjartansdóttur blindrakennara frá Hruna, missti hann árið 1949. Til hennar starfs má rekja það, að í kyrrþey vann Guðmundur samtökum blindra fórnfúst starf um áratuga skeið og var þeim ötull liðsmaður. Sonur þeirra Ragnheiðar er Guðmundur eðlisfræðingur, en dóttur misstu þau í bernsku. Eftirlifandi eiginkona Guðmundar er Arndís Bjarnadóttir hjúkrunarkona, og eru börn þeirra fjögur, Ragnheiður Guðrún stærðfræðingur, Ólafur vinnuvélastjóri, Bjarni Ragnar tryggingastærðfræðingur, og yngstur er Hólmgeir rafmagnsverkfræðingur.

Guðmundur Guðmundsson var hlédrægur maður og lét lítt á sér bera í fjölmenni, en eftir því var tekið, sem hann lagði til mála. Þeim er kynntust honum, er hann minnisstæður sakir ljúfmennsku sinnar og þótt ókunnugum gæti á stundum virzt hann brúnaþungur, var stutt í brosið og handtakið var hlýtt.

Rögnvaldur G. Möller:

ÓHEFÐBUNDINN ÖRSMÆÐAREIKNINGUR

Inngangur [1]

Það táknmál, sem nú er notað í örsmæðareikningi, má að stórum hluta rekja til Leibniz, og það mótast af því, hvernig hann hugsaði um örsmæðareikning. Í kennslubókum er okkur sagt, að Leibniz hafi hugsað táknið dx sem „óendanlega litla“ stærð. En hvað er átt við með „óendanlega lítilli“ stærð? Þeirri spurningu tókst hvorki Leibniz sjálfum né sporgöngumönnum hans að svara á viðhlítandi hátt. Leibniz sagði að vísu, hvað hann vildi: Hinar „óendanlega litlu tölur“ áttu að vera einhvers konar ímynduð aukastök, sem bætt væri við venjulegu rauntölurnar og lytu sömu reiknireglum og þær. Finna má í ritum Leibniz og Newtons hugmyndir, sem má túlka sem vísi að skilgreiningu á markgildi, en þær eru mjög óljósar og aðeins notaðar á yfirborðskenndan hátt til að réttlæta niðurstöðurnar.

Margir urðu til að benda á, að niðurstöður þessara frumkvöðla væru ekki byggðar á traustum grunni. Reiknað væri í gríð og erg með hinum „óendanlega smáu stærðum“ og svo væru þær strikaðar út eftir hentugleika, sbr. eftirfarandi tilvitnun (Euler, 1755): *„En óendanlega lítil stærð er ekkert annað en hverfandi stærð og þess vegna sjálf jöfn 0.“* Cauchy lagði markgildishugtakið til grundvallar í ritum sínum um stærðfræðigreiningu, en það vill oft gleymast, að hann notaði „óendanlega litlar stærðir“ til að skilgreina markgildi. Cauchy sagði ekki nákvæmlega, hvað hann ætti við með „óendanlega litlum stærðum“, en ljóst er, að hann hugsaði þær í líkingu við runur, sem stefna á 0.

Sá vandi að réttlæta niðurstöður stærðfræðigreiningar á grundvelli „óendanlega lítilla talna“ var ekki leystur fyrr en þremur öldum eftir að hann kom upp. Um 1960 tókst Abraham Robinson að leysa vandann. Lausn hans byggist á djúpstæðum hugmyndum úr rökfræði.

Í fyrsta hluta þessarar greinar sýnum við, án þess að nota rökfræðilegar niðurstöður, hvernig má skilgreina „óendanlega litlar tölur“, og í

---

[1] Greinin er byggð á fyrirlestri í *Íslenzka stærðfræðafélaginu* 26. nóvember 1992.

öðrum hluta fjöllum við um, hvernig má nota þær í stærðfræðigreiningu. Í þriðja hluta sýnum við með dæmi, hvernig var reiknað með „óendanlegum tölum“ og „óendanlega smáum tölum“ á 18. öld og hvernig réttlæta má þessa reikninga.

Skilgreiningar

Líta má svo á, að lykillinn að lausn vandans felist í hugmyndum Leibniz og Cauchys. Frá Leibniz fáum við lýsingu á því, sem við sækjumst eftir. Við viljum bæta stökum við rauntölurnar $\mathbb{R}$, þannig að sömu reiknireglur gildi eftir sem áður. Frá Cauchy fáum við þá hugmynd að nota runur til að lýsa viðbótarstökunum. Einfaldasta leiðin til að skilgreina reikniaðgerð á runum er að skilgreina hana lið fyrir lið. Þegar rauntölurnar eru búnar til út frá ræðu tölunum með aðferð Cantors, eru einmitt notaðar runur eða öllu heldur jafngildisflokkar af tilteknum runum, það er Cauchy-runum. Það fyrsta, sem kæmi í hugann, væri að skoða mengi allra rauntalnaruna. Fljótlega kemur þó í ljós, að það gengur ekki. Það sem dugar, er að nota svokallaðar *frjálsar ofursíur*, sem við skilgreinum hér á eftir. Grunnhugmyndin er einföld: Við skiptum öllum hlutmengjum í $\mathbb{N}$, mengi náttúrulegu talnanna, í „stór hlutmengi“ og „lítil hlutmengi“. Svo segjum við, að tvær runur séu jafngildar, ef þær eru eins á „stóru hlutmengi“. Skilyrðin í skilgreiningunni hér á eftir eru ekkert annað en upptalning á þeim eiginleikum, sem sjálfsagt er að mengi allra „stóru hlutmengjanna“ í $\mathbb{N}$ hafi.

Skilgreining 1. *Við segjum, að mengi $\mathcal{F}$ af hlutmengjum í $\mathbb{N}$, sé* **frjáls ofursía** *á $\mathbb{N}$, ef eftirfarandi gildir:*

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2) *Ef $A, B \in \mathcal{F}$, þá er $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

(3) *Ef A er hlutmengi í $\mathbb{N}$ og til er $B \in \mathcal{F}$, þannig að $B \subseteq A$, þá er $A \in \mathcal{F}$.*

(4) *Um sérhvert hlutmengi A í $\mathbb{N}$ gildir nákvæmlega annar möguleikanna, $A \in \mathcal{F}$ eða $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$.*

(5) *Ekkert endanlegt hlutmengi í $\mathbb{N}$ er stak í $\mathcal{F}$.*

Við segjum um tiltekinn eiginleika, að hann gildi **næstum alls staðar,** *ef hann gildir á hlutmengi, sem er stak í $\mathcal{F}$.*

Að sjálfsögðu er engin nauðsyn að einskorða skilgreininguna við náttúrulegu tölurnar. Oft er gagnlegt að skoða frjálsar ofursíur á óteljanlegum mengjum. Til að sýna fram á tilvist frjálsrar ofursíu er hjálparsetning Zorns notuð. Frjálsar ofursíur (oft dulbúnar) koma einnig við sögu í hefðbundnum sönnunum á setningu Tihonovs í grannfræði (um að margfeldi þjappaðra grannrúma sé þjappað).

Við látum þá $\mathcal{F}$ vera frjálsa ofursíu á náttúrulegu tölunum og skilgreinum á eftirfarandi hátt jafngildisvensl á mengi allra rauntalnaruna:

Skilgreining 2. *Við segjum, að tvær rauntalnarunur $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ og $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ séu venslaðar, ef $\{i \in \mathbb{N} \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{F}$, það er ef runurnar eru eins næstum alls staðar.* **Óhefðbundnu rauntölurnar** *eru skilgreindar sem jafngildisflokkarnir við þessi vensl og er mengi þeirra táknað með ${}^*\mathbb{R}$. Við látum $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ tákna jafngildisflokk rununnar $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Fyrir sérhvert $a \in \mathbb{R}$ samsömum við a og $\langle a\rangle$, þar sem $\langle a\rangle$ táknar jafngildisflokk rununnar, sem hefur alla liði sína jafna a.*

Reikniaðgerðir á ${}^*\mathbb{R}$ eru skilgreindar lið fyrir lið. Til dæmis setjum við

$$\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} + \langle b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} := \langle a_i + b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}.$$

Einnig má skilgreina röðun á ${}^*\mathbb{R}$, þannig að

$$\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} \leq \langle b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{þá og því aðeins að} \quad \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq b_i\} \in \mathcal{F}. \qquad (*)$$

Lesandinn er nú hvattur til að ganga úr skugga um, að hér fáist skynsamlegar skilgreiningar á reikniaðgerðum og röðun. Í ljós kemur, að eiginleikar (1)–(4) í skilgreiningu 1 á frjálsri ofursíu eru nákvæmlega það, sem þarf til að sanna að skilgreiningarnar séu skynsamlegar og til að sanna að þær reglur, sem gilda um reikniaðgerðir og röðun á rauntölunum $\mathbb{R}$, gildi líka á óhefðbundnu rauntölunum ${}^*\mathbb{R}$.

Sýnum til dæmis, að venslin $(*)$ séu gegnvirk: Ef $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} \leq \langle b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ og $\langle b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} \leq \langle c_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$, þá er $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} \leq \langle c_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$. Setjum

$$U := \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq b_i\},\ V := \{i \in \mathbb{N} \mid b_i \leq c_i\},\ W := \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq c_i\}.$$

Bæði U og V eru stök í $\mathcal{F}$ og því er $U \cap V$ líka stak í $\mathcal{F}$. Þar sem $U \cap V \subseteq W$, þá er $W \in \mathcal{F}$. Þess vegna er $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}} \leq \langle c_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$.

Rökfræðilegar niðurstöður sýna, að almennt gilda sömu reglur í $^*\mathbf{R}$ og í $\mathbf{R}$ um reikniaðgerðir og röðun.

Skilgreining 3. *Setjum* $|\langle a_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}| := \langle |a_i|\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ *fyrir sérhverja rauntalnarunu* $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

Við segjum, að stak $x \in {}^*\mathbf{R}$ *sé* **örsmátt**, *ef* $|x| < \varepsilon$ *fyrir öll* $\varepsilon > 0$ *í* $\mathbf{R}$, *og við ritum þá* $x \approx 0$.

Við segjum um stök $x, y \in {}^*\mathbf{R}$, *að* x *sé* **ofurnálægt** y, *ef* $|x - y| \approx 0$, *og við ritum þá* $x \approx y$.

Dæmi um örsmátt stak er $\left\langle \frac{1}{i} \right\rangle_{i\in\mathbf{N}}$. Það sést á því að, ef $\varepsilon > 0$ er venjuleg rauntala, þá er $\frac{1}{i} < \varepsilon$ fyrir öll i nema endanlega mörg og því er $\left\langle \frac{1}{i} \right\rangle_{i\in\mathbf{N}} < \varepsilon$. Hér má sjá tilganginn með skilyrði (5) í skilgreiningu 1: Það tryggir að $^*\mathbf{R}$ er ekki eins og $\mathbf{R}$.

Auk örsmárra staka má einnig finna í $^*\mathbf{R}$ *ofurstór* stök, en það eru stök, sem eru stærri en hvaða gefin rauntala sem er. Dæmi um slíkt stak er $\langle i \rangle_{i\in\mathbf{N}}$. Athugið, að ef x er ofurstórt stak í $^*\mathbf{R}$, þá er $\frac{1}{x}$ örsmátt stak. Ef $x \in {}^*\mathbf{R}$ og til er $\omega \in \mathbf{R}$, þannig að $|x| \leq \omega$, þá segjum við að x sé *endanlegt*. Óhefðbundnu rauntölurnar eru því annað hvort endanlegar eða ofurstórar.

Setning 4. *Sérhvert endanlegt stak* $x \in {}^*\mathbf{R}$ *má skrifa á nákvæmlega einn hátt sem summu* $a + \varepsilon$, *þar sem* a *er rauntala og* ε *er örsmá tala. Talan* a *er táknuð með* $\mathrm{st}(x)$.

Sönnun. Setjum $a := \sup\{b \in \mathbf{R} \mid b < x\} \in \mathbf{R}$. Gerum ráð fyrir, að stakið $x - a$ sé ekki örsmátt. Þá er til rauntala r, þannig að $0 < r < |x - a|$. Ef $x - a > 0$, þá er $a + r < x$, en það stenst ekki, og ef $x - a < 0$, þá er $x < a - r < a$, sem stenst ekki heldur. Þá er $\varepsilon := x - a$ örsmátt.

Gerum svo ráð fyrir, að $a_1 + \varepsilon_1 = x = a_2 + \varepsilon_2$, þar sem a_i er rauntala og ε_i er örsmátt, $i = 1, 2$. Þá er $a_1 - a_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, þar sem á hægri hönd er örsmátt stak og á vinstri hönd er rauntala, sem þar með er 0. Tölurnar a og ε í setningunni eru því ákvarðaðar ótvírætt. ∎

Af setningu 4 fáum við sér í lagi, að ef rauntalnarunan $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ stefnir á rauntölu a, þá er $\mathrm{st}(\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}) = a$. Örsmá stök eru því lík runum, sem stefna á 0, og er það í samræmi við hugmyndir Cauchys.

Það eru ekki reikniaðgerðirnar einar sér, sem gera rauntölurnar að því sem þær eru. Á röðuninni byggist *frumsendan um efra mark*, sem gegnir stóru hlutverki í stærðfræðigreiningu. Slík frumsenda gildir ekki í $^*\mathbf{R}$. Dæmi um hlutmengi í $^*\mathbf{R}$, sem er takmarkað að ofan en hefur ekki efra mark, er mengið $\{x \in {}^*\mathbf{R} \mid x \approx 0\}$. Það sem gert er til að komast hjá þessum vandkvæðum, er að skoða bara ákveðinn hóp hlutmengja.

Skilgreining 5. *Látum $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ vera runu af hlutmengjum í* $\mathbf{R}$. *Setjum*

$$\langle A_i\rangle_{i\in\mathbf{N}} := \{\langle a_i\rangle_{i\in\mathbf{N}} \mid a_i \in A_i \text{ fyrir næstum öll } i\}.$$

Hlutmengi A í $^*\mathbf{R}$ kallast **innra mengi,** *ef til er runa $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ af hlutmengjum í $\mathbf{R}$, þannig að $A = \langle A_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$.*

Við köllum $f\colon {}^*\mathbf{R} \to {}^*\mathbf{R}$ **innra fall**, *ef til eru föll $f_i\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i \in \mathbf{N}$, þannig að $f(\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}) = \langle f_i(x_i)\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ fyrir sérhverja rauntalnarunu $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Oft er þá ritað $f := \langle f_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$.*

Í óhefðbundinni stærðfræðigreiningu er einkum fengist við innri mengi og innri föll. Niðurstöður um mengi í $\mathbf{R}$ og föll á $\mathbf{R}$ gilda almennt fyrir innri mengi og innri föll. Til dæmis gildir frumsendan um efra mark um innri mengi í $^*\mathbf{R}$. Til að sjá það látum við $A := \langle A_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ vera innra mengi í $^*\mathbf{R}$, sem er takmarkað að ofan. Þetta þýðir, að næstum öll mengjanna A_i eru takmörkuð að ofan og við getum gert ráð fyrir, að þau séu öll takmörkuð að ofan. Setjum nú $a_i := \sup A_i$. Þá er ljóst, að $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ er efra mark A í $^*\mathbf{R}$.

Skilgreining 6. *Látum $A \subseteq \mathbf{R}$. Skilgreinum mengið $^*A := \langle A\rangle_{i\in\mathbf{N}}$. Látum $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vera fall. Skilgreinum fallið $^*f\colon {}^*\mathbf{R} \to {}^*\mathbf{R}$, þannig að $^*f(\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}) := \langle f(x_i)\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ fyrir sérhverja rauntalnarunu $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$.*

Svipmyndir úr óhefðbundnum örsmæðareikningi

Að loknum þessum frumskilgreiningum er fyrsta verkefni okkar að þýða hefðbundnar skilgreiningar, sem fela í sér samfelldni eða samleitni, yfir á mál, sem hefur örsmæðir í sínum orðaforða.

Setning 7. *Fall $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er samfellt í punkti a þá og því aðeins að um sérhvert $x \in {}^*\mathbf{R}$ með $x \approx a$ gildi, að $^*f(x) \approx f(a)$.*

Sönnun. Gerum ráð fyrir, að f sé samfellt í a. Látum $x := \langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}}$ vera tölu í $^*\mathbf{R}$, sem er ofurnálægt a. Við viljum sýna, að $|f(a) - {}^*f(x)| < \varepsilon$ fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ í $\mathbf{R}$. Finnum $\delta > 0$, þannig að ef $y \in \mathbf{R}$ og $|a - y| < \delta$, þá er $|f(a) - f(y)| < \varepsilon$. Þar sem $x \approx a$, þá gildir um næstum öll i að $|a - x_i| < \delta$, og því gildir að $|f(a) - f(x_i)| < \varepsilon$ fyrir næstum öll i, svo að $|f(a) - {}^*f(x)| < \varepsilon$. Þá er fengið, að $^*f(x) \approx f(a)$.

Gerum nú ráð fyrir, að um sérhvert $x \in {}^*\mathbf{R}$ með $x \approx a$ gildi, að $^*f(x) \approx f(a)$. Athugum hvað gerist, ef f er ósamfellt í a. Þá er til runa $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$, sem stefnir á a, og rauntala $\varepsilon > 0$, þannig að $|f(a) - f(x_i)| > \varepsilon$ fyrir öll i. Setjum $x := \langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}}$. Nú er $x \approx a$ en $^*f(x) \not\approx f(a)$. Við höfum þá fengið mótsögn og þess vegna er fallið f samfellt í a. ∎

Setning 8. *Fall $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er diffranlegt í punkti a þá og því aðeins að til sé rauntala b, þannig að um sérhvert $x \in {}^*\mathbf{R}$ með $x \approx a$ gildi, að*

$$\frac{f(a) - {}^*f(x)}{a - x} \approx b.$$

Um b gildir þá, að $f'(a) = b$.

Sönnun á þessari setningu er keimlík sönnuninni á setningu 7 hér að framan og er hún eftirlátin lesandanum. Nú má sanna hinar hefðbundnu reglur um diffrun. Örsmæðirnar veita okkur meira frelsi í reikningum eins og sjá má á eftirfarandi sönnun á *keðjureglunni*.

Setning 9. *Gerum ráð fyrir, að fallið $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sé diffranlegt í punkti a og að fallið $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sé diffranlegt í punktinum $g(a)$. Þá er samskeytingin $f \circ g$ diffranleg í a og $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.*

Sönnun. Látum $x \in {}^*\mathbf{R}$ vera ofurnálægt a. Við viljum sýna, að

$$\frac{f(g(a)) - {}^*f({}^*g(x))}{a - x} \approx f'(g(a))g'(a).$$

Ef $^*g(x) = g(a)$, er greinilegt að báðar hliðar í jöfnunni eru 0. Gerum því ráð fyrir, að $^*g(x) \neq g(a)$. Þá er

$$\begin{aligned}\frac{f(g(a)) - {}^*f({}^*g(x))}{a - x} &= \frac{f(g(a)) - {}^*f({}^*g(x))}{g(a) - {}^*g(x)} \cdot \frac{g(a) - {}^*g(x)}{a - x} \\ &\approx f'(g(a))g'(a). \ ∎\end{aligned}$$

Skilgreining 10. *Innra mengi A í ${}^*\mathbb{R}$ kallast* **háendanlegt**, *ef til er runa $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ af endanlegum hlutmengjum í $\mathbb{R}$, þannig að $A = \langle A_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$.*

Háendanleg mengi gegna lykilhlutverki í mörgum hagnýtingum á óhefðbundnum örsmæðareikningi. Hér á eftir eru nokkur dæmi, sem gefa til kynna, hvernig má nota þau.

Sýnidæmi 11. Látum $N: = \langle n_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ vera stak í ${}^*\mathbb{N}$. Mengin

$$A: = \{1,2,\ldots,N-1,N\} \quad \text{og} \quad B: = \left\{0,\frac{1}{N},\frac{2}{N},\ldots,\frac{N-1}{N},1\right\}$$

eru bæði háendanleg. Setjum

$$A_i: = \{1,2,\ldots,n_i-1,n_i\} \quad \text{og} \quad B_i: = \left\{0,\frac{1}{n_i},\frac{2}{n_i},\ldots,\frac{n_i-1}{n_i},1\right\}.$$

Þá sést, að $A = \langle A_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ og $B = \langle B_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$.

Sýnidæmi 12. Sérhvert háendanlegt mengi hefur stærsta stak. Ef A er háendanlegt og $A = \langle A_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$, þar sem öll mengin A_i eru endanleg, þá er $\langle \max A_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ greinilega stærsta stakið í A.

Sýnidæmi 13. Hægt er að skilgreina summu innra falls yfir háendanlegt mengi. Látum $A: = \langle A_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ vera háendanlegt mengi, þar sem öll mengin A_i eru endanleg, og látum $f: = \langle f_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ vera innra fall. Skilgreinum

$$\sum_{a\in A} f(a): = \left\langle \sum_{a_i\in A_i} f_i(a_i)\right\rangle_{i\in\mathbb{N}}.$$

Ef $N \in {}^*\mathbb{N}$ og $A = \{1,2,\ldots,N\}$, þá er oft ritað $\sum_{i=1}^{N} f(i) = \sum_{a\in A} f(a)$.
Á sama hátt má skilgreina margfeldi.

Setning 14. *Samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili tekur stærsta gildi á bilinu.*

Sönnun. Látum f vera samfellt raunfall á $[a,b]$. Látum N vera ofurstóra náttúrulega tölu (þ.e. ofurstórt stak í ${}^*\mathbb{N}$). Skiptum bilinu ${}^*[a,b]$ í N jafna búta. Skiptipunktarnir eru þá

$$a, a+\frac{1}{N}(b-a), a+\frac{2}{N}(b-a),\ldots, a+\frac{N-1}{N}(b-a), b$$

og mynda þeir háendanlegt mengi, sem við köllum A. Fallið $^*f$ tekur þá stærsta gildi á A, segjum í punktinum $a + \frac{k}{N}(b-a)$. Setjum $c := \mathrm{st}\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)$. Ljóst er af setningu 7, að $f(c)$ er stærsta gildið, sem f tekur á bilinu $[a,b]$. ∎

Í þessari grein skoðum við óhefðbundnu rauntölurnar utan frá og þýðum eiginleika þeirra yfir á hefðbundið stærðfræðilegt tungutak. Með þessari aðferð verður notkun háendanlegra mengja flókin og þunglamaleg. Ef við reynum aftur á móti að lifa okkur inn í hinn óhefðbundna heim, uppgötvum við, að í honum eru háendanleg mengi í engu frábrugðin endanlegum mengjum og má meðhöndla þau á sama hátt.

Einnig má nota örsmæðir við heildun. Venjulegt er að skilgreina Riemann-heildi með því að nálgast með þrepaföllum fallið, sem á að heilda, en einfalt er að skilgreina heildi þrepafalla. Til að finna heildið er svo bilinu, sem heildað er yfir, skipt í fleiri og fleiri búta. Háendanleg mengi gera okkur kleift að vera ekki með neitt hálfkák í þessum málum: Við skiptum bilinu einfaldlega í háendanlega marga búta og nálgumst fallið með þrepaföllum. Þessu er lýst með eftirfarandi setningu, sem verður ekki sönnuð hér.

Setning 15. *Látum $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall. Um sérhverja ofurstóra náttúrulega tölu N gildir, að*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{st}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N}\,{}^*f\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)\right).$$

Regla Eulers

Hinar stórstígu framfarir í stærðfræðigreiningu á 18. öld voru að nokkru að þakka því frjálsræði, sem menn leyfðu sér í meðferð örsmæða. Að vísu fengust stundum rangar niðurstöður og sannanir voru oft í meira lagi hæpnar. Oft má samt nota gömlu hugmyndirnar sem grunn að sönnun, sem notast við óhefðbundinn örsmæðareikning. Hér á eftir fer dæmi um slíkt. Nú á dögum er þessi regla oftast sönnuð með aðferðum tvinnfallagreiningar.

Setning 16. Regla Eulers. *Látum z vera tvinntölu, þannig að $z \neq k\pi$ fyrir öll $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Þá er*

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Við notum, að $i \sin z = \sinh iz$ og að $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Einnig er $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Látum n vera ofurstóra óhefðbundna náttúrulega oddatölu. Þá er

$$2 \sinh x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

Á hægri hlið er n-ta stigs margliða, þar sem n er að vísu ofurstórt, en við getum reiknað með slíkum margliðum eins og venjulegum margliðum. Sér í lagi getum við þáttað. Setjum $a\colon = 1 + \frac{x}{n}$ og $b\colon = 1 - \frac{x}{n}$. Látum $1, \varepsilon_1 \dots, \varepsilon_{n-1}$ tákna n-tu einingarræturnar. Þá er

$$a^n - b^n = (a - b)(a - \varepsilon_1 b) \dots (a - \varepsilon_{n-1} b).$$

Einnig má hugsa þessa reikninga út frá reikningum með jafngildisflokka runa. Lykilatriðið er, að $(\langle x_i \rangle_{i\in\mathbb{N}})^{\langle n_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}} : = \langle x_i^{n_i} \rangle_{i\in\mathbb{N}}$. Út frá því má finna runur fyrir einingarræturnar.

Þar sem

$$a^2 + b^2 = 2 + 2\frac{x^2}{n^2} \quad \text{og} \quad 2ab = 2 - 2\frac{x^2}{n^2},$$

fæst við margföldun á svigum með samoka einingarrótum, að

$$\begin{aligned}
\left(a - b \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right)\right) &\left(a - b \exp\left(-\frac{2k\pi}{n} i\right)\right) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= 2\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) + 2\left(1 + \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\frac{x^2}{n^2} \\
&= 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(1 + \frac{x^2}{n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Þar með er auðfengið, að

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\prod_{k=1}^{(n-1)/2} 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right) \\ &= 2^n\frac{x}{n}\prod_{k=1}^{(n-1)/2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right). \end{aligned}$$

Samkvæmt þessu er

$$2\frac{\sinh x}{x} \approx \frac{2^n}{n}\prod_{k=1}^{(n-1)/2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).$$

Látum x stefna á 0 og fáum þá, að

$$2 \approx \frac{2^n}{n}\prod_{k=1}^{(n-1)/2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

svo að

$$2\sinh x \approx 2x\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).$$

Nú áleit Euler það augljóst, að

$$\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right) \approx \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Smá maus þarf til að gera þetta almennilega, en að því loknu fæst

$$\sinh x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Lokaniðurstaðan fæst svo með því að setja iz í stað x.

Lokaorð

Þessi samantekt er að verulegu leyti byggð á grein um óhefðbundinn örsmæðareikning eftir Tom Lindstrøm [1]. Er óhikað hægt að mæla með henni og því safnriti, sem hún birtist í. Framsetning er skýr og ekki er gert ráð fyrir, að lesandinn hafi bakgrunn í rökfræði.

Grundvallarritið um óhefðbundinn örsmæðareikning er bók Abrahams Robinsons [2]. Þar er meira byggt á rökfræði en í grein Lindstrøms. Aðrar bækur, sem vert er að nefna, eru eftir Stroyan og Luxemburg [3] og Keisler [4]. Keisler hefur einnig ritað kennslubók í stærðfræðigreiningu [5] fyrir stúdenta á fyrsta námsári í háskóla og byggist hún á að óhefðbundnar hugmyndir séu notaðar í bland við hefðbundnar. Fyrrnefnd bók Keislers [4] er hugsuð þeim kennurum til hliðsjónar, sem nota þessa kennslubók hans.

Af öðrum toga er grein eftir Nelson um innri mengjafræði [6]. Þar er sett fram frumsendukerfi fyrir mengjafræði, sem inniheldur frumsendur fyrir rökfræðileg tengsl hefðbundinna og óhefðbundinna stærðfræðikerfa.

Heimildir

1. Tom Lindstrøm, *An invitation to nonstandard analysis*, birt í N. Cutland (ritstj.), *Nonstandard analysis and its applications* (LMS Student Text 10), Cambridge University Press, 1988, bls. 1–105.
2. Abraham Robinson, *Non-standard analysis*, North-Holland, 1966.
3. K. D. Stroyan og W. A. J. Luxemburg, *Introduction to the theory of infinitesimals*, Academic Press, 1976.
4. H. J. Keisler, *Foundations of infinitesimal calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, 1977.
5. ———, *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, 1976.
6. Edward Nelson, *Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis*, Bulletin of the American Mathematical Society **83** (1977), 1165-1198.

STÆRÐFRÆÐIVERÐLAUN Á STÚDENTSPRÓFI

Frá því að síðasta *Fréttabréf* kom út hafa tveir stúdentaárgangar verið brautskráðir. Að venju veitti *Íslenzka stærðfræðafélagið* nokkrum nýstúdentum sérstaka viðurkenningu fyrir ágætan námsárangur í stærðfræði á stúdentsprófi og var þeim öllum afhent bók að gjöf með áritaðri staðfestingu á verðlaununum.

Eins og skýrt var frá í *Fréttabréfi* í júlí 1992 hlaut félagið þá fjárstyrk frá þremur verkfræðistofum til að kaupa verðlaunabækur og var hann svo ríflegur, að hann entist til verðlaunaveitinga í tvö ár. Fjárstyrkur þessi var félaginu mikilsverður, en fyrirtækin, sem veittu styrkinn, eru

Almenna verkfræðistofan hf.,
Verkfræðistofan Fjarhitun hf. og
Verkfræðistofan Hnit hf.

Þessir nýstúdentar hlutu viðurkenningu frá félaginu vorið 1993:

Bjarni V. Halldórsson, Menntaskólanum í Reykjavík,
Einar Örn Hreinsson, Menntaskólanum á Laugarvatni,
Guðrún Nína Petersen, Menntaskólanum við Hamrahlíð,
Sigurður Freyr Marinósson, Menntaskólanum í Reykjavík,
Sjöfn Gunnarsdóttir, Menntaskólanum við Hamrahlíð,
Stefán Jónsson, Menntaskólanum á Akureyri.

Við brautskráningu nú á miðjum vetri hlaut einn nýstúdent bókaverðlaun frá félaginu og var það

Friðrik Guðjón Guðnason, Menntaskólanum við Hamrahlíð.

Þeir nýstúdentar, sem hlutu verðlaun við brautskráningu í vor, eru:

Albert Pétur Einarsson, Fjölbrautaskóla Vesturlands,
Björgvin Skúli Sigurðsson, Verzlunarskóla Íslands,
Halldór Ísak Gylfason, Menntaskólanum við Hamrahlíð,
Jóhann Sigurðsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð,
Júlíus Atlason, Menntaskólanum við Hamrahlíð,
Magnús Arason, Menntaskólanum á Akureyri,
Ómar Olgeirsson, Menntaskólanum á Laugarvatni,
Styrmir Sigurjónsson, Menntaskólanum í Reykjavík,
Þórólfur Jónsson, Verzlunarskóla Íslands.

Sverrir Örn Þorvaldsson:

FRAMHALDSSKÓLAKEPPNIN OG ÓLYMPÍULEIKARNIR Í STÆRÐFRÆÐI 1993

Lokakeppnin 6. mars 1993

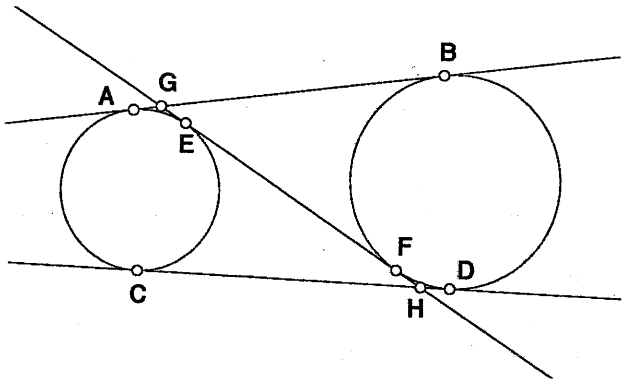
Að venju var *stærðfræðikeppni framhaldsskólanema* veturinn 1992–93 í tveimur hlutum. Svo sem skýrt var frá í síðasta *Fréttabréfi* fór fyrri hlutinn fram 20. október 1992 og voru 411 þátttakendur úr 22 framhaldsskólum. Til seinni hlutans var boðið efstu mönnum af hvoru stigi í fyrri hluta keppninnar, efra stigi og neðra stigi. Af þeim mættu 36 til leiks í Odda að morgni 6. mars og glímdu við verkefni lokakeppninnar. Daginn eftir afhenti Ágúst Valfells, stjórnarformaður Steypustöðvarinnar hf., þremur efstu keppendum peningaverðlaun, en í efstu tíu sætum urðu:

1.	Bjarni V. Halldórsson	Menntaskólanum í Reykjavík
2.	Daníel F. Guðbjartsson	Fjölbrautaskóla Suðurnesja
3.	Stefán Jónsson	Menntaskólanum á Akureyri
4.	Guðjón I. Guðjónsson	Menntaskólanum við Sund
5.	Sigurður Freyr Marinósson	Menntaskólanum í Reykjavík
6.	Ari Eiríksson	Menntaskólanum á Akureyri
7.	Bergþór I. Björgvinsson	Menntaskólanum á Laugarvatni
8.	Alfreð Hauksson	Menntaskólanum í Reykjavík
9.–10.	Davíð Þór Bragason	Menntaskólanum á Akureyri
9.–10.	Eggert Jón Magnússon	Fjölbrautaskóla Suðurlands

Framkvæmdanefnd keppninnar skipuðu að þessu sinni Jón Kr. Arason, Rögnvaldur Möller og Sverrir Örn Þorvaldsson frá Íslenzka stærðfræðafélaginu og Bjarni Gunnarsson, Eygló Guðmundsdóttir og Kristín Bjarnadóttir frá Félagi raungreinakennara. Eins og mörg undanfarin ár báru Ístak hf. og Steypustöðin hf. allan kostnað af keppninni og verðlaunaveitingum.

Hér á eftir fara dæmin í lokakeppninni, en veittar voru fjórar klukkustundir til að leysa þau.

1. dæmi. Myndin sýnir tvo hringa í planinu og þrjá sameiginlega snertla þeirra. Punktarnir G og H eru skurðpunktar, en punktarnir A, B, C, D, E og F eru snertipunktar.



Sýnið, að strikin GE og FH séu jafnlöng.

2. dæmi. Gefnar eru sex fullyrðingar:

(a) Allar fullyrðingarnar hér að neðan eru sannar.
(b) Engin fullyrðinganna hér að neðan er sönn.
(c) Báðar fullyrðingarnar hér að ofan eru sannar.
(d) Ein fullyrðinganna hér að ofan er sönn.
(e) Engin fullyrðinganna hér að ofan er sönn.
(f) Engin fullyrðinganna hér að ofan er sönn.

Hverjar fullyrðinganna eru sannar?

3. dæmi. Sýnið að 2^n gengur upp í $(n+1)(n+2)\cdots(2n)$ fyrir allar náttúrulegar tölur n.

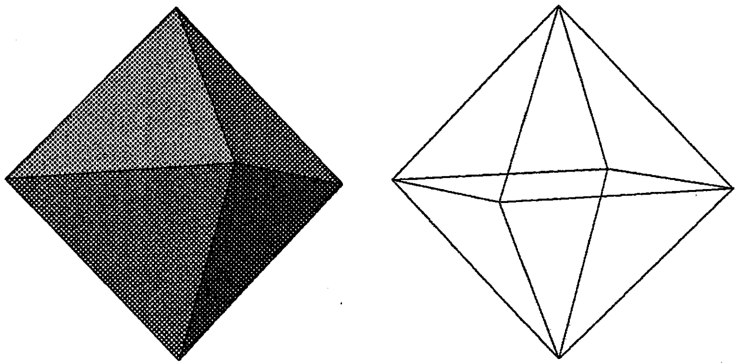
4. dæmi. Tiltekið leyndarmál felst í n ólíkum staðreyndum. Í hópi n manna veit hver sinn hluta af leyndarmálinu. Mennirnir skrifast á og í hverju bréfi upplýsir sendandi allt sem hann veit þá um leyndarmálið.

Hver er minnsti fjöldi bréfa, sem senda þarf, þar til allir í hópnum þekkja alla hluta leyndarmálsins?

5. dæmi. Gefnar eru rauntölur $x, y, z > 0$ þannig að $x + y + z = 1$. Sýnið að

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

6. dæmi. Fjarlægð milli mótlægra hliða í reglulegum áttflötungi er d. Hver er lengd kantanna? (Reglulegur áttflötungur hefur sex horn, átta hliðar og tólf kanta. Hliðarnar eru jafnstórir jafnhliða þríhyrningar. Myndirnar sýna reglulegan áttflötung, á annarri myndinni er hann gegnsær en á hinni ekki.)



Norræna keppnin 16. mars 1993

Tíu efstu keppendum í lokakeppninni var boðin þátttaka í *sjöundu norrænu stærðfræðikeppninni*, sem var haldin í skóla hvers þeirra þann 16. mars. Það voru Norðmenn, sem önnuðust norrænu keppnina í þetta sinn. Alls tóku 65 unglingar þátt í henni frá Íslandi, Noregi, Danmörku, Svíþjóð og Finnlandi, og er skemmst frá því að segja að Bjarni V. Halldórsson vann keppnina með nokkrum yfirburðum. Hann hlaut 15 stig af 20 mögulegum, en næstur var Oskar Malm frá Svíþjóð með 12 stig. Við höfum reyndar áður átt Norðurlandameistara í stærðfræði, því Geir Agnarsson náði þeim árangri í fyrstu norrænu keppninni vorið 1987. Næstir Íslendinganna voru Sigurður Freyr Marinósson í 12.-20. sæti með 8 stig og Daníel F. Guðbjartsson og Stefán Jónsson í 21.-25. sæti með 7 stig.

Fjögur verkefni voru lögð fyrir nemendurna, og voru þeim ætlaðar fjórar klukkustundir til að leysa þau. Við hvetjum alla lesendur *Fréttabréfs* til að spreyta sig á þeim og sjá, hvort þeir geta leyst þrjú þeirra á fjórum klukkustundum eins og Bjarni gerði!

1. dæmi. Látum F vera raungilt vaxandi fall, sem er skilgreint fyrir allar rauntölur x þannig að $0 \leq x \leq 1$, og uppfyllir skilyrðin

$$F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}F(x) \quad \text{og} \quad F(1-x) = 1 - F(x).$$

Finnið fallgildin

$$F\left(\frac{173}{1993}\right) \quad \text{og} \quad F\left(\frac{1}{13}\right).$$

2. dæmi. Sexhyrningur er innritaður í hring með radíus r. Tvær hliðar hans hafa lengd 1, tvær hafa lengd 2 og tvær hafa lengd 3. Sannið, að r sé lausn á jöfnunni

$$2r^3 - 7r - 3 = 0.$$

3. dæmi. Finnið allar lausnir á jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} s(x)+s(y) &= x \\ x + y+s(z) &= z \\ s(x) + s(y)+s(z) &= y - 4 \end{aligned}$$

þar sem x, y og z eru náttúrulegar tölur og $s(x)$, $s(y)$ og $s(z)$ tákna *fjölda tölustafa* heilu talnanna x, y og z, þegar þær eru ritaðar í tugakerfi.

4. dæmi. Látum $T(n)$ tákna *þversummu* náttúrulegu tölunnar n, þ.e. $T(n)$ er summa tölustafa tölunnar n, þegar hún er rituð í tugakerfi.

(a) Finnið náttúrulega tölu N, þannig að fyrir allar heilar tölur k með $1 \leq k \leq 1992$ sé $T(k \cdot N)$ slétt tala, en $T(1993 \cdot N)$ sé oddatala.

(b) Sýnið, að ekki sé til náttúruleg tala N, þannig að fyrir allar heilar tölur k sé $T(k \cdot N)$ slétt tala.

Ólympíuleikarnir 18.–19. júlí 1993

Að loknu vetrarstarfinu hófst að fullu undirbúningur okkar fyrir *34. Ólympíuleikana í stærðfræði*, sem fóru fram í Miklagarði í Tyrklandi dagana 13.–23. júlí. Í lið Íslands voru valdir Alfreð Hauksson, Bergþór I. Björgvinsson, Bjarni V. Halldórsson og Daníel F. Guðbjartsson. Við val liðsins var tekið tillit til árangurs bæði í lokakeppninni og norrænu keppninni, en einnig varð að hafa aldursskilyrði Ólympíuleikanna í huga. Fulltrúi okkar í dómnefnd var Jón Kr. Arason, en Sverrir Örn Þorvaldsson var fararstjóri. Keppnin að þessu sinni reyndist ein sú þyngsta í langan tíma, en bestum árangri Íslendinganna náði Bjarni, hann hlaut 9 stig, en 11 stig þurfti til að hljóta bronsverðlaun. Daníel hlaut 7 stig, en í heild var árangur liðsins svipaður og oft áður. Okkar árangur var viðunandi í samanburði við hinar Norðurlandaþjóðirnar, en af þeim stóðu Danir sig best, sex manna sveit þeirra hlaut samtals 72 stig. Bestum árangri keppenda frá Norðurlöndum náði hinn sænski Oskar Malm, sá hinn sami og var í öðru sæti í norrænu keppninni; hann hlaut 21 stig.

Lið Kínverja náði bestum árangri í óformlegri landakeppni, það hlaut samtals 215 stig af 252 mögulegum. Næstir komu Þjóðverjar, þá Búlgarar, Rússar, Tævanar, Íranar og Bandaríkjamenn. Rúmlega sjötíu sveitir tóku þátt í leikunum, þar af þrettán frá löndum, sem áður tilheyrðu Sovétríkjunum. Þátttakendum hefur fjölgað mjög á undanförnum árum, þeir hafa nær tvöfaldast á sex árum, og telur greinarhöfundur nánast útilokað, að við getum staðið við þá óformlegu kvöð að halda keppnina sjálf einhvern tímann. Það er heldur ekkert áhyggjuefni í náinni framtíð, því enginn skortur er á gestgjöfum í bili, dagskrá keppninnar er nokkuð ljós fram til ársins 2003. Næstu Ólympíuleikar verða haldnir í Hong Kong, þá í Kanada, Indlandi, Argentínu og Tævan. Þessi upptalning sýnir, að við þurfum á öllum kröftum okkar að halda, ef takast á að fjármagna ferðir til þessara fjarlægu staða.

Dagana 18. og 19. júlí glímdu keppendur við verkefnin sex, þrjú dæmi hvorn dag í fjóra og hálfa klukkustund í senn. Dæmin fylgja hér á eftir og eru lesendur *Fréttabréfs* hvattir til að spreyta sig á þeim. Þriðja dæmið reyndist þyngst, en það er einnig áhugaverðast að mati greinarhöfundar. Þar má kannski einnig spyrja almennar, hver sé minnsti fjöldi steina í lokastöðu, ef byrjað er með $m \times n$ reita borð þakið steinum. Í 2. dæmi má kannski benda á, að unnt er að leysa (b)-lið óháð (a)-lið, og að ekki þarf að nota allar forsendur dæmisins til þess.

Að þessu sinni birtum við ekki lausnir á Ólympíudæmunum, en bendum á, að þær má finna í *Normat (Nordisk Matematisk Tidskrift)*, **41** (1993), bls. 180–184.

1. dæmi. Setjum

$$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3,$$

þar sem $n > 1$ er heil tala. Sýnið, að ekki er hægt að skrifa $f(x)$ sem margfeldi tveggja margliða, þannig að hvor þeirra hafi aðeins heilar tölur sem stuðla og hafi stig að minnsta kosti 1.

2. dæmi. Látum D vera punkt innan hvasshyrnda þríhyrningsins $\triangle ABC$, þannig að

$$\angle ADB = \angle ACB + 90° \quad \text{og} \quad AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

(a) Reiknið hlutfallið $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

(b) Sýnið, að snertlar umritaðra hringa þríhyrninganna $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$ í punktinum C séu þverstæðir.

3. dæmi. Tafl er leikið á óendanlegu skákborði á eftirfarandi hátt: Í byrjun er n^2 steinum raðað á skákborðið í $n \times n$ ferning af samliggjandi reitum, þannig að á hverjum þessara reita sé einn steinn. Hver leikur í taflinu er í því fólginn, að einn steinn stekkur yfir samliggjandi upptekinn reit yfir á lausan reit þar við hliðina. Steinninn, sem stokkið var yfir, er svo tekinn í burtu.

Finnið þau gildi á n, sem eru þannig að taflið geti endað með því, að aðeins einn steinn sé eftir á borðinu.

4. dæmi. Fyrir þrjá punkta P, Q og R í planinu er $m(PQR)$ skilgreint sem minnsta hæðin í þríhyrningnum $\triangle PQR$ (svo að $m(PQR) = 0$ ef P, Q og R liggja á sömu línu).

Látum A, B og C vera gefna punkta í planinu. Sýnið, að um sérhvern punkt X í planinu gildir:

$$m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

5. dæmi. Látum $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$. Ákvarðið, hvort til er fall $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ þannig að

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f(f(n)) &= f(n)+n \quad \text{fyrir öll } n\in\mathbb{N} \text{ og} \\ f(n) &< f(n+1) \quad \text{fyrir öll } n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

6. dæmi. Látum $n > 1$ vera heila tölu. Við röðum n lömpum $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ í hring og höldum tölusetningunni á þeim einnig áfram, þannig að hún sé mátuð við n, svo að $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, og svo framvegis.

Við beitum síðan runu af aðgerðum $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ á lampana. Aðgerð S_j hefur áhrif á lampa L_j, ef þá logar á lampa L_{j-1}, en annars ekki, og áhrifin eru þau, að ef logar á lampa L_j, þá slekkur aðgerð S_j á honum, og ef ekki logar á lampa L_j, þá kveikir aðgerð S_j á honum. Aðgerð S_j hefur svo engin áhrif á hina lampana.

Í byrjun logar á öllum lömpunum. Sýnið:

(a) Til er náttúruleg tala $M(n)$, þannig að eftir $M(n)$ aðgerðir logar á öllum lömpunum aftur.

(b) Ef n er af taginu 2^k, þá má velja $M(n) = n^2 - 1$.

(c) Ef n er af taginu $2^k + 1$, þá má velja $M(n) = n^2 - n + 1$.

VERÐLAUN ÓLAFS DANÍELSSONAR

Í haust voru veitt verðlaun úr *Verðlaunasjóði dr. phil. Ólafs Daníelssonar og Sigurðar Guðmundssonar arkitekts* og féllu þau Jakobi Yngvasyni í skaut fyrir framúrskarandi rannsóknir á stærðfræðilegri undirstöðu eðlisfræðinnar.

Formaður sjóðsstjórnar, Halldór I. Elíasson, afhenti verðlaunin, sem námu í þetta sinn 400.000 kr., við athöfn í Loftskeytastöðinni á Melunum einn þriðjudagsmorgunn áður en þar hófst vikuleg málstofa í stærðfræði.

Svo sem fram kom í skýrslu um sjóðinn í síðasta *Fréttabréfi* var síðast úthlutað úr honum árið 1987.

Sverrir Örn Þorvaldsson:

FRAMHALDSSKÓLAKEPPNIN 1993–94

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema var haldin í tíunda sinn síðastliðinn vetur, en að henni standa sem fyrr Félag raungreinakennara í framhaldsskólum og Íslenzka stærðfræðafélagið. Í tengslum við keppnina er einnig þátttaka í þremur alþjóðlegum viðburðum, *Eystrasaltskeppninni í stærðfræði, norrænu stærðfræðikeppninni* og *alþjóðlegu Ólympíuleikunum í stærðfræði.*

Fyrri hluti keppninnar fór fram þriðjudaginn 19. október 1993 í framhaldsskólum landsins og var á tveimur stigum: neðra stigi ætluðu nemendum á fyrstu tveimur námsárum framhaldsskólans og efra stigi ætluðu nemendum á síðari tveimur námsárum framhaldsskólans.

Alls tóku 404 nemendur úr 20 skólum þátt í keppninni, þar af 190 á neðra stigi og 214 á efra stigi. Þessi fjöldi er mjög svipaður og undanfarin ár. Á hvoru stigi fékk 21 keppandi viðurkenningarskjal fyrir árangurinn og var jafnframt boðið að taka þátt í seinni hluta keppninnar. Niðurstöður í þessum fyrri hluta keppninnar voru jafnframt hafðar til hliðsjónar við val á keppnisliði okkar í *Eystrasaltskeppninni,* sem við segjum hér fyrst frá.

Eystrasaltskeppnin 11.–15. nóvember 1993

Dagana 11. til 15. nóvember fór *Eystrasaltskeppnin í stærðfræði* fram í Riga í Lettlandi. Til hennar var boðið liðum frá löndum, sem liggja að Eystrasalti, og að auki frá Íslandi. Að þessu sinni tóku þátt í henni lið frá Danmörku, Eistlandi, Finnlandi, Íslandi, Lettlandi, Litháen, Póllandi og Svíþjóð. Svo sem fram kom í síðasta *Fréttabréfi* tókum við þátt í keppninni í fyrsta sinn haustið áður, en hún var nú haldin í fjórða sinn.

Í hverju liði eru fimm keppendur og vinna þeir saman að lausn tuttugu verkefna og hafa til þess fjórar klukkustundir. Lið Póllands bar sigur úr býtum í jafnri keppni, en íslenska liðið varð í sjöunda sæti. Íslenska liðið fékk hins vegar sérstaka viðurkenningu fyrir bestan árangur í þeim fimm verkefnum, sem fjölluðu um talnafræði.

Í íslenska liðinu voru þeir Alfreð Hauksson og Magnús Þór Torfason úr Menntaskólanum í Reykjavík, Bergþór I. Björgvinsson úr Menntaskólanum á Laugarvatni, Jóhann Tómas Sigurðsson úr Menntaskólanum á

Akureyri og Jón G. Ómarsson úr Verzlunarskóla Íslands. Fararstjórar voru Benedikt Jóhannesson og Rögnvaldur G. Möller.

Lokakeppnin 5. mars 1994

Seinni hluti framhaldsskólakeppninnar, úrslitakeppnin, var haldin í Háskóla Íslands laugardaginn 5. mars 1994. Þátttakendur voru 29 alls. Ákveðið var að veita fjórum efstu keppendunum peningaverðlaun, en í efstu tíu sætum urðu:

1.	Alfreð Hauksson, Menntaskólanum í Reykjavík
2.	Sveinbjörn Pétur Guðmundsson, Menntaskólanum á Akureyri
3–4.	Bergþór I. Björgvinsson, Menntaskólanum á Laugarvatni
3–4.	Magnús Þór Torfason, Menntaskólanum í Reykjavík
5.	Ingileif Bryndís Hallgrímsdóttir, Menntaskólanum í Reykjavík
6.	Gunnlaugur Þór Briem, Menntaskólanum í Reykjavík
7–8.	Bjarni Ívarsson, Menntaskólanum á Akureyri
7–8.	Jóhann Sigurðsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð
9–10.	Bjarni Rúnar Einarsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð
9–10.	Styrmir Sigurjónsson, Menntaskólanum í Reykjavík

Í framkvæmdanefnd keppninnar voru að þessu sinni Jón Kr. Arason, Rögnvaldur G. Möller og Sverrir Örn Þorvaldsson frá Íslenzka stærðfræðafélaginu og Bjarni Gunnarsson, Einar Arnalds og Lárus H. Bjarnason frá Félagi raungreinakennara í framhaldsskólum. Fyrirtækin Ístak hf. og Steypustöðin hf. báru sem fyrr allan kostnað af keppninni og veittu verðlaun.

Hér á eftir fara dæmin í lokakeppninni, en veittar voru fjórar klukkustundir til að leysa þau.

1. dæmi. Fimmburarnir Ari, Bryndís, Davíð, Elín og Guðjón fæddust á klukkutíma fresti. Hver þeirra um sig veit um eigin fæðingu, hvar í röðinni hún var. Guðjón veit líka, að Elín fæddist tveimur tímum á undan Bryndísi. Guðjón segir:

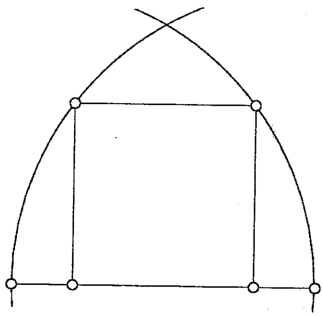
> *„Ef ég gef mér þá forsendu, sem mér finnst mjög trúleg, að Ari sé ekki elstur, þá veit ég í hvaða röð við fæddumst.“*

Þessi „trúlega forsenda“, sem Guðjón gaf sér, er reyndar alveg hárrétt. Í hvaða röð fæddust fimmburarnir?

2. dæmi. Sýnið, að brotið $\dfrac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ sé fullstytt fyrir allar náttúrulegar tölur $n > 0$.

3. dæmi. Gefið er strik AB, hringur með miðju í A, sem liggur gegnum B, og annar hringur með miðju í B, sem liggur gegnum A. Tveir hornpunktar ferningsins $CDEF$ eru á strikinu AB og hinir tveir eru hvor á sínum hringnum eins og myndin sýnir.

Reiknið hliðarlengd ferningsins, ef lengd striksins AB er 1.



4. dæmi. Finnið allar margliður x^3+ax^2+bx+c þannig að a, b og c séu heilar tölur og þær séu jafnframt rætur margliðunnar.

5. dæmi. Á hversu marga vegu er unnt að raða tölunum $1, 2, \ldots, n$ í sæti, þannig að eftirfarandi gildi fyrir sérhvert $i = 2, \ldots, n$:

Talan í i-ta sæti er annað hvort minni en allar tölurnar á undan eða stærri en allar tölurnar á undan.

6. dæmi. Reynir er að flísaleggja rétthyrndan gólfflöt. Til þess notar hann hvítar og svartar ferningslaga flísar, sem hann leggur í munstur eins og á skákborði. Hann byrjar á að leggja heila flís í eitt hornið og heldur áfram út frá því horni. Þegar hann hefur lokið við flísalagninguna, tekur hann eftir því, að samanlagt flatarmál hvítu flísanna á gólfinu er jafnt samanlögðu flatarmáli svörtu flísanna.

Sýnið, að önnur hliðarlengd gólfflatarins sé heilt margfeldi af hliðarlengd flísanna, og að fjöldi flísa á þeirri hlið sé jöfn tala.

Norræna keppnin 17. mars 1994

Fimmtán efstu keppendur í úrslitakeppninni tóku svo þátt í *áttundu norrænu stærðfræðikeppninni,* sem var haldin í skólum keppenda þann 17. mars 1994. Alls var 81 þátttakandi í keppninni; 19 voru frá Danmörku, 20 frá Finnlandi, 15 frá Íslandi, 9 frá Noregi og 18 frá Svíþjóð. Að þessu sinni sáu Íslendingar um framkvæmd keppninnar, þ.e. val á verkefnum og samræmingu á stigagjöf. Keppnin tókst ágætlega, en árangur íslensku keppendanna var þó með lakara móti. Bestum árangri náði Bjarne Knudsen frá Danmörku, en hann hlaut fulla stigagjöf, 20 stig. Næst á eftir honum komu Øystein Gjerstad frá Noregi, Nis Anders Jørgensen frá Danmörku og Jaakko Kangasharju frá Finnlandi, allir með 17 stig. Bestum árangri Íslendinganna náðu Sveinbjörn Pétur Guðmundsson, nemandi í Menntaskólanum á Akureyri, og Jóhann Sigurðsson, nemandi í Menntaskólanum við Hamrahlíð, en þeir voru í 26.–32. sæti með 6 stig.

Verkefnin í norrænu stærðfræðikeppninni fylgja hér á eftir, en veittar voru fjórar klukkustundir til að leysa þau. Hvert dæmi vegur fimm stig.

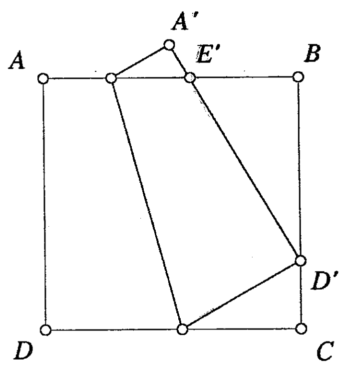
1. dæmi. Látum O vera punkt innan í jafnhliða þríhyrningi ABC með hliðarlengd a. Línurnar AO, BO og CO skera hliðar þríhyrningsins í punktunum A_1, B_1 og C_1. Sannið að

$$|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| < a.$$

2. dæmi. Endanlegt mengi S af punktum í sléttunni, sem hafa heiltöluhnit, er kallað *tveggja granna mengi*, ef fyrir sérhvern punkt (p,q) í S gildir, að nákvæmlega tveir punktanna $(p+1,q)$, $(p,q+1)$, $(p-1,q)$ og $(p,q-1)$ eru einnig í S. Fyrir hvaða n er til tveggja granna mengi með nákvæmlega n punktum?

3. dæmi. Pappírsferningur $ABCD$ er brotinn, þannig að punkturinn D falli í punkt D' á hliðinni BC (sjá mynd). Gerum ráð fyrir, að AD falli í $A'D'$, sem sker AB í E.

Sannið, að ummál þríhyrningsins EBD' sé jafnt hálfu ummáli ferningsins.



4. dæmi. Ákvarðið allar jákvæðar heilar tölur $n < 200$, þannig að $n^2 + (n+1)^2$ sé annað veldi heillar tölu.

Ólympíuleikarnir í júlí 1994

Á grundvelli árangurs í landskeppninni og norrænu keppninni var valið fjögurra manna lið til að taka þátt í *alþjóðlegu Ólympíuleikunum í stærðfræði*, sem fara fram í Hong Kong nú í júlí. Í liðið voru valin þau Bjarni Rúnar Einarsson, nemandi í Menntaskólanum við Hamrahlíð, og Alfreð Hauksson, Ingileif Bryndís Hallgrímsdóttir og Magnús Þór Torfason úr Menntaskólanum í Reykjavík. Bjarni og Magnús voru að ljúka öðru námsári en Alfreð og Ingileif eru nýstúdentar. Jón Kr. Arason verður fulltrúi okkar í dómnefnd en Lárus H. Bjarnason verður fararstjóri.

RITFREGNIR

Nýkomið er út á forlagi Bandaríska stærðfræðifélagsins rit Sigurðar Helgasonar, *Geometric Analysis on Symmetric Spaces*. Ritið, sem er á sjöunda hundrað blaðsíðna, er gefið út í ritröðinni *Mathematical Surveys and Monographs*. Þrátt fyrir mikla fyrirferð er bókin ódýr, félagsmannaverð er einungis 43 dalir.

Höfundur hefur lýst því fyrir ritstjóra *Fréttabréfs*, hvernig bókin er tilkomin. Í grein, sem birtist í *Acta Mathematica* árið 1959, byrjaði hann að rannsaka óbreytandi diffurvirkja á einsleitum rúmum. Á Norræna stærðfræðingaþinginu í Helsinki 1957 lýsti hann nokkrum niðurstöðum og á Alþjóðaþingi stærðfræðinga í Nice 1970 vakti hann máls á þeim viðfangsefnum á þessu sviði, sem honum fannst skipta mestu máli. Í byrjun var honum ljóst, að meðal einsleitinna rúma væru hin samhverfu rúm Cartans aðgengilegust og segja má, að fyrir þau séu *viðfangsefnin frá Nice* leyst að mestu leyti.

Til þess að fást við diffurvirkja á samhverfum rúmum innleiddi Sigurður á árunum 1963–65 vissar tegundir af Radon-færslu og Fourier-færslu fyrir samhverf rúm. Þótt andhverfusetningarnar fyrir þessar færslur séu komnar í greinum hans frá 1964–65, var það ekki fyrr en 1972, að honum tókst að sanna þá setningu, sem samsvarar setningu Paleys og Wieners fyrir Fourier-færsluna á $\mathbb{R}^n$. Þetta hafði ýmsar afleiðingar fyrir óbreytandi diffurjöfnur á samhverfum rúmum, m.a. víðfeðmar tilvistarsetningar, sem hann birti í *Annals of Mathematics* árið 1973.

Eitt viðfangsefnanna frá Nice var ákvörðun á sameiginlegum eiginföllum. Í grein frá 1974 leysti Sigurður það fyrir samhverf rúm með metorð 1 og síðar (1976) að nokkru leyti fyrir öll samhverf rúm, en það leystu svo sex Japanar til fulls í sameiginlegri grein árið 1978.

Bókin fjallar að mestu leyti um þessar rannsóknir höfundar, sem má rekja til 1957 sem fyrr segir og hafa haldið áfram fram á síðustu ár.

Höfundur tileinkar rit sitt dönskum stærðfræðingum, lífs og liðnum. Með því lætur hann í ljós ánægju sína yfir því, hversu margir danskir stærðfræðingar hafa farið inn á þetta svið síðan 1970 og lagt gjörva hönd þar á.

* * *

Miklar tafir hafa orðið á því, að út yrðu gefnir fyrirlestrar, sem fluttir voru í júlí 1990 á *málþingi á Laugarvatni til heiðurs Bjarna Jónssyni sjötugum*, en þeir eru loks farnir að sjá dagsins ljós. Ritstjórn *Algebra Universalis* ákvað að taka þá til birtingar í tímaritinu og er George F. McNulty ritstjóri þessa sérstaka bindis, en hann var svo sem menn minnast formaður hinnar erlendu undirbúningsnefndar á málþinginu.

Fyrsta heftið, sem nú er komið út og barst hingað í júní, er 3. hefti 31. bindis af tímaritinu, alls 166 blaðsíður. Fremst er ritaskrá Bjarna með 84 ritum útgefnum frá 1947 til 1993. Síðan tekur við í aukinni gerð fyrsti fyrirlesturinn á Laugarvatni eftir Kirby A. Baker um framlag Bjarna á sviði algebru; þar er skrá yfir 406 rit, sem byggjast að meira eða minna leyti á verkum Bjarna, og er við hvert þeirra vísað á viðeigandi stað í ritaskrá hans. Auk fyrirlestra, sem fluttir voru á Laugarvatni, eru einnig í þessu hefti aðrar greinar tileinkaðar Bjarna eftir höfunda, sem komust ekki hingað til lands. Meðal þeirra var Alan Day, sem lézt 26. nóvember 1990, en hann átti sæti í undirbúningsnefnd málþingsins.

Í einum fyrirlestranna á Laugarvatni, sem birtur er í þessu hefti, rifjaði J. B. Nation frá Hawaii-háskóla í Honolulu upp samtal sitt við Bjarna leiðbeinanda sinn á stúdentsárum sínum í Vanderbilt-háskóla fyrir aldarfjórðungi. Hann hafði komið inn á skrifstofu Bjarna og einhverra hluta vegna farið að bera sig illa undan því, að í stærðfræði væri svo margt, sem þyrfti *að læra*.

„Þú verður að átta þig á," svaraði Bjarni, „stærðfræði er fyrst og fremst virk athöfn og bara öðrum þræði þekkingarbrunnur."

Bjarni Þórðarson:

FÉLAG ÍSLENZKRA TRYGGINGASTÆRÐFRÆÐINGA

Á aðalfundi Íslenzka stærðfræðafélagsins vorið 1966 viðraði Kr. Guðmundur Guðmundsson þá hugmynd að stofna til deildaskiptingar innan félagsins, meðal annars með deild fyrir tryggingafræðinga. Þeim hafði fjölgað nokkuð í félaginu næstu árin á undan og töldu þeir æskilegt að skapa ákveðinn vettvang fyrir skoðanaskipti og hagsmunagæzlu meðal annars gagnvart erlendum félögum og samtökum. Þessi hugmynd fékk ekki hljómgrunn á fundinum. Hinir yngri tryggingafræðingar höfðu þá frumkvæði að stofnun sérstaks félags og var það stofnað hinn 4. janúar 1967. Stofnendur þess voru:

Árni S. Björnsson	Jón Erlingur Þorláksson
Bjarni Þórðarson	Kristján Sturlaugsson
Erlendur Lárusson	Ottó J. Björnsson
Guðjón Hansen	Ómar Árnason
Kr. Guðmundur Guðmundsson	Þórir Bergsson

Félagið hefur kjörið tvo menn heiðursfélaga, Árna S. Björnsson og Kr. Guðmund Guðmundsson.

Í reglum félagsins segir í 1. og 2. gr. meðal annars:

„*Félagið heitir* Félag íslenzkra tryggingastærðfræðinga. *Markmið félagsins er að efla tryggingastærðfræði, tölfræði og aðrar greinar á starfssviði tryggingastærðfræðinga og gæta hagsmuna félagsmanna.*"

„*Félagar geta þeir orðið, er lokið hafa háskólaprófi í tryggingastærðfræði eða öðru hliðstæðu prófi, þeir sem lokið hafa viðurkenndu háskólaprófi í skyldum greinum eða hafa á annan hátt aflað sér hliðstæðrar þekkingar.*"

Hér er fest í sessi starfsheitið *tryggingastærðfræðingur*, en áður höfðu menn almennt notað heitið *tryggingafræðingur* og gera að vísu sumir enn.

Félagið hefur haldið að jafnaði tvo til þrjá almenna fundi á ári. Helztu umræðuefni hafa verið fagleg og tengzt meginviðfangsefni tryggingastærðfræðinga, þ.e. mati á fjárskuldbindingum, sem eru háðar óvissu, með samtengingu fjármálastærðfræði og tölfræði. Það er ljóst, að tryggingastærðfræðingar munu bera mikla ábyrgð við breytingar á lífeyriskerfi þjóðarinnar, sem nú eru brýnar, svo og við fjárhagslegt eftirlit með því, þannig að það geti staðið við þær skuldbindingar, sem það tekst á hendur. Þá munu tryggingastærðfræðingar verða enn virkari en hingað til við mat á skuldbindingum vátryggingafélaga og við ákvarðanir um iðgjaldstaxta þeirra. Ákvarðanir erlendra aðila munu hafa veruleg áhrif á mótun starfsumhverfis tryggingastærðfræðinga á næstu árum, en nýlega tóku gildi ný lög um vátryggingastarfsemi í samræmi við ákvæði samninga um Evrópskt efnahagssvæði. Þetta hefur haft áhrif á val erinda á síðustu fundum félagsins, þar sem fjallað hefur verið um reglur um gjaldþol vátryggingafélaga í löndum OECD, samskipti félagsins og félagsmanna við erlend samtök, svo og frumvarp til laga um vátryggingastarfsemi.

Félagsmenn eru nú tólf að tölu. Fimm nýir félagar hafa bætzt í hópinn, Pétur H. Blöndal, Benedikt Jóhannesson, Ragnar Þ. Ragnarsson, Bjarni Guðmundsson og Helgi Þórsson, en af stofnendum eru þrír látnir, Árni S. Björnsson, Þórir Bergsson og Kr. Guðmundur Guðmundsson. Fjölgun í starfsgreininni er því mjög lítil og mun minni en víðast erlendis. Þegar félagið var stofnað, var fjöldi tryggingastærðfræðinga í hlutfalli við fólksfjölda einna mestur á Íslandi, en nú eru mörg lönd okkur fremri að þessu leyti. Fyrir nokkrum árum þótti félagsmönnum stefna í óefni um þessa þróun og ákváðu þeir að afla fjár til þess að veita styrk til náms í tryggingastærðfræði. Tókst það með atbeina nokkurra tryggingafélaga og samtaka lífeyrissjóða. Styrkþeginn, Kristján Sigtryggsson, sem áður hafði lokið BS-prófi í stærðfræði, er við námslok og nokkrir aðrir eru nú við nám, þannig að horfur í þessu efni eru allgóðar.

Fyrsti formaður félagsins var Kr. Guðmundur Guðmundsson, en núverandi stjórn er skipuð þeim Bjarna Þórðarsyni, formanni, Bjarna Guðmundssyni, varaformanni og gjaldkera, og Ragnari Þ. Ragnarssyni, ritara.

MITTAG-LEFFLER-STOFNUNIN NÆSTU VETUR

Viðfangsefni á *Mittag-Leffler-stofnuninni* í Stokkhólmi næsta vetur verða annars vegar *safneðlisfræði, ólínulegar hlutafleiðujöfnur og iðustreymi* á haustmisseri og hins vegar *slembigreining og slembiferli* á vormisseri. Meðal gesta, sem gert er ráð fyrir að verði þar a.m.k. hluta misseris, eru fjórir Íslendingar, Björn Birnir og Þórður Jónsson á haustmisseri og Friðrik Már Baldursson og Hermann Þórisson á vormisseri.

Veturinn þar á eftir, 1995–96, verður svo eitt og sama meginviðfangsefni bæði misserin, *Lie-grúpur innan stærðfræðigreiningar*, og verður lögð áherzla á þýða greiningu (e. *harmonic analysis*) og hlutafleiðujöfnur á Lie-grúpum. Þar liggur fyrir nú þegar, að tveir Íslendingar verði meðal gesta, þeir Sigurður Helgason og Gestur Ólafsson. Þess má geta, að nú í janúar hélt Sigurður tveggja vikna byrjunarnámskeið um Lie-grúpur við Háskóla Íslands á vegum stærðfræðiskorar raunvísindadeildar og sóttu það allmargir stúdentar.

Athygli er á því vakin, að stofnunin veitir allmarga dvalarstyrki og er miðað við mánaðardvöl hið minnsta. Styrkirnir eru ætlaðir stúdentum, sem eru í framhaldsnámi eða hafa lokið því nýlega. Styrkir vegna Lie-grúpu-ársins verða auglýstir í árslok með umsóknarfresti til marzloka 1995; úthlutun liggur svo fyrir um miðjan apríl.

Því má svo bæta við, að veturinn 1970–71 voru *Lie-grúpur og þýð greining* einnig viðfangsefnið á Mittag-Leffler-stofnuninni og dvaldist Sigurður Helgason þar þann vetur allan. Tókst sú starfsemi með slíkum ágætum, að upp úr því efldust mjög Lie-grúpu-fræði á Norðurlöndum, einkum í Danmörku, því nokkrir úr hópi yngri stærðfræðinga tóku efnið fyrir og hafa síðan komizt framarlega í röð á þessu sviði; fjórir hófu þar vinnu við doktorsverkefni undir handleiðslu Sigurðar. Segja má, að með óbeinum hætti hafi *norræni sumarskólinn í þýðri greiningu*, sem haldinn var á Laugarvatni sumarið 1977, einnig verið afrakstur þessa starfs við Mittag-Leffler-stofnunina.

Til frekari fróðleiks um stofnunina og starfsemina þar eru lesendur minntir á hina ítarlegu frásögn Ragnars Sigurðssonar um þetta efni í júlíhefti *Fréttabréfs* 1992.

Christer Kiselman:

MENNINGARGILDI STÆRÐFRÆÐI

Stærðfræði sem sjálfstæð vísindi [1]

Stærðfræði er mikið stunduð í skólum og háskólum. Þrátt fyrir það er hún lítt þekkt og oft misskilin. Unglingar — og þá einnig fullorðnir, því það verða þeir með árunum — bera ósjaldan óttablandinn hug til hennar eða illviljaðan. Hvar liggja rætur þessa meins? Skyldi það vera í sjálfu eðli hennar?

Fyrst var stærðfræði notuð með árangri við rannsóknir á náttúrunni (stjörnufræði, eðlisfræði, síðar efnafræði, veðurfræði, líffræði) og er sú notkun enn mikilvæg. Þetta er sennilega ástæða þess, að hún er oft talin til náttúruvísinda. En þar á hún ekki heima. Notkun hennar í hagfræði er nú orðin mikilvæg. Hún er ómissandi hluti allrar tæknilegrar vinnu. Nú er svo komið, að vegna notagildis síns á stærðfræði ekki heima meðal náttúruvísinda.

En það er önnur miklu veigameiri ástæða fyrir því að draga stærðfræði ekki í dilk með náttúruvísindum. Sé litið á yfirborðið, nærist þróun hennar á þörfum vísinda og tækni, en sé dýpra skyggnst, kemur í ljós, að meginhvatinn að þróuninni er fremur forvitni og tilfyndni, náskylt því sem er að verki í listum. Viðurkenning á þessu veldur sérstöku viðhorfi til kennslu í stærðfræði á öllum aldursskeiðum frá grunnskólanámi til doktorsnáms.

Til að sýna fram á þetta sjálfstæði stærðfræðinnar vil ég nefna nokkur dæmi.

---

[1] Höfundur greinarinnar, *Christer Kiselman*, er prófessor í stærðfræði við Uppsalaháskóla. Hann dvaldist hér á landi í ágústmánuði 1993 og flutti þá fyrirlestur í *Íslenzka stærðfræðafélaginu.*

Greinin er samin á esperanto og birtist undir heitinu *La kultura signifo de la matematiko* í *Tutmondaj Sciencoj kaj Teknikoj*, nr. 3–4, október 1989.

Jón Hafsteinn Jónsson þýddi úr frummálinu. *Jón Kr. Arason* og *Ragnar Sigurðsson* báru þýðinguna saman við frumgerðina. *Jón Ragnar Stefánsson* fór yfir hina íslenzku gerð greinarinnar í samráði við þýðanda.

Í almennu afstæðiskenningunni notaði Einstein (1879–1955) rúmfræði Riemanns og þinareikning. En þessar hugsmíðar voru ekki skapaðar til að þjóna eðlisfræði, heldur sem hrein stærðfræði löngu fyrr. Þær stóðu tilbúnar, þegar Einstein þarfnaðist þeirra. Riemann (1826–1866) innleiddi það, sem nú er nefnt diffurrúmfræði Riemanns. Í rúmi Riemanns má reikna fjarlægðir og þar eru ýmsir mælikvarðar fyrir sveigju. Venja er að tengja þinareikninginn við nafn Riccis (1853–1925), en hann gerir manni kleift að fjalla um alls kyns stærðir og breytingar þeirra við hnitaskipti. Þinareikningurinn, sem Einstein að vísu lærði af Großmann (1878–1936), varð alkunnur við það að Einstein notaði hann í hinni almennu afstæðiskenningu sinni, sem hann setti fram 1916.

Annað dæmi er fræðin um rófliðun sjálfoka virkja á Hilbert-rúmi. Mikilvægur hluti fræðanna um sjálfoka samfellda virkja var tilbúinn sem hrein stærðfræði, sköpuð af Hilbert (1862–1943) löngu fyrir daga skammtakenningarinnar, þar sem hún var svo hagnýtt á næsta undraverðan hátt. Hins vegar gaf eðlisfræðin af sér hugmyndina um alhæfingu yfir á ósamfellda virkja, sem var verk von Neumanns (1903–1957). Í skammtafræði eru tvö grundvallarhugtök, ástand og mælistærð. Ástand er jafngildisflokkur af vigrum í Hilbert-rúmi yfir tvinntalnasviðið og mælistærð er sjálfoka virki, sem verkar á þessa vigra. Í hinu daglega lífi er vissulega ekkert, sem leiðir beint til tvinntalna, og eðlisfræðilegar athuganir gefa ekki tilefni til sköpunar þeirra, en þær eru nauðsynlegar fyrir framsetningu á lögmálum skammtakenningarinnar.

Þriðja dæmið gæti verið strengjafræðin í kennilegri eðlisfræði. Í henni er notað mikið af nýlegum niðurstöðum úr óhlutbundinni stærðfræði.

Wigner sagði, að hið óhemjumikla notagildi stærðfræðinnar væri næsta dularfullt og á því væri engin skynsamleg skýring. Og það væri einmitt vegna þessarar ógnvekjandi nytsemi stærðfræðitáknmálsins, að sett sé fram spurningin um ótvíræðni eðlisfræðikenninga okkar [5; bls. 2]. Svo að vitnað sé í Dyson [1], þá er stærðfræði ekki bara tæki fyrir eðlisfræðinginn til að reikna út fyrirbærin, heldur er hún honum meginuppspretta hugtaka og reglna, sem geta leitt til þess, að skapaðar verði nýjar kenningar.

En auðvitað geta stærðfræðingar ekki alltaf státað af árangri. Svo að vitnað sé aftur í Dyson [2] kom það nokkrum sinnum fyrir, að stærðfræðingar misstu af tækifæri til að flýta þróun vísindanna. Sem dæmi þar um nefnir hann, að með jöfnum Maxwells (1831–1879), sem voru settar fram 1873, bauðst stærðfræðingum einkar áhugaverður starfsvettvangur, sem þeir veittu ekki næga athygli. Ef þeir hefðu þá hafist handa við hin nýju vandamál, myndu þeir hafa haft möguleika á að uppgötva afstæðiskenninguna nokkrum áratugum áður en Einstein gerði það. Þessi djarfa fullyrðing byggist á hugmyndinni um færslugrúpur, sem halda óbreyttum jöfnum af ákveðinni gerð. Þess háttar grúpur eru mikilvæg stærðfræðileg viðfangsefni. Jöfnur Maxwells breytast ekki við ummyndanir úr grúpu Lorentz, og eðlisfræðijöfnurnar í lögmálum Newtons breytast ekki við ummyndanir úr grúpu þeirri, sem kennd er við Galilei. Í ljós kemur, að grúpa Lorentz er stærðfræðilega einfaldari en grúpa Galileis. Ef stærðfræðilegir eiginleikar þessara grúpa hefðu verið rannsakaðir, myndi takmarkaða afstæðiskenningin ef til vill hafa uppgötvast við það. Auðvitað verður að veita því athygli, að röksemdafærslan er skilyrt; það er ekki hægt að sanna, hvað hefði gerst, ef stærðfræðingar hefðu gert eitthvað annað en þeir gerðu. En þótt staðhæfing Dysons sé dapurleg, bendir hún til sömu áttar og jákvæðu dæmin; hún vekur tiltrú á sjálfstæði stærðfræðinnar og möguleika á því að finna í henni áhugaverðar eðlisfræðikenningar.

Vegna þessa sjálfstæðis stærðfræðinnar getum við spurt með tilvitnun í Wigner og Dyson: Er það eitt eðlisfræðikenning, sem unnt er að leiða út frá þessum stærðfræðikenningum og með þessum stærðfræðiaðferðum? Og ef svo er, hvers vegna eru þessar stærðfræðiaðferðir þá tilbúnar á einhverjum sérstökum tíma. Yrði eðlisfræðin öðruvísi með annarri stærðfræði? Hverjar eru afleiðingar þessara spurninga varðandi ábyrgð stærðfræðinga? Hverjar eru afleiðingarnar fyrir stefnumörkun um vísindi?

Festa og sveigjanleiki í stærðfræði

Margir halda, að stærðfræði sé samsafn af föstum sannindum, sígildum lögmálum. Ekki er erfitt að skilja ástæðu þessa. Svo er kennt að tveir plús tveir séu fjórir, og enginn getur ímyndað sér, að þau sannindi verði nokkurn tíma ósönn. Steinn, sem við sjáum á jörðinni, gæti hafa myndast fyrir milljarði ára, og hann verður ef til vill að dufti eftir aðeins nokkrar milljónir ára. En jafnvel þá yrði það satt, að tveir plús tveir séu fjórir, eða er ekki svo? Stærðfræði virðist miklu varanlegri en varanlegustu hlutir hins eðlisfræðilega heims. Og hin almenna þekking á heiminum breytist enn meira í öðrum fræðigreinum. Samkvæmt kenningu Wegeners (1880–1930) hafa meginlöndin verið að færast til. Þegar ég var í skóla, var mér kennt, að kenning hans væri einfeldningsleg og ósönn. Nú er það að öllu leyti viðurkennd staðreynd, að til dæmis Suður-Ameríka og Afríka hafi eitt sinn legið saman. Og ég lærði, að maðurinn hafi 48 litninga. Nú er sagt, að þeir séu aðeins 46, og að talan 48 hafi orðið til við mistalningu á mynd, þar sem nú sjáist aðeins 46 litningar. Þannig breytist mín eigin þekking á heiminum. Í stærðfræðinni lærði ég, að afleiða fallsins $x \mapsto x^4$ sé $x \mapsto 4x^3$, og fram til þessa hef ég ekki heyrt annað. Þessar staðreyndir gefa manni þá ómótstæðilegu hugmynd, að jarðfræði þróist, að líffræði þróist, en stærðfræðin ein þróist ekki. En er þessi hugmynd virkilega ómótstæðileg?

Svo sem sérhver lífræn heild samanstendur stærðfræði bæði af föstum og sveigjanlegum hlutum. Þarf maðurinn á hörðum beinum að halda eða mjúkum vöðvum? Til að geta hlaupið þarfnast hann vissulega hvors tveggja. Beinagrindin ein getur ekki hreyft sig, en án hennar hefðu vöðvarnir ekkert til að taka á. Svo er það einnig um hvert þekkingarsvið. Jafnframt því sem sumir hlutar stærðfræðinnar virðast mjög kyrrstæðir eru aðrir sveigjanlegir og í hraðri þróun. Það sem kennt er í skólum, eru þeir hlutar stærðfræði, sem hafa fyrir löngu fengið á sig fasta mynd, en sveigjanlegu hlutarnir eru miklu síður kunnir. Það er ekki að undra, þó að fólk líti venjulega á stærðfræðina fremur sem bein en sem vöðva.

Ár hvert birtast tugþúsundir greina um nýjar rannsóknarniðurstöður í stærðfræði. Ókjör nýrra staðreynda verða kunn og þær eldri birtast í nýju ljósi. Að þessu leyti líkist stærðfræði vissulega öðrum vísindagreinum, sem eru í þróun. (Ég læt þess ennfremur getið, að í stærðfræði eru menn ekki fjötraðir af þeim óþægilegu erfiðleikum að þurfa að gera tilraunir eða athuganir, sem í öðrum vísindum eru oft til tafar.)

Það er ekki bara svo, að stærðfræði þróist hratt; hún er full af handahófshætti, af atriðum völdum af algjörum geðþótta. Á sama hátt og hin fastmótaða stærðfræði er ákaflega skorðuð, þá er hin sveigjanlega stærðfræði ákaflega auðsveigð í ótömdu frjálsræði sínu. Þetta getur verið mjög óþægilegt fyrir þá, sem dragast að stærðfræði í löngun eftir öryggi og föstum gildum; geðþóttaeinkennin valda þeim vonbrigðum og ótta.

Dæmi um þennan geðþótta er sagan af frumsetningunni um samsíða línur. Samkvæmt þessari frumsetningu Evklíðs (um 303–275 f.Kr.)

gengur nákvæmlega ein lína gegnum gefinn punkt samsíða gefinni línu. Skyldi vera hægt að sanna þessa frumsetningu út frá hinum frumsetningunum? Í tvö þúsund ár glímdu stærðfræðingar við þessa spurningu. Loksins á síðustu öld sönnuðu þrír stærðfræðingar, að svo er ekki. Það voru Bolyai (1802–1860), Lobačevskij (1793–1856) og Gauß (1777–1855). Þeir sýndu fram á þetta með því að búa til rúmfræðikerfi, þar sem gegnum gefinn punkt gengur annað hvort engin lína samsíða gefinni línu eða að minnsta kosti tvær línur. Og þessi rúmfræðikerfi eru sönn í sama skilningi og rúmfræði Evklíðs er sönn. Af tilvist þessara rúmfræðikerfa skilst, að útilokað er að sanna frumsetningu Evklíðs um samsíða línur út frá hinum frumsetningunum. Hvers vegna tók það 2000 ár að finna lausn á þessum vanda? Við þessari spurningu er varla hægt að finna svar, en möguleg ástæða gæti verið, hve fráleitt það þótti að viðurkenna geðþóttaval á frumsetningunum, þessum sjálfsögðu undirstöðum hugsunar okkar. Til marks um þetta er sú staðreynd, að Gauß birti ekki uppgötvun sína; hann sem var svo virtur, að orðstír hans hefði þolað það.

Ef til vill er annað dæmi um handahóf enn skýrara varðandi hugsunargetu okkar: sjálfstæði samfelldnitilgátunnar. Hún segir, að óendanlegt hlutmengi af rauntölum sé annað hvort samstétta náttúrulegu tölunum $\mathbb{N}$ eða samstétta rauntölunum $\mathbb{R}$ sjálfum. Til að tjá þetta með stærðfræðitáknum skulum við tákna fjöldatölu mengisins A með $\#A$. Þá segir samfelldnitilgátan, að ójafnan $\#\mathbb{N} < \#A < \#\mathbb{R}$ sé óhugsandi. Hið fyrsta af þeim 23 viðfangsefnum, sem Hilbert setti fram í París árið 1900 sem *framtíðarverkefni stærðfræðinnar,* var einmitt sönnun á samfelldnitilgátunni. Og hann áleit sennilegt, að þessi staðhæfing væri sönn [3; bls. 70]. Hilbert, og trúlega sérhverjum stærðfræðingi hans kynslóðar, fannst að annað hvort væri til mengi $A \subseteq \mathbb{R}$, þannig að $\#\mathbb{N} < \#A < \#\mathbb{R}$, eða slíkt mengi væri ekki til, og rannsóknir myndu skera úr um það. En síðar kom í ljós, að staðhæfingin um tilvist slíks mengis er óháð hinum frumsetningunum. Samkvæmt setningu Gödels (1906–1978) má bæta henni við þær án þess að með því skapist mótsögn. Samkvæmt setningu Cohens (f. 1934) gildir svo hið sama um neitunina á þeirri staðhæfingu. Þetta merkir, að mengjafræði, sem gerir ráð fyrir, að til sé óteljanlegt mengi lægri stéttar en rauntölurnar, er jafnvæg og jafnsönn og mengjafræði, sem útilokar, að slíkt mengi sé til.

Við getum því sagt, að stærðfræðin gefi okkur enga vitneskju um það, hvort í raun sé engin lína, ein lína eða fleiri línur gegnum gefinn punkt samsíða gefinni línu; og eins hjálpar hún okkur ekki við að segja til um, hvort til sé óendanlegt mengi með tiltekinn eiginleika. Í þessu birtist hlutleysi hennar, sem skilur okkur eftir hjálparvana. En svo mótsagnakennt sem það er, skulum við einnig muna, að stærðfræði er aðaluppspretta eða jafnvel einasta uppspretta hugtaka og reglna fyrir náttúruvísindin og eina tjáningarmálið, sem þau geta notað.

Stærðfræði sem menningarkimi og sem menningarsvið

Þar sem tengsl stærðfræði við önnur vísindi eru svo mótsagnakennd sem fram kom hér að framan, þá er leyfilegt og jafnvel æskilegt að leita annarra viðhorfa, sem gætu hjálpað okkur að skilja hlutverk hennar. Meðal slíkra sjónarmiða er það að líta á hana sem eitt svið heildarmenningar og bera hana saman við menningarleg fyrirbæri almennt. Um það skrifuðu White [4] og Wilder [6].

Fyrst skulum við útskýra, að hver hluti menningarinnar getur verið af tvennum toga: annars vegar er hann sem *menningarsvið* hluti af þeirri menningu, sem er sameiginleg yfirgnæfandi meiri hluta tiltekins hóps manna; hins vegar getur hann verið sérmenning eða *menningarkimi*, hann er séreign einhvers hluta þessa hóps (hluta, sem er of lítill eða of dreifður til að standa undir heilu menningarsviði).

Stærðfræði er í senn bæði menningarsvið og menningarkimi. Sem menningarsvið samanstendur stærðfræði af allri þekkingu, hugmyndum og hæfni af stærðfræðilegum toga, sem tilheyrir almennt einhverjum þjóðfélagshóp. Það er tilgangur almennrar kennslu að viðhalda honum og auka hann. Sem dæmi nefni ég, að fólk þekkir yfirleitt ekki hugtökin afleiðu og heildi falls, en getur samt haft hugmynd um hraða (mældan í km á klst.) og hröðun (hraðavöxt), vexti á bankaláni, árslaun sem summu af mánaðarlaunum og önnur atriði, sem eru hlutkennd staðfesting á diffrun og heildun ýmissa falla. Það sést, að ekki er auðvelt að afmarka nákvæmlega þetta menningarsvið, en við sjáum, að það hefur aðeins að geyma þá þætti stærðfræðinnar, sem eru löngu þroskaðir.

Sem menningarkimi er stærðfræði sú menning, sem er sérkennandi fyrir þá, sem fengið hafa menntun í vísindalegri stærðfræði. Þessi hópur er vissulega ekki einleitur, en það er athyglisvert fyrir þennan menningarkima, að hann er innbyrðis líkari milli landa en mörg önnur menningarleg fyrirbæri, einkum þó skólastærðfræðin. Til forna mátti tala um kínverska, arabíska, gríska og suður-ameríska stærðfræði, en slíkt mætti tæplega nú.

Afleiðing af menningarhlutverki stærðfræði

Hvers vegna eigum við að skoða stærðfræðina sem menningu? Venjulega er sagt, að menningarhlutverki fyrirbæris sé haldið á loft í þeim tilgangi að geta skilið og sagt fyrir um þróun þess. Ég hef ekki hugrekki til að segja fyrir um margt, en að mínu viti er þetta viðhorf til hinna mótsagnarlegu vísinda nytsamlegt fyrir skilning og tjáningu á ýmsum vandamálum, sem erfitt er að taka á. Milli þeirra tveggja viðhorfa, annars vegar að líta á stærðfræði sem menningarsvið heillar þjóðar og hins vegar að líta á hana sem menningarkima, er spenna sem meðal annars er merkjanleg í kennslu. Í kennslunni felst innleiðsla bæði í menningarsviðið og í menningarkimann í alls kyns breytilegri blöndu af hvoru tveggja allt frá grunnskóla til doktorsprófs. Ég hef vissulega ekki yfirlit yfir stærðfræðikennslu um allan heim, en ég kemst ekki hjá að veita því athygli, að í mörgum löndum er stærðfræðikennsla ekki árangursrík. Hún er oft of formföst, beinist um of að því að veita mótaða verklega hæfni. Þetta gefur nemendum þá tilfinningu, að stærðfræðin sé það þurrasta og leiðinlegasta þekkingarsvið, sem til er.

Í sálarfræði er stundum gerður munur á tvenns konar greind, sem þar er nefnd *samleitin greind* og *sundurhverf greind*. Hin fyrrnefnda er hæfnin til að komast frá gefnum forsendum og ná lausn, sem er annað hvort sú eina rétta eða sú eina, sem þykir góð. Hin síðarnefnda er svo hæfnin til að ganga út frá gefnu ástandi og reyna eftir ýmsum leiðum að finna viðunandi lausnir, án þess þó að um sé að ræða neina ótvírætt ákvarðaða rétta lausn. Hættan í skólastærðfræðinni er sú, að hún örvar nær eingöngu samleitnu greindina; dæmin sem gefin eru í skólanum eru svo einhæf og sniðin að fastmótuðum aðferðum, að hin sundurhverfa greind virðist óþörf. Ljóst er, að samleitin greind er aðeins sérstök gerð af sundurhverfri greind, og trúlega ætti að æfa hana fyrst og fremst til þess að þróa vinnuaðferðir, sem síðar ætti að nota við flóknari aðstæður, þar sem þörf er á enn meiri sundurhverfri greind. Að sjálfsögðu er sundurhverf greind ómissandi við rannsóknarstörf í öllum vísindum — annars væri ekki um rannsókn að ræða.

Til yfirlits getum við skipt stærðfræði eftir þrem ólíkum leiðum í tvo flokka — þótt það sé ef til vill gert nokkuð gróft: eftir menningarhlutverki, sveigjanleika og þeirri gerð hæfninnar, sem á reynir. Flokkanirnar yrðu þannig:

Stærðfræði sem menningarsvið	Stærðfræði sem menningarkimi
Föst stærðfræði (beinsins)	Sveigjanleg stærðfræði (vöðvans)
Stærðfræði, þar sem samleitin greind er nauðsynleg	Stærðfræði, þar sem sundurhverf greind er nauðsynleg

Skyldu þessar flokkanir falla saman að meira eða minna leyti? Ef svo er, verðum við að reyna að breyta menningarsviðinu. Því ég held, að hið almenna stærðfræðiuppeldi myndi batna, ef það yrði sveigjanlegra, ekki svo staðlað sem það er, og æfingardæmi yrðu þannig gerð, að meiri þörf yrði fyrir sundurhverfa greind við að leysa þau. Hvers vegna? Vegna þess að hagnýting stærðfræði kæmist þannig á hærra stig, yrði raunsærri og trúverðugri, og vegna þess að þetta myndi hafa jákvæð áhrif í öllum þjóðfélagshópum, sem hafa eitthvað með stærðfræði að gera. En það er ekki auðvelt að breyta kennslunni, meðal annars vegna þess að fólk, sem hefur dálæti á því að beita samleitinni greind, hefur dregist að stærðfræðinni og kærir sig ekki um að draga úr festu hennar.

Menningargildi stærðfræði

Að lokum spyrjum við, hvert sé þá menntagildi stærðfræði sem menningarkima og sem menningarsviðs? Það fer vissulega eftir verðmætamati hvers og eins. Ég vil aðeins benda á fjóra eiginleika stærðfræðinnar til samanburðar við önnur vísindi og önnur menningarleg fyrirbæri.

a) Alþjóðleiki.
b) Fegurð.
c) Áhrif á það, hvernig við skynjum heiminn.
d) Áhrif á sjálfstraustið og hæfnina til að hugsa.

Um alþjóðleikann verður að segja, að ekki er til neitt, sem er að öllu leyti alþjóðlegt, en menningarfyrirbæri geta verið breytileg að meira eða minna leyti meðal mannkynsins. Og vissulega er stærðfræðin sem menningarkimi alþjóðlegri en mörg önnur menningarleg fyrirbæri og einnig alþjóðlegri heldur en margar vísindagreinar, einkum félagsfræðilegar. Þetta getur haft þau áhrif á stærðfræðikennslu, að hún verði alþjóðlegri, og ósjaldan er það af hinu góða. En við verðum einnig að veita því athygli, að vísindaleg stærðfræði er ekki fullkomlega alþjóðleg. Hún hefur ýmis þjóðleg einkenni. Við skulum greina á milli alþjóðleika annars vegar og útbreiðslu vegna voldugra samskiptatækja hins vegar.

Eins og um öll menningarleg fyrirbæri getum við spurt: Hver eru lögmálin um þróun menningarinnar? Hvað skiptir mestu máli? Hver ákveður, hvað skipti mestu máli? Í því einu að ákveða, hvað skipti máli, er fólgið virkilegt vald.

Fegurð stærðfræðinnar er grundvallareinkenni og er mikilvæg frá ýmsum sjónarhornum. Eins og í listum hefur hún gildi vegna sjálfrar sín. En það er fleira. Hún er hraðasti leiðarvísirinn í hinu eilífa vali milli hinna ólíku forma, sem kenning í mótun getur tekið á sig.

Stærðfræði hefur áhrif á það, hvernig við skynjum heiminn; menn hafa jafnvel annað tungumál í þeim greinum vísinda, sem mest nota stærðfræði. Fram til þessa hafði hún mjög svo skipuleggjandi hlutverk: með því að tryggja okkur, að heimurinn einkenndist ekki af handahófi og ringulreið, heldur væri skipulegur og fyrirsjáanlegur. Tilhneigingin til að spá (um veður og myrkva himintungla) var reyndar mikilvæg hvatning til að skapa stærðfræði. En einnig óreiðan á sína stærðfræði! Stærðfræði mótar sannarlega heimsmynd okkar. En að hvaða marki?

Stærðfræði hefur einnig áhrif á hug okkar. Andstætt tölvunni verður mannsheilinn fyrir áhrifum og breytingum af starfi því, sem hann vinnur, að minnsta kosti framan af ævi, eins og tæki, sem endurnýjar sig sjálft meðan það starfar. Tungumálin og hvers kyns vitsmunaleg viðfangsefni hins unga heila hafa áhrif á þróun hans. Þeim mun mikilvægara er það að velja góð viðfangsefni. Og ef við getum leyst vandamál og losað okkur úr erfiðleikum, er það vinningur fyrir sjálfsímyndina. Þannig getur stærðfræði byggt upp sjálfstraust okkar, ef okkur heppnast — eða eytt því, ef okkur misheppnast.

Allt þetta sýnir, hversu feikna mikilvægt það er að skapa sem best stærðfræðiumhverfi, einkum þó fyrstu æviárin.

Heimildir

1. Freeman J. Dyson, *Mathematics in the physical sciences*, birt í *Mathematics in the Modern World*, W. H. Freeman, 1968, bls. 249–257.
2. ——————, *Missed opportunities*, Bulletin of the American Mathematical Society **78** (1972), 635–652.
3. David Hilbert, *Sur les problèmes futurs des Mathématiques*, birt í *Compte rendu du deuxième Congrès International des Mathématiciens*, Gauthiers-Villars, 1902, bls. 58–114.
4. Leslie A. White, *The locus of mathematical reality: An anthropological footnote*, birt í J. R. Newman (ritstj.), *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, 1956, bls. 2348–2364.
5. Eugene P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the physical sciences*, Communications on Pure and Applied Mathematics **13** (1960), 1–14.
6. Raymond L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press, 1981.

FERMAT

Merkasta fréttin úr heimi stærðfræði um langt skeið er næsta fyrirferðarlítil í þessu *Fréttabréfi*. Fréttin um að búið væri að sanna *síðustu setningu Fermats* fór sem eldur í sinu um gjörvalla heimsbyggðina í fyrrasumar.

Í júní flutti *Andrew Wiles* þrjá fyrirlestra á Newton-stofnuninni í Cambridge og tilkynnti í lok hins síðasta, að hann hefði sannað tilgátu þá í algebrulegri rúmfræði, sem kennd er við *Taniyama* og *Shimura*, en fyrir liggur, að hún gefur síðustu setningu Fermats af sér.

Endanleg staðfesting á, að sönnun á „setningu Fermats" væri hér loksins komin, lét svo á sér standa, og nokkru fyrir áramót birti Wiles yfirlýsingu um að við nákvæma yfirferð hefðu ýmsir örðugleikar komið í ljós. Tekizt hefði að yfirstíga flesta þeirra, en sér í lagi eitt atriði væri óleyst. Að verkinu er unnið, en ekki er enn vitað til, að rætzt hafi úr.

Úr því sem komið er, er þess kannski vart að vænta, að ný tíðindi, hver svo sem þau verða, berist af þessu fyrr en í fyrsta lagi í Zürich — sjá þar um á næstu síðu.

RÁÐSTEFNUR Á NÆSTUNNI

Hér verður getið um fáeinar ráðstefnur, sem haldnar verða á næstunni og sérstök ástæða er til að vekja athygli á.

Nú á miðju sumri, nánar tiltekið dagana 18.–23. júlí, verður *Alþjóðaþing í stærðfræðilegri eðlisfræði* haldið í París. Þetta er hið ellefta í röðinni, hið fyrsta var haldið í Moskvu 1972, en hin síðustu voru í Leipzig fyrir þremur árum og áður í Swansea og Marseille. Meðal aðalfyrirlesara að þessu sinni verður einn Íslendingur, Jakob Yngvason.

Nokkru síðar eða dagana 3.–11. ágúst verður svo *Alþjóðaþing stærðfræðinga* haldið í Zürich í Sviss. Slík þing hafa um langt skeið yfirleitt verið haldin á fjögurra ára fresti, hin síðustu voru í Kyoto í Japan 1990 og í Berkeley í Bandaríkjunum 1986. Þetta verður í þriðja sinn, sem alþjóðaþing stærðfræðinga er haldið í Zürich, því hið fyrsta í röðinni var einmitt haldið þar fyrir 97 árum og svo var það einnig þar 1932.

Að venju verða Fields-verðlaunin veitt fyrsta dag þingsins og einnig þau, sem kennd eru við Rolf Nevanlinna. Alls verða fluttir 16 fyrirlestrar í sameinuðu þinginu auk fjölda fyrirlestra í mörgum samhliða röðum. Svo sem dagskrá liggur nú fyrir er síðasti aðalfyrirlesturinn fyrir þingslit kynntur með svofelldum hætti:

Andrew Wiles, Princeton-háskóla: *heiti fyrirlestrar liggur ekki fyrir*

og fær enginn annar slíka kynningu. Ætli Fermat bíði þess ekki í ofvæni að heyra, hvað þar verður til tíðinda?

Dagana 15.–19. ágúst verður haldin í Reykjavík *norræn málstofa í reikniefnafræði*, en þar er fjallað um beitingu á tölfræði og stærðfræði við beztun á tilraunaskilyrðum og við úrvinnslu gagna í efnafræði. Einn félagsmaður verður þar meðal fyrirlesara, Agnar Höskuldsson, sem starfar við Danmarks Ingeniørakademi. Hann verður eini íslenzki fyrirlesarinn og annast jafnframt um málstofuna. Íslenzkum tölfræðingum og efnafræðingum er velkomið að taka þátt í málstofunni og veitir Agnar nánari upplýsingar; netfang hans er ah@m.dia.dk og bréfsími 45 45 931577.

Dagana 2.–6. september verður *norræn ráðstefna um stærðfræðikennslu* haldin í Lahti í Finnlandi, en að henni stendur rannsóknar- og þjálfunarstöð Helsinki-háskóla í Lahti.

Guðmundur Arnlaugsson:

ÁVARP Á FERTUGSAFMÆLI ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGSINS

Fertugsafmælis Íslenzka stærðfræðafélagsins laugardaginn 31. október 1987 var minnzt með því að félagsmönnum var boðið í síðdegiskaffi í Veitingahöllinni í Kringlumýri, en þangað var haldið að loknum félagsfundi vestur í Háskóla, þar sem formaður félagsins, Halldór I. Elíasson, hafði flutt fyrirlestur um áhrif af snúningi jarðar á úthafsöldur.

Undir borðum á afmælisfundinum flutti Guðmundur Arnlaugsson ávarp, þar sem hann rifjaði upp atriði úr sögu félagsins, einkum frá fyrstu tíð þess. Í ávarpinu studdist hann við minnisatriði, sem hann hafði þá hripað á blað en hefur nú fyllt upp í, svo að líkist hinum munnlega flutningi. Liðið er hátt á sjöunda ár frá því að afmælisávarpið var flutt, en höfundur hefur góðfúslega heimilað, að það verði birt hér í Fréttabréfi.

Áður hafði tveggja stórafmæla félagsins verið minnzt, árin 1972 og 1977, og var því svo hagað þá, að aðalfundur félagsins var haldinn sjálfan afmælisdaginn. Í fyrra skiptið las Sigurkarl Stefánsson hina frægu grein Ólafs Daníelssonar, Húmaníóra, en síðan snæddu menn saman kvöldverð á Hótel Holti. Í seinna skiptið var fundi haldið áfram um kvöldið í Þingholti, en undir borðum þar flutti Sigurkarl erindi í aldarminningu dr. Ólafs um ævi hans og starf.

Ávarp Guðmundar Arnlaugssonar frá árinu 1987 fer hér á eftir.

Ritstj.

Fram til 1947 áttu íslenskir áhugamenn um stærðfræði sér engan félagsskap. Flestir þeirra voru félagar í Verkfræðingafélagi Íslands og birtu sumir greinar um stærðfræðileg efni í tímariti þess, en engu að síður lék ýmsum hugur á að stofna sérstakt félag þar sem áhugamenn gætu komið saman og rabbað um hugðarefni sín, flutt erindi og sagt frá því sem þeir væru að fást við.

Árið 1947 varð doktor Ólafur Dan Daníelsson sjötugur. Marga gamla nemendur hans, er höfðu lagt fyrir sig einhverjar greinar raunvísinda, og aðra áhugamenn um stærðfræði langaði til að gleðja hann á þessum merkisdegi. Það varð úr að gera tvennt í senn: sýna doktor Ólafi verðugan virðingarvott og stofna þann félagsskap, er mönnum var hugleikinn, á heimili hans sjálfan afmælisdaginn.

Ætlunin er að segja nokkra þætti úr bernskusögu þessa félagsskapar, ég styðst hér við eigið minni og punkta Leifs Ásgeirssonar, en hann hefur skrifað hjá sér nokkur atriði frá stofnun félagsins og fyrstu árum þess.

29. október 1947: Undirbúningsfundur að stofnun stærðfræðafélags haldinn í Menntaskólanum í Reykjavík. Leifi Ásgeirssyni falið að ávarpa Ólaf Dan í afmælishófi hans.

31. október 1947: Menn hittast í Menntaskólanum og greiða 100 kr. hver. Þaðan er haldið í afmælishóf Ólafs á Miklubraut 11. Leifur flytur ávarp og félagið er stofnað.

Stofnendur félagsins voru eftirtaldir menn:

Dr. Ólafur Dan Daníelsson,
Árni Björnsson tryggingafræðingur,
Björn Bjarnason menntaskólakennari,
Bolli Thoroddsen bæjarverkfræðingur,
Brynjólfur Stefánsson tryggingafræðingur,
Guðmundur Arnlaugsson menntaskólakennari,
Kr. Guðmundur Guðmundsson tryggingafræðingur,
Gunnar Böðvarsson verkfræðingur,
Leifur Ásgeirsson prófessor,
Sigurkarl Stefánsson menntaskólakennari,
Steinþór Sigurðsson stjarnfræðingur,
Trausti Einarsson prófessor,
Þorbjörn Sigurgeirsson eðlisfræðingur,
Þorkell Þorkelsson veðurstofustjóri.

Auk þessara fjórtán var litið á Svein Þórðarson, síðar skólameistara að Laugarvatni, sem stofnanda. Hann kom ekki á stofnfundinn og ritaði ekki nafn sitt í fyrsta félagatalið, enda var hann þá menntaskólakennari á Akureyri.

Af þessum fjórtán voru fimm er höfðu valið stærðfræði sem aðalgrein á háskólaprófi, þrír voru tryggingafræðingar, tveir eðlisfræðingar, tveir stjörnufræðingar og tveir verkfræðingar.

Að ráði Leifs Ásgeirssonar var félaginu valið nafnið *Íslenzka stærðfræðafélagið*. Fleirtölunni var ætlað að leggja áherslu á það, að í félaginu væri vítt til veggja, þar væri rúm fyrir allar greinar stærðfræðinnar, „hagnýtar“ sem „óhagnýtar“. Að öðru leyti var að því stefnt að hafa allt eins einfalt og óbundið og unnt var. Ekki var kosin nein formleg stjórn, en tveir menn valdir til þess að „sjá um næstu fundi“, og voru Leifur og Sigurkarl kjörnir til þess. Menn höfðu skotið saman í fyrstu gjörðabók félagsins, en eigi skyldi vera neitt árgjald fyrst um sinn. Fundir voru haldnir í kennslustofu í Menntaskólanum í Reykjavík og varð stofan á annarri hæð í suðvesturhorni skólahússins fyrir valinu, en þar var þá aðsetur stærðfræðideildar efsta bekkjar skólans og þar var geymd höfuðmynd doktor Ólafs mótuð í eir.

Á öðrum degi eftir stofnun félagsins féll einn stofnendanna frá með sviplegum hætti. Það var Steinþór Sigurðsson, en hann varð fyrir steini er hann var í Hekluhlíðum að rannsaka eldgos í fjallinu. Steinþór hafði verið framkvæmdastjóri Rannsóknaráðs og tók nú annar maður úr félaginu við starfi hans: Þorbjörn Sigurgeirsson.

16. desember var svo fyrsti reglulegi fundur félagsins haldinn. Þar flutti Ólafur Dan erindi um hring þann sem er umritaður um utanverða snertihringa þríhyrnings og reiknaði geisla hans miðað við geisla innritaða hringsins og hálft ummál þríhyrningsins:

$$\varrho = \frac{r^2 + s^2}{4r}$$

Annar fundur félagsins var svo haldinn 3. febrúar 1948. Þar flutti doktor Þorkell Þorkelsson, veðurstofustjóri, erindi um „operationsreikning“. Að mig minnir bauð hann fundargestum til kaffidrykkju að erindinu loknu og var það vel þegið. En mönnum fannst ekki við hæfi að fyrirlesarar legðu eftirleiðis meira af mörkum en erindi sitt og komst því sú regla á, að kaffi var keypt hjá húsvarðarhjónunum í Menntaskólanum og greiddi hver fundargestur fyrir sig.

Nú verða eigi raktir fleiri fundir að sinni, enda mun hægt að finna þá í gjörðabók félagsins. En nokkur atriði verða talin eftir minni.

Eins og fyrr er getið voru Leifur og Sigurkarl valdir til þess að sjá um fundi félagsins. Björn og Brynjólfur tóku við þessu starfi af þeim. En árið 1952 eru þeir nafnar Guðmundarnir í þessu hlutverki. Þá gerast þau tíðindi að stofnað er til tveggja norrænna tímarita um stærðfræði: *Mathematica Scandinavica* og *Nordisk Matematisk Tidskrift*. Félagið studdi vel við bakið á þessum ritum og voru þeir Leifur og Sigurkarl kjörnir í ritstjórnir þeirra.

Á því sama ári var stærðfræðingurinn Vilhjálmur Ögmundsson bóndi á Narfeyri boðinn velkominn í félagið. Gumundur Arnlaugsson ritaði honum bréf þess efnis og þakkaði Vilhjálmur hjartanlega. Greinilegt var, að honum þótti vænt um boðið. Hann kom nokkrum sinnum á fundi þegar hann gat komið því við og flutti eitt erindi um rannsóknir sínar árið 1953. Jafnframt léði hann félaginu stílabækur sem hann hafði skrifað í greinar um rannsóknir sínar. Voru þær vandlega skoðaðar og urðu grundvöllur greina í erlendum stærðfræðitímaritum.

Ekki varð hjá því komist, að félagið yrði formlegra eftir því sem árin liðu. Árið 1954 er skipuð stjórn þriggja manna og árið 1956 er verkum skipt í stjórninni: formaður, gjaldkeri og ritari. Nokkur útgjöld urðu vegna tímaritanna og annarra framkvæmda og var þá sótt um styrk til Háskólaráðs og síðar til fjárveitinganefndar Alþingis. Það voru einkum tveir menn sem beittu sér í þessum málum með góðum árangri: Leifur Ásgeirsson og Kr. Guðmundur Guðmundsson.

Árið 1955 var Ólafur Daníelsson kjörinn heiðursfélagi, hinn fyrsti er sá heiður var sýndur. Næstur í röðinni var Leifur Ásgeirsson er var kjörinn heiðursfélagi á sjötugsafmæli sínu árið 1973. Þá var jafnframt stofnaður afmælissjóður Leifs Ásgeirssonar. Rætt var um að stofna *Sumarstofnun í stærðfræði* er annaðist námskeiðahald og fyrirlestra erlendra fræðimanna í sumarleyfum, en ekki man ég til að sú stofnun kæmist á rekspöl.

Snemma á árum félagsins var um það rætt, að fá erlenda fræðimenn til fyrirlestrahalds, ef þeir gistu í Reykjavík á leið sinni vestur eða vestan um haf, því að ekki hafði félagið bolmagn til að bjóða mönnum hingað frá meginlandi Evrópu eða Ameríku. Þetta tókst nokkrum sinnum.

Skipulegt samstarf við erlenda aðila hófst 1952 þegar félagið ákvað að taka þátt í útgáfu norrænu tímaritanna eins og fyrr er getið. Það tókst vel og er rétt að minna á dugnað Sigurkarls Stefánssonar ritstjóra, en hann safnaði áskrifendum hér, einkum í hópi verkfræðinga. Miðað við höfðatölu náði þetta tímarit miklu meiri útbreiðslu hér en hjá grannþjóðunum. Árið 1953 var gerður gagnkvæmur samningur við *Bandaríska stærðfræði-*

félagið en samsvarandi samningur við *Ástralska stærðfræðifélagið* árið 1961. Árið 1954 gekk félagið í *Alþjóðasamband stærðfræðinga.*

Árið 1960 er sextugasti fundur félagsins haldinn. Rúm tólf ár voru þá liðin frá stofnun þess og svarar þetta til að um fimm fundir hafi verið haldnir á ári að jafnaði.

Eins og áður er getið voru fundir félagsins haldnir í hinu gamla húsi Menntaskólans í Reykjavík mörg fyrstu árin. En 1966 var hið nýja hús Raunvísindastofnunar Háskólans risið af grunni og voru fundir þá fluttir þangað. Þetta var eðlileg breyting, ýmsir stofnendanna voru fallnir frá en bæst hafði í hópinn heill flokkur ungra vísindamanna er störfuðu við Háskólann. Sá siður hefur haldist frá öndverðu að menn spjalli yfir kaffibolla áður en erindi hefst, en nú er það á kostnað félagsins, enda greiða menn nokkurt árgjald til þess.

Árið 1966 gekkst félagið fyrir röð fyrirlestra, tíu alls, um líkindareikning. Áhugi var mikill, 45 manns sóttu fyrsta fyrirlesturinn og rúmlega 20 héldu út til loka.

Árið 1983 voru haldnir tveir hátíðarfundir í tilefni af áttræðisafmæli Leifs Ásgeirssonar.

Árið 1984 var haldið norrænt stærðfræðingaþing í Reykjavík. Félagið réði Jón Ragnar Stefánsson framkvæmdastjóra þess og annaðist hann alla skipulagningu og framkvæmdir með miklum ágætum. Hann sá einnig um útgáfu veglegs rits um þingið.

Um langt árabil hefur félagið annast bókaverðlaun til þeirra nýstúdenta er náð hafa frábærum árangri í stærðfræði á stúdentsprófi. Mig minnir að þetta hafi fyrst verið gert í stjórnartíð okkar Kr. Guðmundar Guðmundssonar árið 1952. Til að fjármagna þessi verðlaun var framan af leitað til verkfræðistofa og annarra fyrirtækja er nýta sér stærðfræðilega menntun og brugðust þau yfirleitt vel við þeirri málaleitun.

ERLENDAR ANDLÁTSFREGNIR

Franski stærðfræðingurinn *Jean Dieudonné*, víðkunnur rithöfundur undir eigin nafni svo og ásamt öðrum undir höfundarheitinu *Nicolas Bourbaki*, lézt 26. nóvember 1992 á 87. aldursári.

Max Zorn, sá sem *hjálparsetning Zorns* er kennd við, lézt 9. marz 1993 á 87. aldursári. Hann var þýzkur en flýði heimaland sitt til Bandaríkjanna árið 1933. Þrátt fyrir nafngiftina er *hjálparsetning Zorns*,

Raðað mengi hefur hástak, ef sérhver keðja í því á sér efra mark.

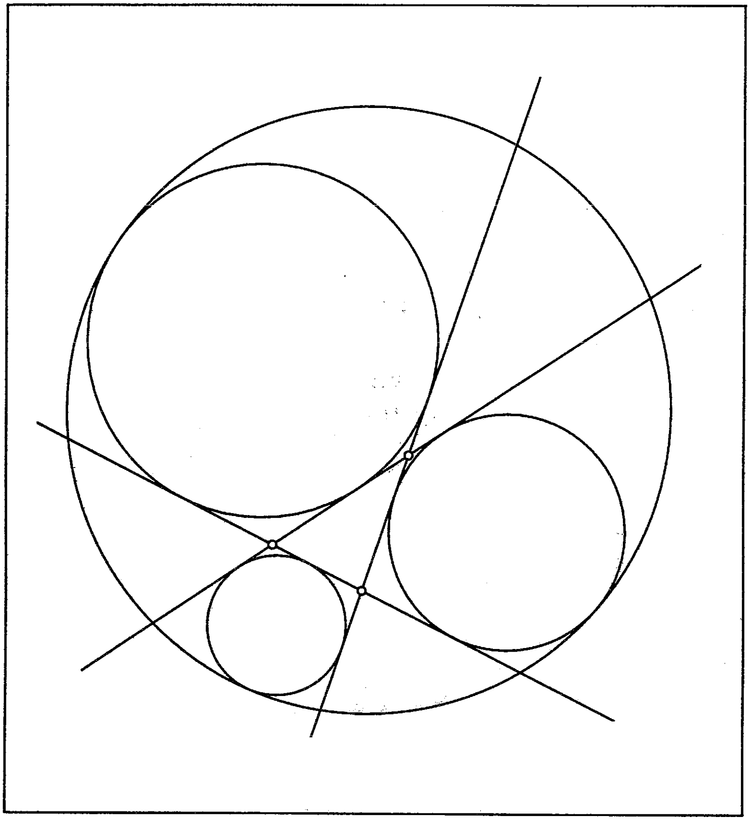
sem kunnugt er ein af frumsetningum mengjafræði, jafngild bæði valfrumsetningunni og velröðunarsetningunni. Grein Zorns um þetta efni birtist 1935, en eina gerð af þessari „hjálparsetningu" má finna í fyrstu útgáfu af *Mengenlehre* eftir Hausdorff frá 1914.

Børge Jessen lézt 20. marz 1993 hálfníræður að aldri. Hann lauk meistaraprófi í stærðfræði við Hafnarháskóla einungis 22 ára að aldri og varði doktorsritgerð sína árið eftir. Hann varð prófessor við Verkfræðiháskólann í Höfn 28 ára og var síðan prófessor við Hafnarháskóla frá 1942 til 1977. Hann var heiðursfélagi Danska stærðfræðifélagsins. Það félag veitir verðlaun fyrir meistaralega vel flutta fyrirlestra og eru þau við hann kennd í virðingarskyni, en svo sem margir félagsmenn okkar félags kynntust af eigin raun var Jessen sannkallaður meistari á því sviði.

Henrik H. Martens prófessor í stærðfræði við háskólann í Þrándheimi lézt 12. október 1993 66 ára að aldri. Hann kom hingað til lands 1984 og var svo fjórum árum síðar í forystu fyrir 20. norræna stærðfræðingaþinginu í sínum heimabæ.

Lipman Bers fyrrum prófessor við Columbia-háskólann í New York lézt 29. október 1993 á áttugasta aldursári.

Janakiammal Ramanujan, ekkja hins fræga indverska stærðfræðings *Srinivasa Ramanujans*, er látin í Madras á Indlandi 94 ára að aldri. Þau giftust sumarið 1909, þegar hún var níu ára gömul, en fyrir æsku hennar sakir hófst sambúð þeirra ekki fyrr en árið 1912. Maður hennar lézt sem kunnugt er árið 1920 eftir þriggja ára veikindi. Ofurmannleg snilligáfa hans er mönnum enn jafn mikil ráðgáta og þegar kynni Hardys af honum hófust með fyrsta bréfinu frá Madras 16. janúar 1913.



Íslenzka stærðfræðafélagið
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Fjölritunarstofa
Daníels Halldórssonar