# FRÉTTABRÉF

# ÍSLENZKA STÆRÐFRÆÐAFÉLAGSINS

**1. tbl. 7. árg.** **Júlí 1995**

*Cubum autem in duos cubos,*
*aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos,*
*et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum*
*potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere:*
*cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi.*
*Hanc marginis exiguitas non caperet.*

**Fréttabréf Íslenzka stærðfræðafélagsins**

*Ritstjóri:* Jón Ragnar Stefánsson

*Stjórn Íslenzka stærðfræðafélagsins:*
Jón I. Magnússon, *formaður*
Rögnvaldur G. Möller, *gjaldkeri*
Lárus H. Bjarnason, *ritari*

*Póstfang:*
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

**Efni**



**Á forsíðu** er franski stærðfræðingurinn *Pierre de Fermat* ásamt þeirri athugasemd, sem hann ritaði á bókarspássíu eina um 1637 og í hartnær hálfa fjórðu öld hefur verið heillandi viðfangsefni jafnt lærðra stærðfræðinga sem leikra. Svo einföld í framsetningu sem hún er og auðskilin hverju mannsbarni hefur *síðasta setning Fermats* allan þann tíma verið ósönnuð staðhæfing. En í lok tuttugustu aldar er svo komið, að hver kynslóð stærðfræðinga af annarri hefur lyft hugarheimi stærðfræðinnar á það stig, að með ólýsanlegu innsæi og einstæðri snilli hefur mannshugur getað smíðað búnað til að sanna þessa staðhæfingu.

**Á baksíðu** sést, að *síðasta setning Fermats* er loks orðin að *setningu, setningu Wiles.* Við kunnum ekki að rekja sönnunina, en við kynnumst því hér í *Fréttabréfi*, hvernig *Andrew Wiles* tókst að bjarga sönnun sinni eftir að svo virtist um skeið, að hætta væri á, að hann mundi bætast í hóp þeirra mörgu, sem hafa séð sannanir sínar hrynja.

## AF EFNI BLAÐSINS

Sem fyrr flytur *Fréttabréf* margvíslegar fregnir úr heimi stærðfræðinnar og af stærðfræðingum. Og sem fyrr hefur liðið býsna langur tími frá því að síðasta tölublað kom út, og eru félagsmenn því hvattir til að leggja til efni, svo að fjölbreytileiki njóti sín á síðum blaðsins.

Í lengstu greininni í þessu *Fréttabréfi* leiðir *Einar H. Guðmundsson* lesandann með sér aftur á 18. öld og flytur frá Hólum til Hafnar. Merku ævistarfi fjölhæfs manns, *Stefáns Björnssonar reiknimeistara*, eru hér gerð ítarleg skil, og er einkar athyglisvert að sjá, hversu ötull hann var enn í fræðum sínum kominn á áttræðisaldur.

Flatarmyndafræði hefur skipað veglegan sess hér á þessum síðum og er svo enn. Ánægjulegt er að sjá, hvernig efni í fyrri tölublöðum vekur upp nýtt efni. *Skarphéðinn Pálmason* sannar snotra setningu um *úthringinn*, sem komst á dagskrá í síðasta *Fréttabréfi*. Þar kom fram, að dr. Ólafur Daníelsson ákvarðaði geisla hans á fyrsta félagsfundi eftir stofnun *Íslenzka stærðfræðafélagsins* árið 1947. Og níupunkta hringurinn og setning Feuerbachs koma hér enn við sögu, en þetta efni hafði verið dr. Ólafi hugleikið svo sem fram kemur í greinum hans frá 1940 og 1945. En það var svo óvænt uppgötvun, að einungis 22 ára gamall skrifaði hann tímaritsgrein einmitt um þetta sama efni: *Et Bevis for Sætningen om Nipunktscirklen i dens projektive Form* (*Nyt Tidsskrift for Matematik* 1900 B, bls. 41–42). Þessa er hér getið til fróðleiks til að sýna, að íslenzk umfjöllun um þetta fallega efni stendur á gömlum merg.

Tækifærið er hér notað til að þakka *Sverri Erni Þorvaldssyni* aðstoð við teikningar í undanfarandi tölublöð. Þegar hann var beðinn um að teikna baksíðumyndina af úthringnum í síðasta tölublaði, dró hann úr pússi sínu forvitnilega bók um rúmfræðidæmi úr japönskum hofum, sem svo var sagt frá í tengslum við þá mynd. Skarphéðinn Pálmason fékk svo bókina lánaða og kemur hún við sögu í grein hans.

Enn er grein í tengslum við gamalt íslenzkt efni. Þar segir *Jón Ragnar Stefánsson* frá 35 ára gamalli grein eftir *Kr. Guðmund Guðmundsson* í *Nordisk Matematisk Tidskrift* um stærðfræðilegt viðfangsefni úr íslenzkri skattalöggjöf og eykur síðan við umfjöllun hans.

Annað efni í þessu tölublaði er svo af blönduðu tagi að vanda.

*Jón Ragnar Stefánsson:*

# SÖNNUN Á SÍÐUSTU SETNINGU FERMATS

*En þríveldi í tvö þríveldi, eða fjórveldi í tvö fjórveldi, og almennt upp í óendanleika verður engu veldi utan tvíveldi skipt í tvö með hinu sama nafni; á þessu hef ég sannlega fundið dásamlega sönnun. Mjó spássían rúmar hana ekki.*

Þetta eru hin fleygu orð, sem *Pierre de Fermat* (1601–1665) ritaði á spássíu í eintak sitt af bókinni *Ariþmetika* eftir *Díófantos frá Alexandríu*, en á síðunni þar til hliðar var dæmi um *Pýþagórasar-tölur*, þar sem tvíveldi (ferningstölu) er einmitt skipt í tvö tvíveldi. Þetta mun hafa verið um 1637. Leitin að sönnuninni hefur staðið yfir öldum saman.

Í síðasta *Fréttabréfi* (bls. 44) sögðum við stuttlega nýjustu tíðindi af *sönnuninni á síðustu setningu Fermats*, en þá ríkti full óvissa um afdrif hennar.

Sumarið 1993 spurðist það út með skjótum hætti, og var alls ekki bundið við samfélag stærðfræðinga, að búið væri að sanna hina aldagömlu staðhæfingu Fermats. Seinni hluta júnímánaðar það sumar flutti enskur stærðfræðingur, *Andrew Wiles*, prófessor við Princeton-háskóla í Bandaríkjunum, þrjá fyrirlestra á Newton-stofnuninni í Cambridge undir heitinu *Mátform, sporgerir ferlar og Galois-framsetningar*. Í lok fyrsta fyrirlestrarins fundu menn á sér, að hér væri markvert efni á ferðinni, og *„okkur renndi í grun um, á hvaða mið hann stefndi. Svo fór hver að líta annan undrunaraugum“*, sagði *Nigel Boston*, sem var gestkomandi á stofnuninni. En án þess að fyrirlesarinn hefði frekar boðað það áður, skráði hann á töfluna í lok síðasta fyrirlestrarins sem hina síðustu setningu eftirfarandi:

*Um sérhverja frumtölu $p$ og sérhverjar ræðar tölur $u$, $v$ og $w$ gildir, að ef*

$$u^p + v^p + w^p = 0,$$

*þá er $uvw = 0$.*

Að svo búnu lýsti hann yfir, að með þeim aðferðum, sem hann hefði kynnt í fyrirlestrunum, gæti hann sannað síðustu setningu Fermats, sem vitaskuld er jafngild þessari. Fagnaðarlæti glumdu við og menn ruku í síma og tölvupóst til að breiða út tíðindin. Þetta var hinn 23. júní 1993 og fréttin komst strax á forsíðu heimsblaðannna, þar á meðal bæði *New York Times* og *Morgunblaðsins.*

Auðvitað var skammt að minnast þess, að fram hafði komið sönnun á setningu Fermats, en nokkru síðar fannst í henni villa, sem kippti fótum undan henni. Það var í febrúarlok 1988, að japanski stærðfræðingurinn *Yoichi Miyaoka* kynnti sönnun í fyrirlestri á Max-Planck-stofnuninni í Bonn. En í þetta sinn vildu menn trúa öðru. *„Wiles hefur á sér afbragðsgott orð á þessu sviði. Hann er varkár og vinnur skipulega og ákaflega vel. Og hann kynnti afar fallegar sannanir.“* Svo mælti *Kenneth Ribet* frá Berkeley, sem skrifað hefur ítarlega kynningu á sönnuninni. Raunar er Ribet einmitt sá, sem sannaði árið 1986, að tilgáta sú frá árunum 1962–64 um sporgera ferla, sem kennd er við *Taniyama* og *Shimura* (og enn mun ósönnuð í heild sinni), gæfi síðustu setningu Fermats af sér. Glíman við Fermat varð að glímu við þessa tilgátu.

Það lét svo á sér standa, að fram kæmi endanleg staðfesting á, að sönnun á setningu Fermats væri hér loksins komin. Wiles fór gætilega með handrit sitt, sem var afhent *Inventiones Mathematicae* til birtingar, og gerði það ekki opinbert, en valdir menn voru fengnir til að kryfja það til mergjar. Þeir sem utan við stóðu, gerðust óþreyjufullir. Hinn 4. desember það ár gaf Wiles svo út yfirlýsingu um, að nánar tilgreindir reikningar í sönnun hans *„væru enn ófullkomnir svo sem þeir þar standa.“* Þessi veila reyndist vera svo alvarleg, að hún olli því, að afturkölluð var fregnin um, að „setningin“ hefði verið sönnuð, því *„ófullkomin sönnun er alls engin sönnun“* eins og nú var haft eftir Kenneth Ribet. En fjarri fer, að gera megi lítið úr verki Wiles eins og það var á þessu stigi, þótt síðasta setning Fermats hafi þá enn verið ósönnuð, því þar var ákaflega markvert framlag til talnafræði.

Síðastliðið sumar var það enn með öllu óljóst, hvort Wiles tækist að bæta verk sitt. Þess var þá beðið með eftirvæntingu, hvort þetta mál skýrðist á *Alþjóðaþingi stærðfræðinga* í Zürich, sem þá var framundan fyrri hluta ágústmánaðar, en boðað var, að Wiles yrði þar síðasti fyrirlesarinn, og var heiti fyrirlestrarins — þegar það loksins lá fyrir: *Mátform og sporgerir ferlar.* Hinn mikli salur í *Zürich Kongresshaus* var þéttskipaður og var fyrirlesarinn ljósmyndaður óspart af áheyrendum, sem gátu átt von á, að þar yrðu flutt tíðindi. Svo fór ekki, en Wiles gerði skýra grein fyrir stöðu mála og vakti með varfærnum málflutningi sínum þá trú með áheyrendum, að endanleg lausn kynni að vera skammt undan. En um það fullyrti hann ekkert.

Opinberlega gerðist svo ekkert í málinu fyrr en í haust, en hinn 25. október lét Wiles frá sér handrit að tveimur greinum, þar sem því var lýst, að sönnun væri lokið. Önnur greinin, sem er löng og nefnist *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, inniheldur meðal annars efnis sjálfa sönnunina á síðustu setningu Fermats, en hin greinin, sem er stutt og nefnist *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, er skrifuð ásamt *Richard Taylor* frá Cambridge-háskóla á Englandi og inniheldur lykilatriði, sem Wiles reyndist þurfa á að halda í sönnun sinni. Greinarnar voru sendar til birtingar í *Annals of Mathematics.*

Fyrrnefndan dag, 25. október, gaf talnafræðingurinn *Karl Rubin* þá yfirlýsingu í tölvuskeyti, sem þá fór út um víðan völl, að *„ástæða sé til bjartsýni, þótt hyggilegt sé að vera varkár enn um sinn."* Undanfarna mánuði hefur vitaskuld verið unnið ötullega að nákvæmri yfirferð, og er ekki vitað til, að til þessa hafi neitt komið fram um, að brigður séu bornar á verkið.

Þegar Wiles sjálfum varð það ljóst haustið 1993, að sönnun lá alls ekki fyrir, var úr vöndu að ráða fyrir hann. Hann hafði hrifizt af þessari heillandi „setningu" frá barnsaldri. Raunar var það einmitt hennar vegna, að hann tók að leggja fyrir sig stærðfræði. Hann var orðinn fertugur að aldri og undanförnum sjö árum hafði hann varið til að glíma við verkefnið, án þess að láta uppskátt um það nema í þröngum hópi fyrr en yfirlýsingin var gefin í Cambridge. Hann glímdi nú án árangurs, lagðist undir feld og lét engan trufla sig, svo að hann gæti einbeitt sér til fulls. Eftir langa yfirvegun ákvað hann svo að leita eftir aðstoð. Hann vildi hins vegar ráða ferðinni og fá einhvern, sem hann gæti rætt við út frá sínum sjónarhóli, en vildi ekki mann, sem væri uppfullur af nýjum og óskyldum aðferðum. Því var það, að hann kallaði til sín til Princeton Richard Taylor, fyrrum stúdent sinn, sem þá var starfandi í Cambridge, og hófst samstarf þeirra í janúar í fyrra. Taylor er liðlega þrítugur og varð hann undrandi og eftirvæntingarfullur, þegar Wiles leitaði til hans. Hann lýsir þeim svo, að Wiles *„hafi feikilega gott innsæi"*, en hann sjálfur sé hins vegar *„náungi, sem er meira gefinn fyrir smáatriðin."*

Wiles og Taylor reyndu lengi án árangurs að glíma við endurbætur á því atriði, sem brást. Wiles hafði á sínum tíma fundizt, að einmitt þar stæði hann á veikustum grunni. Þar hafði hann notað nýjar og flóknar aðferðir, sem hann hefði kynnzt árið 1991 í forpreiti frá *Matthias Flach* í Princeton, en hann hafði ekki verið fyllilega sáttur við beitingu sína á þeim. Um sumarið reyndu þeir fyrir sér með nýjum hætti, en Wiles fannst ólíklegt, að það bæri árangur. Svo stakk Taylor upp á, að þeir reyndu enn á ný við aðferð Flachs, en Wiles var tregur til og sagði síðar: *„Ég játa, að á þessum tíma fannst mér, að taka þyrfti allt verkið nýjum tökum, og að það mundi standa árum saman og margir þyrftu að koma að því.“*

En hann sneri sér enn að aðferð Flachs. *„Það var tilbrigði í upphaflegri röksemdafærslu, sem ég hafði sannfært mig um, að gengi ekki, en ég var ekki búinn að sannfæra Taylor um það“*, sagði Wiles. *„Og svo sat ég morgunn einn við skrifborðið og reyndi að fá það á hreint, hvers vegna þessi aðferð Flachs virkaði ekki, þegar ég sá í einni svipan, að einmitt það, sem olli því, að hún virkaði ekki, var nákvæmlega það, sem ætti að valda því, að önnur aðferð mundi virka, sem ég hafði reynt þremur árum fyrr. Þetta var með öllu óvænt og í rauninni ótrúlegt.“*

Wiles reyndi að hafa stjórn á gleði sinni, en hann kvaðst hafa verið í of miklu uppnámi til að hann gæti hugsað skýrt. Hann lét daginn líða, svaf á þessu og hringdi til Taylors morguninn eftir, en hann var þá kominn aftur til Englands. Þeir störfuðu svo saman af ákefð og hálfri þriðju viku síðar lá fyrir sameiginleg grein þeirra, þar sem fyllt er upp í þá gloppu, sem var á sönnun Wiles.

Svo virðist sem Wiles muni einn hljóta heiðurinn af því að hafa sannað síðustu setningu Fermats, því hann einn er höfundur þeirrar aðalgreinar, sem inniheldur sönnunina að mestu, og það var hans hugmynd, sem varð til þess, að gloppan var fyllt. Enda þótt ljóst sé, að Taylor veitti mikilvæga aðstoð, segist hann vera ásáttur við það, hvernig hlutur Wiles í samvinnu þeirra er metinn. Þegar sönnuninni var lýst varfærnislega þannig, að um sé að ræða setningu Wiles, sem Taylor og Wiles hafi fullkomnað, kvaðst Wiles vera samþykkur þeirri lýsingu.[1]

[1] Frásögn þessi er byggð á ýmsum kynningargreinum í stærðfræðitímaritum að undanförnu, en að auki var leitað fanga í grein í *New York Times* í desember í vetur.

*Einar H. Guðmundsson:*

# STEFÁN BJÖRNSSON REIKNIMEISTARI

## Inngangur

Hér verður sagt frá Stefáni Björnssyni (1721–98), einum kynlegasta kvistinum í hópi íslenzkra raunvísindamanna á upplýsingaröld. Hann var um tíma rektor á Hólum, en vegna missættis við stiftprófast hrökklaðist hann úr landi til Kaupmannahafnar, þar sem hann var reikningshaldari eða reiknimeistari (*Kalkulator*) við landmælingadeild danska Vísindafélagsins í mörg ár. Síðasta ár ævinnar var hann styrkþegi sjóðs Árna Magnússonar.[1]

Stefán verður að teljast fremsti stærðfræðingur og eðlisfræðingur Íslendinga á 18. öld, og liggja eftir hann prentaðar greinar um stjörnufræði, eðlisfræði, veðurfræði og landmælingar, auk prentaðrar bókar á latínu um eiginleika ferhyrninga, *Introductio in tetragonometriam.* Hann sá um fyrstu fræðilegu útgáfuna á *Rímbeglu* og ritaði með formála og ítarlegar skýringar. Þá gaf hann einnig út *Hervararsögu og Heiðreks* á latínu.

Furðulegt má teljast, að verkum Stefáns skuli ekki hafa verið gefinn meiri gaumur hér á landi en raun ber vitni. Að hluta er skýringin eflaust sú, að mörg verka hans eru á latínu, hann vann fræðastörf sín á erlendri grund, og þeir voru fáir hér á landi, sem höfðu skilning á viðfangsefnum hans. Að auki mun Stefán hafa verið með afbrigðum óþjáll og einrænn í skapi, og litríkur ferill hans hér á landi kann að hafa valdið því, að samtímamenn gerðu honum ekki sérlega hátt undir höfði.

Það er ekki ætlun mín að gera ítarlega úttekt á ævi og störfum Stefáns Björnssonar í þessari stuttu grein. Tilgangurinn er frekar sá að vekja athygli á sérstæðum íslenzkum gáfumanni, sem lítið hefur verið fjallað um í sögubókum eða á öðrum vettvangi í mjög langan tíma. Von mín er sú, að þetta yfirlit verði öðrum hvatning til að kynna sér verk Stefáns ítarlegar og setja þau í viðeigandi samhengi, hvort heldur er íslenzkt, danskt eða alþjóðlegt.

[1] Efni þessarar greinar var kynnt á ráðstefnu, sem *Félag um átjándu aldar fræði* hélt 15. október 1994 um náttúruvísindi og heimsmynd Íslendinga 1700–1850.

## Æviferill Stefáns

Stefán Björnsson fæddist á Yztugrund í Blönduhlíð í Skagafirði hinn 15. janúar 1721.[2] Foreldrar hans voru þau Björn Skúlason, prestur í Flugumýrarþingum, og kona hans Halldóra Stefánsdóttir lögréttumanns á Silfrastöðum Rafnssonar.

Árið 1736 hóf Stefán nám í Hólaskóla. Hann útskrifaðist þaðan 20. maí 1744 og var Gunnar Pálsson (1714–91), bróðir Bjarna Pálssonar, síðar landlæknis, þá nýlega orðinn skólameistari. Stefán var síðan skipaður djákn á Þingeyrum 3. júní 1744, og gegndi hann því starfi um hríð eða þar til hann sigldi til framhaldsnáms. Ludvig Harboe biskup hælir honum mjög fyrir gáfur í bréfi til kirkjustjórnarráðsins 3. júní 1744 og segir hann m.a. skara fram úr öðrum í stærðfræði. Haustið 1746 sigldu þeir saman á Hofsóssskipi, Stefán og Bjarni Pálsson, og tóku harða útivist.

Stefán var skráður í stúdentatölu við Hafnarháskóla 16. desember 1746 og stundaði þar nám í guðfræði næstu fimm mánuðina. Hann lauk prófi á mettíma og varð cand. theol. 4. maí 1747 með þriðju einkunn. Svo stuttur námstími er líklega einsdæmi, en rétt er að hafa í huga, að Stefán hafði verið djákn á Íslandi í tvö ár áður en hann sigldi og er ekki ólíklegt, að hann hafi notað tímann að hluta til náms.

Eftir heimkomuna til Íslands dróst það nokkuð, að Stefán fengi starf við hæfi, þrátt fyrir tilraunir Halldórs biskups Brynjólfssonar, sem hafði mikið álit á honum og var honum mjög vinveittur.[3] Geta æviskrár þess næst, að Stefán hafi orðið djákn á Munkaþverá 7. marz 1750.

---

[2] Nokkur óvissa ríkir um fæðingarár Stefáns og gæti árið 1720 verið réttara (sjá Hannes Þorsteinsson, *Guðfræðingatal 1707–1907*, Rvík 1907–1910, bls. 259–261).

[3] Halldór Brynjólfsson biskup (1692–1752) þýddi fyrstu reikningsbókina, sem út kom á íslenzku og prentuð var á Hólum 1746: *Lijted Agrip Vmm þær Fioorar Species I Reiknings Konstenne, Þa undann eru geingenn Numeratio edur Talann.* 1. *Additio edur Tillags Talann.* 2. *Subtractio edur Afdraattar Talann.* 3. *Multiplicatio Margfiølgande Tala.* 4. *Divisio Skipta edur Sundurdeilingar Talann. Handa Bændum og Børnum ad komast fyrst i þa Stöfun, og til mikillrar Nitsemdar ef ydka sig i því sama, sierdeilis i Kaupum og Sølum, i hvørium Additio og Subtractio hellst brwkast. Innrettud Þad næst hefur orded komest Epter E. Hatton Reiknings Konst Edur Arithmetica.* (Um þessa reikningsbók flutti Ottó J. Björnsson fyrirlestur í *Íslenzka stærðfræðafélaginu* 18. febrúar 1988.)

**Skólameistari á Hólum.** Halldór biskup sótti það fast, að Stefán yrði skólameistari á Hólum, og í bréfi, sem hann skrifaði kirkjustjórnarráðinu 21. september 1750, lýsti hann þeirri skoðun sinni á Stefáni, að *„í Hólabiskupsdæmi væri enginn stúdent jafningi hans að gáfum og lærdómi."* Jafnframt efaðist hann um, að í Kaupmannahöfn *„væri nokkur landi hans er tæki honum fram í gáfum, iðni og háttprýði."* Með bréfinu sendi biskup nokkur sýnishorn af ritgerðum á latínu eftir Stefán með þeirri ósk, *„að þetta verði lagt fyrir háskólakennara í Höfn til þess að þeir sjái lærdóm Stefáns."*[4]

Að því kom að lokum, haustið 1753, að Stefán varð skólameistari á Hólum, settur af Jóni stiftprófasti Magnússyni, en konungsveitingu fékk hann 24. maí 1754. Tók hann við skólameistaraembættinu af Gunnari Pálssyni og segir í *Árbókum Espólíns* um Stefán af því tilefni, að *„skipti mjök um, þvíat hann var styrdlyndr ok óþydr."*[5] Um aðbúnað kennara og skólapilta á Hólum á þessum tíma má lesa í *Sögu Íslendinga.*[6]

**Starfi lýkur á Íslandi.** Veturinn 1754–55 dró til alvarlegra tíðinda. Í *Árbókum Espólíns* er atburðarásinni lýst þannig:[7]

> *Þá voru skærur á Hólum: bar þeim til Jóni stiptprófasti Magnússyni ok Stepháni Bjarnarsyni útaf kennslu hans; var Stephán styrdlyndr, ok gjördi í móti vilja stiptprófasts ok því er rèttast var, en hann einlægr ok þá nokkut stór; dimitteradi Stephán skólasveina fjóra óyfirheyrda um vetrinn, ok suma óverduga, ok gaf þeim Testimonía fyrir utan rád ok vitund stiptprófasts; var einn Christján Jóhannsson, er sídan var prestr ok prófastr at Stafholti; lèt hann þrjá af þeim prèdika í dómkyrkjunni í forbodi Jóns prófasts, ok er Officíalis vildi sídan í votta vidrvist yfirheyra einn af þeim: Þórd, son Þórodds heyrara Þórdarsonar, setti Stephán sik þar í móti, ok bannadi Þórdi at hlýdnast, ok dróg hann frá því, svo at yfirheyrslan fèkk*

---

4 Hannes Þorsteinsson, *Ævisögur lærðra manna* (handrit í Þjóðskjalasafni Íslands).

5 Jón Espólín, *Íslands Árbækur í sögu-formi*, I.–XII. deild, Khöfn 1821–55; X. deild, bls. 37.

6 Páll Eggert Ólason og Þorkell Jóhannesson, *Saga Íslendinga. Sjötta bindi. Tímabilið 1701–1770.* Rvík 1943, bls. 381–383, 386.

7 X. deild, bls. 43–44.

> *ei framgáng at því sinni; ok eitt sinn, er þeir ræddu um þetta í kvöldrökkri á Hólum, var rádizt á stiptprófast í myrkrinu, ok ætludu menn skólasveina þessa til hafda; bad hann kveikja ljós, en þraung var mikil, ok var ljósit slökkt jafnódt er þat kom upp, en prófastr nádi handfestu í ýmsum stödum, ok komu þeir hönum eigi undir. Fyrir þessar sakir lögsókti stiptprófastr Stephán fyrir prestarètti, ok var Stephán dæmdr til at gjalda 20 dali krónugjalds til Hólaskóla, ok 15 til stiptprófasts, en hlíft vid meiri sektum sakir fátæki, skyldi hann ok bidja Officíalis fyrirgefníngar. Bæturnar komu seint framm, ok vard Stephán frá skólanum; vard ok enginn skóli haldinn eptir Jól sídan, fyrir hardinda sakir.*

Þess má geta hér, að stiftprófastur (*officialis*) fór með biskupsvald á Hólum að Halldóri biskupi látnum.

Það var Gísli Magnússon (1712–79), þá nýorðinn biskup á Hólum, sem vék Stefáni úr embætti haustið 1755. Ákvörðun biskups hefur væntanlega verið vel rökstudd, en ástæða er til að ætla, að Stefán hafi haft sitthvað sér til málsbóta. Um atburðarásina má lesa ítarlegar í handriti Hannesar Þorsteinssonar, *Ævisögum lærðra manna*, og er þar vitnað í ýmis bréf málsaðila. Jóni stiftprófasti Magnússyni (1715–96), sem var bróðir Skúla landfógeta, er lýst svo:

> *Hann þókti ekki mikill lærdómsmaður, en var allra manna rammastur að afli og hefir verið harður í horn að taka, átti rimmu við Stefán rektor Björnsson, svo að rektor varð að fara frá, síðar langa misklíð við Gísla byskup Magnússon vegna úttektar á Staðastað; djáknar þóktust og illa haldnir hjá honum á Staðastað. Heldur var hann og baldinn yfirboðurum sínum, en talinn ella óhlutdeilinn og falslaus, einlyndur og trúlyndur.*[8]

**Reiknimeistari í Kaupmannahöfn.** Stefán Björnsson sigldi vegabréfslaus til Noregs haustið 1755 og virðist hafa dvalizt þar um veturinn. Frá Stafangri ritar hann langa skýrslu til yfirvalda um málareksturinn heima á Íslandi, kveðst vera fullkomlega sýkn saka og biður um að vera settur aftur inn í embættið.[9] Við þeirri beiðni var ekki orðið og fluttist

---

[8] Páll Eggert Ólason, *Íslenzkar æviskrár*, 1.-5. b., Rvík 1948–52.

[9] Sjá *Ævisögur lærðra manna.*

Stefán þá til Kaupmannahafnar, þar sem hann dvaldist næstu 43 árin eða allt til dauðadags. Um hina löngu útlegð Stefáns í Kaupmannahöfn er lítið vitað í smáatriðum, en hér skal upp talið það helzta, sem ég hef fundið í æviskrám og sögubókum.[10]

Þegar til Kaupmannahafnar kom, hóf Stefán nám við háskólann á nýjan leik. Hann mun einkum hafa lagt stund á stærðfræði og eðlisfræði og skyldar greinar og lauk prófi (*Filosofisk Baccalaureus*) 6. ágúst 1757. Hann bjó fyrst á Konungsgarði (*Regensen*) og síðar á Elers-garði (árin 1757–62) og fór fljótlega að vinna við landmælingadeild danska Vísindafélagsins undir yfirstjórn Thomasar Bugge (1740–1815). Bugge stjórnaði lengst af hinni miklu þríhyrningamælingu á Danaveldi, sem hófst fyrir alvöru vorið 1763 og stóð fram á næstu öld. Ekki er til þess vitað, að Stefán hafi starfað við mælingarnar sjálfar, og starfsheiti hans, *Kalkulator* eða reiknimeistari, bendir til þess, að hann hafi einungis unnið að útreikningum og vinnslu úr mæligögnum.

Í sögu Vísindafélagsins danska er frá því sagt, að á fundi í félaginu 3. febrúar 1764 hafi verið fjallað um umsókn Stefáns um stöðu *Hoved-Operateur*, en ekkert er sagt um afgreiðslu málsins. Flest virðist þó benda til þess, að Stefán hafi ekki hlotið frama hjá landmælingunum og

[10] Bjarni Jónsson frá Unnarholti, *Íslenzkir Hafnarstúdentar*, Akureyri 1949, bls. 88.

A. G. Drachmann, *Bibliografi over trykte disputatser fra Elers' Collegium. I Elers' Collegium 1691–1941*, Elersianersamfundet, Khöfn 1942.

H. Ehrencron-Müller, *Forfatterlexikon omfattende Danmark, Norge og Island indtil 1814*, 1.–12. b., Khöfn 1924–35; 1. b., bls. 451–452.

Janus Jónsson, *Saga latínuskóla á Íslandi til 1846*, birt í *Tímariti hins íslenzka bókmenntafélags*, 14. árg. (1893), bls. 1–97; fjallað er um Stefán á bls. 79–80.

Jón Helgason, *Íslendingar í Danmörku*, Rvík 1931, bls. 118–119.

R. Nyerup og J. E. Kraft, *Almindeligt litteraturlexikon for Danmark, Norge og Island*, Khöfn 1818–20, bls. 69.

S. Birket Smith (ritstj.), *Kjøbenhavns Universitets Matrikel*, 1.–3. b., Khöfn 1890–1912; 3. b., bls. 69.

Þorkell Jóhannesson, *Saga Íslendinga. Sjöunda bindi. Tímabilið 1770–1830. Upplýsingaröld.* Rvík 1950, bls. 445–446.

Þorvaldur Thoroddsen, *Landfræðissaga Íslands*, 1.–4. b., Rvík og Khöfn 1892–1904; 2. b., bls. 275–276, 3. b., bls. 21, 107, 4. b., bls. 133.

því verið *Kalkulator* þar til hann lét af störfum, hvenær sem það nú var. Einnig er sagt frá stöðuumsókn Wilsters nokkurs árið 1763. Kvartar hann sáran yfir ýmsu, sem hann hafði mátt þola hjá landmælingunum, meðal annars *„dend Haanhed Monsieur Biørnsen haver udeladt sig med over mine Foretagende udi Forretningen.“*[11] Segir þetta væntanlega sína sögu um samskipti Stefáns við samferðamenn. Leiða má getum að því, að lunderni Stefáns sem og starfsferill hans heima á Íslandi ásamt þeirri staðreynd, að hann var fátækur Íslendingur, hafi valdið því, að hann hlaut aldrei embætti í Danmörku.

**Fræðastörf.** Eins og fyrr er getið samdi Stefán Björnsson nokkur vísindarit, sem komu á prenti á árunum 1757 til 1794. Fjölluðu flest þeirra um stjörnufræði, eðlisfræði og stærðfræði, og ber þar hæst bók hans um ferhyrninga frá 1780. Greinar hans í ritum Lærdómslistafélagsins um aflfræði voru tímamótaverk, enda hafði ekkert verið ritað um slíkt efni á íslenzku fyrir daga Stefáns. Í næsta kafla verður fjallað nánar um nokkur þessara rita.

Fyrir utan greinarnar í ritum Lærdómslistafélagsins fer litlum sögum af sambandi Stefáns við landa sína heima á Íslandi. Skömmu eftir dauða Eyjólfs Jónssonar stjörnumeistara,[12] sem var samtímamaður Stefáns, segir Bjarni Pálsson landlæknir í bréfi til Finns biskups Jónssonar 15. september 1775:

> *Enginn veit hvað átt hefir fyrr enn mist hefir! og svo mun margur sakna mannæru, hugvits, lærdóms og handa Jónssoniusar, sem allt var exstans supra vulgus!*[13] *og er það þó sárast, að enginn er af slíkum manni fullkomin Kopían, já, ecki mjer sjáanlegur utanlands neinn, sem trúandi se fyrir hans Station; því þó Stephán Bjørnsson se Mathematikus, mun hann þykja maður eginsinnaður og óhandqvæmur.*[14]

---

11 A. Lomholt, *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab 1742–1942. Samlinger til selskabets historie.* 1.–5. b., Khöfn 1942–73; 4. b., bls. 28, 25.

12 Um hann má t.d. lesa í grein eftir Einar H. Guðmundsson, *Johnsonius og Lievog. Konunglegir stjörnumeistarar á Íslandi á 18. öld.* (Jakob Yngvason og Þorsteinn Vilhjálmsson (ritstj.), *Eðlisfræði á Íslandi IV*, Rvík 1989, bls. 110–125.)

13 þ.e. skaraði langt fram úr fjöldanum.

14 *Æfisaga Bjarna Pálssonar, sem var fyrsti Landphysicus á Islandi, samantekin*

Störf Stefáns í Kaupmannahöfn voru ekki takmörkuð við útreikninga eða frumsamdar ritsmíðar. Hann vann einnig að þýðingum fyrir hinn merka fræðimann P. F. Suhm, sem Hannes Þorsteinsson kallar velgerðarmann Stefáns.[15] Meðal annars sneri hann ýmsum fornum íslenzkum ritum á latínu fyrir Suhm, sem einnig kostaði útgáfur Stefáns á *Rímbeglu* [6] og *Hervararsögu* [7].[16] Þær þýðingar, sem ekki voru gefnar út, er að finna á handritadeild Konungsbókhlöðu í Kaupmannahöfn [13–15]. Sem fyrr segir var Stefán styrkþegi sjóðs Árna Magnússonar síðasta árið, sem hann lifði, og mun þá hafa búið íslenzka annála undir prentun.

**Gullverðlaun.** Stefán virðist hafa verið óvenju ern fram eftir öllum aldri. Rúmlega sjötugur tók hann tvisvar sinnum þátt í verðlaunasamkeppni í stærðfræði við Hafnarháskóla og stóð sig framúrskarandi vel í bæði skiptin. Árið 1792 var samkeppnin haldin í fyrsta sinn og hlaut hann þá viðurkenningu (*Accessit*) fyrir úrlausn á verkefni, þar sem útskýra átti algilda aðferð til þess að finna þvermál og miðjur ferla (*Exponere methodum universalem inveniendi diametros & centra curvarum*). Tvær ritgerðir bárust og fór dómnefndin þessum orðum um ritgerð Stefáns, en í henni sátu Thomas Bugge og stærðfræðingarnir J. Wøldike og J. A. Wolff:

*Den anden Afhandling med Devise:* Deus nobis hæc otia fecit,[17]

*árið 1799, eður 20 árum frá andláti hans, af Sveini Pálssyni, Landchírúrgó í vestari Skaptafells-, Rangárvalla-, Árness- og Vestmanneyja-sýslum,* Leirárgörðum við Leirá 1800, bls. 97–98. Sjá einnig: Sveinn Pálsson, *Æfisaga Bjarna Pálssonar,* Akureyri 1944, bls. 93. *Bjarni Pálsson eftir Svein Pálsson. Merkir Íslendingar. Ævisögur og minningargreinar.* Þorkell Jóhannesson bjó til prentunar. 1.–6. b., Rvík 1947–57; 5. b., bls. 57–124, tilvitnun á bls. 121.

[15] Sagnfræðingurinn P. F. Suhm (1728–98) er m.a. höfundur að alþýðlegu ágripi af náttúrufræði, *Sá gudlega þenkjandi Náttúru-skodari, þad er Hugleiding yfir Byggíngu Heimsins, edur Handaverk Guds á Himni og Jørdu, Ásamt annari Hugleiðíngu um Dygðina,* sem Jón Jónsson „hinn lærði“ (1759–1846) útlagði á íslenzku og prentað var í Leirárgörðum 1798.

[16] Vísað er í ritskrá Stefáns með tölusetningu í hornklofa. Ehrencron-Müller vísar til tveggja ritdóma um [7]: „Anm. i L[ærde] Eft[erretninger] 1785. p. 385. (af B. C. Sandvig); Gött[ingische] Anz[eigen von gelehrten Sachen] 1787. p. 1553.“

[17] Guð gaf okkur þetta næði. (Virgill)

> *har og ganske vel afhandlet og besvaret det fremsatte Problema, i hvis Opløsning han fornemmelig har fulgt Euler; han anbefaler sig desuden ved en meget god Order og omstændelig Tydelighed, hvilken for den større Mængde af Læsere vil være nødvendig og kierkommen. Han fortiener offentligen at nævnes og berømmes, og det saa meget meer, som han ganske vist havde fortient Præmie*[18]*, dersom han ei havde været at bedømme i Concurrence med først nævnte kronede Afhandling.*[19]

Gullverðlaunin í þetta skiptið hlaut C. F. Degen og fékk hann reyndar önnur gullverðlaun frá skólanum þetta sama ár fyrir ritgerð um guðfræðilegt efni.[20]

Í samkeppninni árið eftir, 1793, kom það hins vegar í hlut Stefáns Björnssonar að hreppa gullverðlaunin í stærðfræði, fyrstur Íslendinga.[21] Í verkefninu voru keppendur beðnir um að útskýra kraftmælingu þeirra Newtons og Leibniz og fella sannan dóm um hina víðfrægu þrætu (*Explicare virium mensuram Neutonianam & Leibnitzianam, & de celebri hac controversia veram dicere sententiam*). Eins og árið áður bárust tvær ritgerðir, og er þetta umsögn dómnefndar um aðra þeirra:

> *Den første med Devise:* Honos alit artes,[22] *har meget omstændeligen giennemgaaet Spørgsmaalet og grundigen besvaret samme, saa at denne Afhandling bør have Præmien; vi maatte allene anmærke, at om den skulle trykkes, da maatte nogle faa tilbageblevne Skriverfeil rettes, og det latinske Sprog paa nogle Steder forbedres.*

Í skýrslu Hafnarháskóla um verðlaunin segir síðan — og má þá hafa í huga, að Stefán var hér kominn á áttræðisaldur:

---

18 þ.e. gullverðlaunin.

19 J. Baden, *Kiøbenhavns Universitets-Journal*, 1. árg. (1793), bls. 12.

20 C. F. Degen (1766–1825) verður að teljast einn fremsti stærðfræðingur Dana á fyrri hluta 19. aldar. (Sjá M. Pihl (ritstj.), *Københavns Universitet 1479–1979. Bind XII. Det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet – 1. del.* Khöfn 1983.)

21 Aðrir Íslendingar, sem hlotið hafa gullverðlaun Hafnarháskóla í stærðfræði, eru Björn Gunnlaugsson (1818 og 1820), Ólafur Dan Daníelsson (1901) og Sigurður Helgason (1951).

22 Virðing elur listir. (Cicero)

> *Priisafhandlingens Forfatter er Hr. Steffen Biørnsen, som i forrige Aar erholdt Accessit: en Veteraner, som denne Kampplads vel egentligen ikke er bestemt for.*[23]

Stefán Björnsson andaðist í Kaupmannahöfn 15. október 1798 og var grafinn í Þrenningarkirkjugarði. Hann var ókvæntur og barnlaus. Síðustu ár ævinnar bjó hann á Valkendorfs-garði.[24] Hinn þekkti danski stærðfræðingur Poul Heegaard segir um Stefán:[25]

> *B[jörnsson] var iðinn vísindamaður og bera verk hans með sér þróunina á hans dögum, þegar frumspekileg og stjörnuspekileg viðhorf viku fyrir hreinum raunsæisviðhorfum.*

## Helztu verk Stefáns Björnssonar

Í þessum kafla verður leitazt við að gefa stutt yfirlit yfir helztu verk Stefáns Björnssonar. Hvorki verður gerð tilraun til þess að brjóta ritsmíðarnar til mergjar né gera á þeim vísindalega úttekt. Í samræmi við yfirlýst markmið höfundar ber fremur að líta á þetta yfirlit sem kynningu á verkunum.

**Háskólaritgerðir um stjörnufræði.** Fyrstu ritsmíðar Stefáns komu á prenti á árunum 1757 til 1760 og voru það háskólaritgerðir eða fyrirlestrar (*dissertationes*). Kverin eru á latínu og ritaði Stefán þau meðan hann bjó á Elers-garði. Þau hafa væntanlega verið gefin út á kostnað höfundar í samræmi við hefðir um slík rit. Fyrsta ritgerðin, *Um afleitt eðli* [1], fjallar um heimspekileg efni. Næst koma þrjár ritgerðir um stjörnufræði: *Um verkan halastjarna sem koma niður í sólkerfi vort* [2]; *Um notkun stjörnufræði í læknislist, hvers inngangsorð fjalla um áhrif himinhnatta vors sólkerfis á jörðu vora gegnum ljóskraft og segulmagn*

[23] J. Baden, *Kiöbenhavns Universitets-Journal*, 2. árg. (1794), bls. 19.

[24] Lomholt, 4. b., bls. 55.

Frekari upplýsingar um Stefán má eflaust finna í bréfa- og skjalasöfnum í Kaupmannahöfn. Í handritasafni Konungsbókhlöðu eru til dæmis uppköst að bréfum frá honum og sendibréf til hans, sem notuð hafa verið sem umbúðir utan um handrit að latneskum þýðingum hans (Ny kgl. sml. 1593a–h, 4to; 1601a–ö, 4to; 1784, 4to).

[25] Sjá S. C. Bech (ritstj.), *Dansk biografisk leksikon*, 3. útg., 1.–16. b., Khöfn 1979–84; 2. b., bls. 173.

[3]; og loks *Um himnaeðlisfræði, þar sem nægjanlega eða vissulega með mestum líkindum a priori er sannað að á himinhnöttum finnast fyrir skynsemisverur, fjöll og vötn* [4].

Eftir því sem ég bezt fæ séð eru ritin dæmigerð fyrir stjarnfræðilega sem og aðra vísindalega kappræðu í Kaupmannahöfn á þessum árum. Án ítarlegrar rannsóknar er hins vegar ekki auðvelt að sjá, hvaða vísindamenn danskir hafi haft mest áhrif á Stefán. Í því sambandi má þó geta þess, að á seinni námsárum hans í Höfn sá Christian Horrebow (1718–76) um kennslu í stjörnufræði og stærðfræði, og notaðar voru kennslubækur í þeim greinum eftir föður Christians, Peder Horrebow prófessor (1679–1764), en hann var lærisveinn og arftaki Ole Rømers.[26] Aðrir áhrifamiklir raunvísindamenn þar á þessum tíma voru Christian G. Kratzenstein (1723–95), sem sá m.a. um kennslu í eðlisfræði og læknisfræði, stærðfræðingurinn og eðlisfræðingurinn Jens Kraft (1720–65), og stuttu síðar kom til sögunnar stjörnufræðingurinn og stærðfræðingurinn Thomas Bugge, sem áður er getið.[27]

**Ferhyrningafræðin.** Tuttugu árum eftir að Stefán birti ritgerð sína *Um himnaeðlisfræði* kom út á latínu í Kaupmannahöfn höfuðrit hans, *Inngangur að ferhyrningafræði, analýtískt ritaður í samræmi við áætlun hins ágæta Lamberts* [5]. Bókin, sem að hluta hefur að geyma niðurstöður úr sjálfstæðum rannsóknum höfundar, er alls 454 blaðsíður í áttungsbroti. Í henni eru lögð drög að *ferhyrningafræði* (*tetragonometri*), sem er stærðfræðileg umfjöllun um rúmfræðilega og hornafræðilega eiginleika ferhyrninga í planinu á svipaðan hátt og *þríhyrningafræði* (*trigonometri*) fjallar um þríhyrninga í plani. Það er eftirtektarvert, að Stefán var nær sextugur að aldri, þegar bókin kom út árið 1780.[28]

[26] Bróðir Christians var Niels Horrebow (1712–60), sem svo mjög kom við sögu íslenzkra málefna um miðja öldina. Feðganna allra er getið í sjötta bindi af *Sögu Íslendinga* svo og í *Landfræðissögu* Þorvalds Thoroddsens. Sjá einnig áðurnefnda grein Einars H. Guðmundssonar, *Johnsonius og Lievog*.

[27] Nánari upplýsingar um menn þessa og verk þeirra má finna í áðurnefndu riti frá 1983 um sögu Hafnarháskóla.

[28] Eintak af bókinni er til á Landsbókasafni Íslands, Háskólabókasafni. Ehrencron-Müller vísar til ritdóms: „Anm. i Gött[ingische] Anz[eigen von gelehrten Sachen] 1781. Zug. p. 129."

INTRODUCTIO
IN
TETRAGONOMETRIAM
AD MENTEM V. C. L'AMBERT
ANALYTICE CONSCRIPTA
A
STEPHANO BIÖRNSEN
MATHEM. ET PHILOSOPH. CULTORE.

HAVNIAE,
APUD PROFTIUM, UNIVERS. BIBLIOPOL.
MDCCLXXX.

*Titilblað Ferhyrningafræðinnar*

Mér segir svo hugur, að langt sé um liðið síðan nokkur íslenzkur fræðimaður hefur rannsakað bók Stefáns gaumgæfilega. Er það vissulega skiljanlegt, þar sem bókin er á latínu og lítt aðgengileg nútíma stærðfræðingum. Í ljósi þess, að hér er væntanlega um að ræða fyrstu ritsmíðina um „æðri stærðfræði“ eftir íslenzkan höfund, væri hins vegar mjög æskilegt, að einhver kunnáttumaður tæki sig til og rannsakaði verkið og setti það í viðeigandi samhengi.

Upphafsmaður að ferhyrningafræði mun hafa verið hinn merki stærðfræðingur og stjörnufræðingur Johann Heinrich Lambert (1728–77). Um hann má t.d. lesa í stuttum kafla í ævisagnasafni vísindamanna, sem C. J. Scriba skrifar. Þar segir m.a.:[29]

*Margar athugana Lamberts snerust um þríhyrningafræði og almenna hornafræði. Hann kannaði gleiðbogaföllin og notaði þau til að spara sér reikninga í verkefnum í þríhyrningafræði. Hann leysti jöfnur í hornafræði með því að beita óendanlegum röðum og lagði drög að ferhyrningafræði — fræðigrein um ferhyrninga, sem svarar til hinnar venjulegu þríhyrningafræði.*

[29] C. C. Gillispie (ritstj.), *Dictionary of Scientific Biography*, 1.–18. b., New York 1981–90; 7. b., bls. 595–600, tilvitnun á bls. 599.

Ég hef rekizt á tvo staði í erlendum ritum, þar sem minnzt er á bók Stefáns. Í bók Niels Nielsens um sögu stærðfræðinnar í Danmörku er hluti af ritskrá Stefáns[30] og vitnað neðanmáls í þýzka þýðingu H. Ch. Schumachers á bók L. Carnots, *Geómétrie de position*, frá 1803:

> *Mit der gradlinichten Tetragonometrie haben sich mehrere Gelehrten schon beschäftigt. Lambert liess es sich angelegen seyn, ihre Wichtigkeit zu zeigen, und entwarf einen Plan dazu, den Biornsen, ein geschickter dänischer Geometer, ausführte, und mit dem sich auch Meyer in Göttingen mit Erfolg beschäftigte. Lexell erschöpfte denselben Gegenstand in zwey Abhandlungen in 19. und 20. Band der Acta Petropolitanæ.*[31]

Í tilvitnuninni er minnzt á tvo menn auk Stefáns og Lamberts: Meyer er að öllum líkindum þýzki stjörnufræðingurinn og kortagerðarmaðurinn Johann Tobias Mayer (1723–62), prófessor í Göttingen.[32] Anders Johan Lexell (1740–84) var sænskur stærðfræðingur og stjörnufræðingur frá Åbo (Turku) í Finnlandi. Hann starfaði lengst af í Pétursborg í Rússlandi og var einn af nánustu samstarfsmönnum Leonards Eulers þar í landi. Í áðurnefndu ævisagnasafni segir í kafla um Lexell m.a.:[33]

> *Lexell varð fyrstur til þess að setja fram almenna marghyrningafræði,*[34] *þar sem t.d. voru þríhyrningafræðilegar aðferðir til að ákvarða $n$-hyrning í planinu út frá alls $2n-3$ hliðum og hornum á milli þeirra, ef a.m.k. $n-2$ þessara stærða eru hliðalengdir. Þessar athuganir voru eðlilegt framhald og útvíkkun á verkum J.-H. Lamberts (1770), J. T. Mayers (1773) og S. Björnssonar (1780), sem birzt höfðu skömmu áður og fjölluðu um ákvörðun ferhyrninga með aðferðum þríhyrningafræðinnar. Allar lausnaraðferðir Lexells byggðust á tveimur grunnjöfnum, sem koma fram, þegar hliðum marg-*

---

[30] N. Nielsen, *Matematikken i Danmark 1528–1800*, Khöfn 1912, bls. 23–24.

[31] *Geometrie der Stellung*, Altona 1810, 2. b., bls. 57.

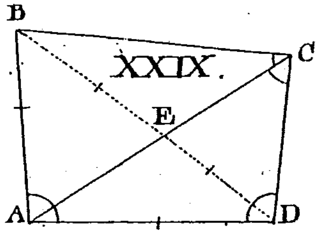
[32] Sjá t.d. grein E. G. Forbes í *Dictionary of Scientific Biography*, 9. b., bls. 232–235.

[33] Grein eftir A. T. Grigorian og A. P. Youschkevitch í *Dictionary of Scientific Biography*, 8. b., bls. 299–300.

[34] A. J. Lexell, *De resolutione polygonorum rectilineorum*, birt í *Novi Commentarii Ac. Sc. Petropolitanae*, **19** (1774), 1775, bls. 184–236 og **20** (1775), 1776, bls. 80–122.

*hyrnings er ofanvarpað á tvo þverstæða ása í marghyrningsplaninu, ef einhver hliðanna liggur á öðrum ásnum. Af þessum jöfnum leiddi hann út aðrar, sem koma að góðu gagni við að leysa verkefni tengd þríhyrningum og ferhyrningum, þegar vissar stærðir eru gefnar. Að auki setti hann fram tilgátur um tilsvarandi jöfnur fyrir fimmhyrninga, sexhyrninga og sjöhyrninga. Þá fjallaði hann um flokkun á verkefnum og lausnir á þeim fyrir marghyrninga almennt. Einnig kannaði hann — en í minni smáatriðum — vandamál, þar sem hornalínur í marghyrningum eru gefnar auk horna, sem þær mynda við hliðarnar. Eftir daga Lexells vann S. L'Huillier (1789) einnig að rannsóknum á marghyrningum.*[35]

Þegar borin eru saman hin ýmsu ártöl, sem nefnd eru í þessari tilvitnun, blasir við, að tengslin milli verka þeirra Mayers, Stefáns og Lexells eru ekki eins einföld og lýsingin gæti gefið til kynna. Til dæmis er ljóst, að kanna þarf frumheimildir til þess að ganga úr skugga um, hvernig greinar Lexells frá 1774 og 1775 tengjast bók Stefáns frá 1780. Leiða má getum að því, að Lexell hafi haft undir höndum handrit að bók Stefáns, en það þyrfti að kanna nánar. Í þessu sambandi má einnig benda á, að ýmis verk Mayers voru ekki prentuð fyrr en að honum látnum.




*Teikning úr Ferhyrningafræðinni, sem vísað er til hér á næstu síðu.*

**Rímbegla.** Sama ár og bókin um ferhyrningana kom út, gaf Stefán út fyrstu vísindalegu útgáfuna af *Rímbeglu* [6], og var prentunin kostuð af sagnfræðingnum P. F. Suhm eins og áður er getið. Stefán þýddi einnig allt verkið á latínu og skrifaði formála og ítarlegar skýringar á sama máli.[36] Lítið hefur verið vitnað í þessa útgáfu á undanförnum áratugum, og stafar það fyrst og fremst af því, að á árunum 1914–16 var bætt um

[35] S. L'Huillier, *Polygonométrie et abrégé d'isopérimétrie élémentaire*, Geneva 1789. (Tilvísun hér.)

[36] Ehrencron-Müller vísar til tveggja ritdóma: „Anm. i L[ærde] Eft[erretninger] 1782. p. 426; Kiel. Litt. Journal. 1780. p. 919."

# CAPUT VIII.

*Continens tria problemata secundae classis particularis, sub posteriore principali contentae.*

## *Problema* XXIX.

Fig. XXIX. §. 416. In figura quadrilatera proposita $ABCD$ inter haec sex: latus $AB=a$ $AD=c$, angulum $A=\psi$, $D=\varphi$, $ACB=\alpha$, et $ACD=\beta$, aequationem invenire.

*Solutio.*

Cum sit e solutione problematis XXVI. (§. 377.) diagonalis $AC=\frac{c \,\mathrm{sin.}\, \varphi}{\mathrm{sin.}\, \beta}$, et per antecedentia $\mathrm{sin.}\, B=-\mathrm{sin.}\,(\alpha+\beta+\varphi+\psi)$; in triangulo sinistro statim pervenio ad hanc analogiam: $AB : \mathrm{sin.}\, ACB = AC : \mathrm{sin.}\, B$, h. e. substitutis symbolis $a : \mathrm{sin.}\, \alpha = \frac{c \,\mathrm{sin.}\, \varphi}{\mathrm{sin.}\, \beta} : -\mathrm{sin.}\,(\alpha+\beta+\varphi+\psi)$, unde fit aequatio talis: $c \,\mathrm{sin.}\, \alpha \,\mathrm{sin.}\, \varphi = - a \,\mathrm{sin.}\, \beta \,\mathrm{sin.}\,(\alpha+\beta+\varphi+\psi)$. Q. E. I.

*Coroll. I.*

§. 417. Ex hac aequatione statim in oculos incurrit esse latus $AB=a=\frac{-c \,\mathrm{sin.}\, \alpha \,\mathrm{sin.}\, \varphi}{\mathrm{sin.}\, \beta \,\mathrm{sin.}\,(\alpha+\beta+\varphi+\psi)}$ et latus $AD=c=\frac{-a \,\mathrm{sin.}\, \beta \,\mathrm{sin.}\,(\alpha+\beta+\varphi+\psi)}{\mathrm{sin.}\, \alpha \,\mathrm{sin.}\, \varphi}$.

*Smækkuð mynd af einni síðu úr Ferhyrningafræðinni.*

betur, en þá voru hin fornu rit gefin út að nýju í öðru bindi ritsafnsins *Alfræði íslenzk*, og sáu þeir N. Beckman og Kr. Kålund um útgáfuna. Í inngangi þessa bindis, sem fjallar um rímtöl, gerir Beckman rækilega grein fyrir íslenzkri rímfræði á miðöldum og setur hana í samhengi við erlenda þekkingu á þessu sviði. Hann fjallar auk þess um fyrri útgáfur á verkunum, þar á meðal hina merku frumútgáfu Stefáns, sem hann finnur reyndar ýmislegt til foráttu.[37] Ætti það varla að koma á óvart, ef haft er í huga, að á dögum Beckmans voru kröfur um vísindaleg vinnubrögð mun harðari en menn áttu að venjast á dögum Stefáns.

**Vísindi fyrir Íslendinga.** Þær greinar, sem Stefán Björnsson samdi á íslenzku, birtust allar í ritum Lærdómslistafélagsins á árunum 1782 til 1794.[38] Í félagaskránni, sem birt var árlega í félagsritunum, stendur við nafn hans *„Matheseos et Antiqvitt patriæ Studiosus“*, sem útleggst *„lærður í stærðfræði og fornfræðum föðurlandsins“*. Eins og áður er getið voru greinar Stefáns um aflfræði hinar fyrstu, sem skrifaðar voru á íslenzku um slíkt efni, en að auki ritaði hann um veðurfræði og landmælingar. Greinarnar taka að nokkru leyti mið af daglegu umhverfi íslenzkra bænda, en ósagt skal látið, hvort þær hafa haft mikil áhrif á þá. Hins vegar kann vel að vera, að sumar þeirra hafi síðar vakið athygli Björns Gunnlaugssonar og orðið honum hvatning til að leggja fyrir sig stærðfræðileg vísindi.

Umfjöllun Stefáns um aflfræði samanstendur af sex greinum. Fjórar fyrstu þeirra, *Um þær einföldustu grunnmaskínur*, eru í rauninni ein grein í fjórum „deildum“, samtals 74 blaðsíður, og framhald þeirra, *Um skálavigt* og *Um reiðslur og pundara*, er til samans 29 síður, og eru þær allar í áttungsbroti. Greinarnar eru all tæknilegar, ef miðað er við almenna þekkingu í stærðfræði og eðlisfræði hér á landi, þegar þær komu

---

[37] N. Beckman, Kr. Kålund, *Alfræði íslenzk. Islandsk encyklopædisk litteratur. II. Rímtöl.* Khöfn 1914–16, bls. lvi–lx og cviii–cxi.

[38] Einn helzti stofnandi *Hins íslenzka lærdómslistafélags* árið 1779 var systursonur Stefáns, Ólafur Ólafsson frá Frostastöðum, þá stúdent í Höfn, en frá 1783–84 lektor í stærðfræði við námuskólann á Kóngsbergi.

Um Lærdómslistafélagið er fjallað ítarlega í ritgerð eftir Helga Magnússon, *Fræðafélög og bókaútgáfa.* (Ingi Sigurðsson (ritstj.), *Upplýsingin á Íslandi. Tíu ritgerðir.* Rvík 1990, bls. 183–215.)

út. Enda segir Stefán í inngangi að fyrstu greininni [8a, bls. 3–4]:

*En verda kann, at bædi leikum og lærdum á Islandi þyki hún eigi allaudskilin, hvøriu eg at sønnu eigi neita; en þat velldr, at til at skilia hana fullkomliga, útheimtaz nockrar Grunnstædur úr Geometria, og þær fyrstu og einføllduztu reglur úr Algebra (eda Stafareikníngi) og Trigonometria (eda þríhyrníngs-reikníngi), hvar um eg eda einhverr annar kannske nockud skrifa mun framvegis. Því mundi bezt, at menn fyrst kynni ser þessar Geómetrísku, Algebraísku og Trígónómetrísku Grunn-reglur, og lesi sídan med athygli þessa hugvekiu um Vegstaungina, og hinar, sem smámsaman fylgia munu um þær adrar fyrstu og einfølldu Grunn-Maskinur, verdr þá allt vel skilit.*

Af þessu má ljóst vera, að Stefán gerir talsverðar kröfur til lesenda sinna.

Í fyrstu greininni leggur Stefán drög að *jafnvigtar-kunnáttunni* (*Statica*), sem hann kallar einnig *jafnvægis-kunnáttu*, og *hræringarkunnáttunni* (*Mechanica*). Síðan fjallar hann ítarlega um vogarstöng og notkun hennar á flatlendi í landbúnaði og víðar. Í leiðinni fjallar hann að sjálfsögðu um krafta og kraftvægi í nokkrum smáatriðum og reiknar sýnidæmi. Í seinni greinum tekur hann síðan fyrir kraftfræði á skáborði eða í brekku (*hallanda*) [8b]; hjól, trissur og fleyga [8c]; aflfræði skrúfunnar [8d] og að lokum skálavogir og reiðslur [10,11].

Án ítarlegs samanburðar er ekki auðvelt að sjá, hversu mikið Stefán hefur stuðzt við erlend rit í greinum sínum um aflfræðina. Efnið sjálft var að sjálfsögðu hluti af námsefni í eðlisfræði í æðri skólum í Evrópu á þessum tíma og hafði reyndar verið vel þekkt um langan aldur. Hins vegar sýnast mér tök Stefáns á efninu benda til þess, að textinn sé að verulegu leyti frumsaminn á íslenzku og að ekki sé um beina þýðingu úr erlendum bókum að ræða. Í þessu sambandi má einnig benda á, að í grein sinni um veðurfræði [9] tekur Stefán það skýrt fram, að efnið sé tekið úr þýzkum og öðrum ritum, en í aflfræðigreinunum minnist hann ekki á neitt slíkt.

Síðasta grein Stefáns í ritum Lærdómslistafélagsins birtist árið 1794. Þar fjallar hann í nokkrum smáatriðum um einfalda landmælingu [12] og var kveikjan að greininni önnur og lengri grein eftir Jón Jónsson „hinn lærða“, sem birzt hafði fimm árum áður í félagsritunum.[39] Landmæl-

[39] Jón Jónsson: *Um Vallarmál*. Rit Lærdómslistafélags, 9. b. (1789), bls. 24–90.

ingar voru sérsvið Stefáns og þótti honum nauðsynlegt að gera athugasemdir við sitthvað í grein Jóns, sem betur mátti fara. Jafnframt notaði hann tækifærið til að uppfræða landa sína um grundvallaratriði landmælinga og þríhyrningareiknings.

**Keppnisritgerðir.** Síðustu tvö verkin í ritskrá Stefáns eru handrit að ritgerðum, sem hann sendi danska Vísindafélaginu 24. desember 1793 og 17. júní 1795. Í báðum tilvikum var tilefnið verðlaunasamkeppni á vegum félagsins og er frá því skýrt í sögu þess, að verkefnið, sem var hið sama í bæði skiptin, hafi verið að útskýra, *„hvernig stærð og hraði hafaldnanna og breyting á ölduhæð þeirra er háð víðáttu og dýpi hafsins.“*[40] Báðar ritgerðir Stefáns eru á latínu. Hin fyrri kallast *Ritgerð um hreyfingu vatna, sem vindur hrærir* [16], og hin síðari *Ritgerð, þar sem útskýrt er og sýnt, hvernig ölduhæð og öldubreidd veltur á víddum vatna, sem vindur hrærir* [17].[41] Lomholt getur eingöngu um það, að Stefán hafi afhent ritgerðir með þessum titlum, en fjallar ekki um þær að öðru leyti. Því er ekki að fullu ljóst, hvort Stefán hafi hlotið verðlaun félagsins fyrir greinarnar, en þögn Lomholts bendir eindregið til, að svo hafi ekki verið.

Að lokum er rétt að geta þess hér, að í þeim handritaskrám, sem ég hef haft aðgang að, er ekki minnzt á verðlaunaritgerðir Stefáns í stærðfræðisamkeppni Hafnarháskóla árin 1792 og 1793, sem fjallað var um hér að framan. Ég óttast því, að þau handrit séu með öllu glötuð.[42]

---

[40] Lomholt, 5. b., bls. 137–138.

[41] Stefán velur ritgerðum sínum einkunnarorð af kostgæfni og sækir til latneskra höfunda. Fyrri ritgerðin var auðkennd: *Omnia conandô docilis solertia vincit.* (Með því að reyna allt sigrar spektin spök. (Menilius)) Og hin síðari: *Scire tuum nihil est, nisi te scire hoc sciat alter.* (Er vitneskja þín einskis virði, nema annar viti að þú vitir? (Persius))

[42] Eftirfarandi heimildir eru notaðar í kaflanum auk þeirra, sem áður eru tilgreindar:

F. W. A. Murherd, *Litteratur der Math. Wissenschaften*, Leipzig 1797–1805, 2. b., bls. 101.

J.-C. Poggendorff, *Bibliographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, Leipzig 1863, 1. b., bls. 205.

J. Rogg, *Handb. der Math. Litt. vom Anfange der Buchdrucken*, Tübingen 1830, bls. 303.

## Lokaorð

Stefán Björnsson reiknimeistari var fremsti stærðfræðingur og eðlisfræðingur Íslendinga á átjándu öld. Hann var forveri Björns Gunnlaugssonar en starfaði mestan hluta ævinnar í Kaupmannahöfn við útreikninga fyrir landmælingadeild danska Vísindafélagsins og önnur fræðastörf. Í hinni þunnskipuðu fylkingu íslenzkra stærðfræðinga, stjörnufræðinga og eðlisfræðinga fyrri alda hefur hann nokkra sérstöðu vegna þess, hversu mikið liggur eftir hann í rituðu máli. Hann skrifaði fyrstur manna á íslenzku um grundvallaratriði aflfræði, og hann er jafnframt fyrsti Íslendingurinn, sem skrifar bók um „æðri stærðfræði“ á alþjóðlegu vísindamáli síns tíma og fær hana gefna út á prenti. Það eitt er umtalsvert afrek og ætti að nægja til þess að tryggja honum verðugan sess í vísindasögu Íslendinga.[43]

## Ritskrá Stefáns Björnssonar

*Prentuð verk 1–12, handrit 13–17*

1. *Dissertatio de essentia consecutiva, qvam ex consensu senatus academici publico dissentientium examini submittet Stephanus Bernonius Islandus, respondente Brinjolfo Jonæ filio, Coll. Reg. alumno*, Havniæ 1757, 16 bls., 4to.
2. *Dissertatio de effectu cometarum descendentium in systema nostrum planetarium, cujus particulam I. placido dissentientium examini submittit Stephanus Biornonius Island. defendentis spartam ornante præstantissimo atqve doctissimo Christiano Ditlevio Lunn*, Havniæ 1758, 12 bls., 4to.
3. *Dissertatio de usu astronomiæ in medicina, cujus præliminaria de influxu corporum cælestium systematis nostri solaris in tellurem*

[43] Svavar Hrafn Svavarsson fornfræðingur aðstoðaði mig við þýðingar úr latínu. Stefán Karlsson handritafræðingur vísaði mér á mikilvægar heimildir, las yfir frumgerð greinarinnar og benti á margt, sem betur mátti fara. Kann ég þeim báðum beztu þakkir fyrir. Sérstaklega vil ég þó þakka Jóni Ragnari Stefánssyni stærðfræðingi og ritstjóra *Fréttabréfs* fyrir vandaðan yfirlestur og gagnlegar ábendingar um efnisatriði, málfar og frágang.

*nostram mediante vi luminaria et magnetica, placido dissentientium examini submittit Stephanus Biornonius Island. defendente præstantissime juvene Otthone Johannæo s. s. theol. studioso*, Hafnie 1759, 8 bls., 4to.

4. *Dissertatio spectans ad physicam coelestem, qua sufficienter, aut certe summa cum verisimilitudine a priori probatur dari in corporibus coelestibus creaturas rationales, montes et aqvas qvam placido dissentientium examini submittit Stephanus Biornonius Island. defendente præstantissimo juvene, Johanne Olavio alum. Coll. Reg*, Hafniæ 1760, 8 bls., 4to.
5. *Introductio in tetragonometriam ad mentem V. C. Lambert analytice conscripta a Stephano Biörnsen mathem. et philosoph. cultore*, Havniae 1780, 454 bls., 8vo.
6. *Rymbegla sive rudimentum computi ecclesiastici et annalis veterum Islandorum, in qvo etiam continentur chronologica, geographica, astronomica, geometrica, theologica, nonnulla ex historia universali & naturali rariora. Qvam ex manuscriptis Legati Arna-Magnæani versione Latina, lectionum varietate, notis in materiam computisticam, indice vocum Rymbeglæ propriarum, & rerum in partem historicam auxit Stephanus Biörnonis Isl. Addita sunt* 1) *Talbyrdingus ejusdem notis illustratus*, 2) *Oddi astronomi somnia*, 3) *Joh. Arnæ &* 4) *Finni Johannæi horologia*, Havniæ 1780, 782 bls., 4to.
7. *Hervararsaga ok Heidreks Kongs. Hoc est historia Hervöræ et regis Heidreki, qvam ex manuscriptis Legati Arna-Magnæani versione Latina, lectionibus variantibus, indicibus vocabulorum rariorum, nominum propriorum et rerum illustravit Stephanus Biörnonis, Isl. Additus est brevis commentarius de situ geographico regionum, marium, insularum et montium, in hac historia occurrentium ex mente illustrissimi et doctissimi Dni. Clavigeri Pet. Frid. Suhm, ex ejus operibus transcriptus et Latine redditus*, Hafniæ 1785, 283 bls., 4to.

8a. *Um þær einføllduztu Grunn-Maskinur, og fyrst um Vegstaungina*, Rit Lærdómslistafélags, 2. b. (1782), bls. 1–29.

8b. *Um þær einføllduztu Grunn-Maskinur, önnur deild, um Jafnvigtina á Hallandanum* (*Plano inclinato*), Rit Lærdómslistafélags, 5. b. (1785), bls. 190–201.

8c. *Um þær einføllduztu Grunn-Maskinur. Þridia Deild. Um Jafnvigtina á Vinduhiólinu (Rota v. axi in Peritrochio)*, Rit Lærdómslistafélags, 6. b. (1786), bls. 1–19.

8d. *Um þær einføllduztu Grunn-Maskinur. Fiórda Deild. Um Jafnvigtina á Skrúfunni. (Cochlea)*, Rit Lærdómslistafélags, 8. b. (1788), bls. 179–192.

9. *Teikn til Vedráttu-fars, af Sólu, Túngli og Stiørnum, Lopti, Jordu, Vatni og Dýrum. Samanlesin úr Þýzkum og fleirum skrifum*, Rit Lærdómslistafélags, 8. b. (1788), bls. 109–150.

10. *Um Skála-Vigt, sem ogsvo kallaz Metaskálir, og Met á þá gømlu Islendsku*, Rit Lærdómslistafélags, 9. b. (1789), bls. 263–277.

11. *Um Reidslur og Pundara*, Rit Lærdómslistafélags, 10. b. (1790), bls. 161–174.

12. *Nockr Vidurauki lagdr til Hugvekiunnar um Vallar-mál í níunda bindini Félags ritanna, og Lagfæríng nockurra úrlausna, sem í henni Lesaranum fyri siónir koma*, Rit Lærdómslistafélags, 13. b. (1794), bls. 251–278.

13. *Sturlunga*, Latnesk þýðing, Ny kgl. sml. 1235, fol.

14. *Noregskonungasögur*, Latnesk þýðing, Ny kgl. sml. 1585, 4to; 1593 a–h, 4to; 1601 a–ö, 4to; 1603 a–f, 4to; 1669, 4to; 1592 a–f, 4to.

15. *Laxdæla*, Latnesk þýðing, Ny kgl. sml. 1784, 4to.

16. *Dissertatio de motu aquarum, qvæ vento agitantur*, Hafniæ 1793. Handritasafn danska Vísindafélagsins, 56 bls. 4to, 1 tafla (6 myndir).

17. *Dissertatio qua exponitur & demonstratur, quômodo undarum altitudo & latitudo a dimensionibus aquarum ventô actarum pendeant*, Havniae 1795. Handritasafn danska Vísindafélagsins, 66 bls., 1 tafla (6 myndir).

*Jón Kr. Arason:*

## ÓLYMPÍULEIKARNIR Í STÆRÐFRÆÐI 1994

Ólympíuleikarnir í stærðfræði 1994 voru haldnir í Hong Kong dagana 13. og 14. júlí. Í liði Íslands voru fjórir menntaskólanemendur, Bjarni Rúnar Einarsson úr Menntaskólanum við Hamrahlíð og Alfreð Hauksson, Ingileif Bryndís Hallgrímsdóttir og Magnús Þór Torfason úr Menntaskólanum í Reykjavík.

Fararstjóri íslenzka liðsins var Lárus H. Bjarnason og Jón Kr. Arason var fulltrúi Íslands í dómnefnd.

Af íslensku keppendunum náði Magnús Þór Torfason bestum árangri. Hann hlaut einnig sérstaka viðurkenningu fyrir fullkomna lausn sína á sjötta dæminu. Í óformlegri keppni landa stóðu Bandaríkin sig best með fullt hús stiga.

Keppnin sjálf stóð í tvo daga. Hvorn dag fengu keppendur fjóra og hálfa klukkustund til að glíma við þrjú dæmi.

Dæmin sex fara hér á eftir.

**1. dæmi.** Látum $m$ og $n$ vera náttúrulegar tölur. Látum $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vera mismunandi stök í $\{1, 2, \ldots, n\}$, þannig að hvenær sem við höfum $a_i + a_j \leq n$ fyrir einhver $i$ og $j$, $1 \leq i \leq j \leq m$, þá er til $k$, $1 \leq k \leq m$, þannig að $a_i + a_j = a_k$.

Sannið, að

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

**2. dæmi.** $ABC$ er jafnarma þríhyrningur með $AB = AC$. Gerum ráð fyrir eftirfarandi:

(a) $M$ er miðpunktur $BC$, og $O$ er sá punktur á línunni $AM$, sem er þannig að $OB$ standi hornrétt á $AB$.

(b) $Q$ er einhver punktur á strikinu $BC$ frábrugðinn $B$ og $C$.

(c) $E$ er á línunni $AB$ og $F$ er á línunni $AC$, þannig að $E$, $Q$ og $F$ séu mismunandi punktar, sem allir liggja á sömu línu.

Sannið, að $OQ$ standi hornrétt á $EF$ þá og því aðeins að $QE = QF$.

**3. dæmi.** Fyrir sérhverja náttúrulega tölu $k$ látum við $f(k)$ vera fjölda þeirra talna í menginu $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, sem hafa töluna 1 í nákvæmlega þremur sætum, þegar þær eru ritaðar í tvíundarkerfi.

(a) Sannið, að fyrir sérhverja náttúrulega tölu $m$ sé til að minnsta kosti ein náttúruleg tala $k$, þannig að $f(k) = m$.

(b) Ákvarðið allar náttúrulegar tölur $m$ þannig að til sé nákvæmlega eitt $k$ með $f(k) = m$.

**4. dæmi.** Ákvarðið allar tvenndir $(m, n)$ af náttúrulegum tölum, þannig að

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

sé heil tala.

**5. dæmi.** Látum $S$ vera mengi allra rauntalna stærri en $-1$. Finnið öll föll $f\colon S \to S$, sem uppfylla eftirfarandi tvö skilyrði:

(i) Um öll $x$ og $y$ í $S$ gildir, að

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x).$$

(ii) Fallið $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ er strangt vaxandi á hvoru bilanna $-1 < x < 0$ og $0 < x$.

**6. dæmi.** Sýnið, að til sé mengi $A$ af náttúrulegum tölum, sem hefur eftirfarandi eiginleika:

Fyrir sérhvert óendanlegt mengi $S$ af frumtölum er til náttúruleg tala $k \geq 2$ og ennfremur tvær náttúrulegar tölur $m \in A$ og $n \notin A$, sem hvor fyrir sig er margfeldi $k$ mismunandi staka í $S$.

Lesendur eru hvattir til að reyna sig við dæmin, en benda má á, að lausnir á þeim má finna í *Normat* (*Nordisk Matematisk Tidskrift*), **42** (1994), bls. 184–187.

*Rögnvaldur G. Möller:*

# FRAMHALDSSKÓLAKEPPNIN 1994–95

Eins og undanfarna vetur var *Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema* í tveimur hlutum þetta skólaár. Þriðjudaginn 18. október síðastliðinn fór fram keppni í fyrri hluta. Hún var á tveimur stigum: Neðra stigi, sem einungis er ætlað nemendum á fyrstu tveimur námsárum framhaldsskóla, og efra stigi, sem er ætlað nemendum á seinni tveimur árunum.

Alls tóku 434 nemendur þátt í keppninni úr 19 skólum, þar af voru 243 nemendur á neðra stigi og 191 var á efra stigi.

Á neðra stigi fékk 21 keppandi viðurkenningarskjal fyrir árangurinn og 20 keppendur á efra stigi, og var þeim öllum jafnframt boðið að taka þátt í seinni hluta keppninnar. Þeim var einnig boðið að taka þátt í bréfanámskeiði, þar sem fjallað var um ýmis stærðfræðileg efni og reynt að þjálfa nemendur í þrautalausnum.

Niðurstöður í þessum fyrri hluta keppninnar voru jafnframt hafðar til hliðsjónar við val á keppnisliði okkar í *Eystrasaltskeppninni,* sem við segjum hér fyrst frá.

## Eystrasaltskeppnin 9.–13. nóvember 1994

Þegar Eystrasaltsþjóðirnar stóðu í sjálfstæðisbaráttu sinni, komu þær á fót stærðfræðikeppni til að styrkja böndin. Í fyrstu tóku bara Eistland, Lettland og Litháen þátt í henni, en þátttökulöndunum hefur fjölgað, og er ætlunin að ná til allra landanna, sem liggja að Eystrasalti. Þátttaka Íslendinga er vegna þess stuðnings, sem við sýndum Eystrasaltsþjóðunum í sjálfstæðisbaráttu þeirra.

Í þetta sinn fór keppnin fram í Tartu í Eistlandi dagana 9.–13. nóvember. Tartu er næst stærsta borg Eistlands og er háskólinn þar elsti og um leið stærsti háskólinn í Eistlandi. Skólinn var stofnaður 1632 af Gústafi II Adolf Svíakonungi og á sér merka sögu.

Í þetta sinn tóku níu lið þátt í keppninni, frá Eistlandi, Lettlandi, Litháen, Íslandi, Danmörku, Svíþjóð, Finnlandi og Póllandi og frá Pétursborg í Rússlandi. Lagðar eru fyrir tuttugu þrautir og vinnur hvert fimm nemenda lið saman að úrlausn þeirra.

Íslenska liðið skipuðu að þessu sinni þeir Guðmundur Hafsteinsson, Gunnlaugur Þór Briem og Magnús Þór Torfason úr Menntaskólanum í

Reykjavík og bræðurnir Kári og Logi Ragnarssynir úr Menntaskólanum við Hamrahlíð. Með liðinu fóru Benedikt Jóhannesson sem dómnefndarfulltrúi og Rögnvaldur G. Möller sem fararstjóri.

Úrslit urðu þau, að piltarnir frá Pétursborg sigruðu með miklum yfirburðum. Þeir hlutu 94 stig af 100 mögulegum og leystu sautján af verkefnunum tuttugu fullkomlega. Í öðru sæti var lettneska liðið með 80 stig og Pólverjarnir urðu í þriðja sæti með 75 stig. Yfirburðir liðsins frá Pétursborg verða einkar athyglisverðir, ef haft er í huga, að liðsmenn voru aðeins fjórir, en í hverju hinna liðanna voru fimm. Íslenska liðinu gekk ekki vel í glímunni við þrautirnar tuttugu. Dæmin í alþjóðlegum stærðfræðikeppnum eru oftast þannig, að venjulegir framhaldsskólanemendur, sem ekki hafa fengist við slík dæmi áður, eiga litla möguleika á góðum árangri. Reynsluleysi og skortur á sérstakri þjálfun í því að glíma við slík dæmi er væntanlega megin skýringin á, að ekki gekk betur. Eitt er víst, að ekki skortir íslensku piltana hæfileika. Og eins og Benedikt Jóhannesson sagði í lokahófi keppninnar, þá getum við verið stoltir af því að hafa orðið efstir meðal þeirra þjóða, sem eiga ekki lönd að Eystrasalti.

**Lokakeppnin 4. mars 1995**

Seinni hluti framhaldsskólakeppninnar var haldinn í Háskóla Íslands laugardaginn 4. mars 1995 og var þar 31 þátttakandi. Dómnefnd ákvað að veita þremur hæstu keppendunum peningaverðlaun, en í efstu tíu sætum urðu:

1. Georg Lúðvíksson, Menntaskólanum í Reykjavík.
2. Kári Ragnarsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð.
3. Guðmundur Hafsteinsson, Menntaskólanum í Reykjavík.
4. Einar Guðfinnsson, Menntaskólanum í Reykjavík.

5.–8. Hjördís Sigurðardóttir, Menntaskólanum í Reykjavík.
5.–8. Jóhann T. Sigurðsson, Menntaskólanum á Akureyri.
5.–8. Sveinn B. Sigurðsson, Menntaskólanum í Reykjavík.
5.–8. Þórdís Linda Þórarinsdóttir, Menntaskólanum við Hamrahlíð.

9. Hannes Helgason, Flensborgarskóla í Hafnarfirði.
10. Snævar Sigurðsson, Fjölbrautaskólanum í Breiðholti.

Íslenzka stærðfræðafélagið og Félag raungreinakennara í framhaldsskólum stóðu sem fyrr að keppninni, sem nú var haldin í ellefta sinn. Í framkvæmdanefnd hennar voru núna Bjarni Gunnarsson, Einar Arnalds

Jónasson og Lárus H. Bjarnason af hálfu Félags raungreinakennara og Jón Kr. Arason, Ragnar Sigurðsson og Rögnvaldur G. Möller af hálfu Íslenzka stærðfræðafélagsins. Fjölmargir félagsmenn úr báðum félögum aðstoðuðu við framkvæmd keppninnar og yfirferð úrlausna.

Eins og mörg undanfarin ár studdu fyrirtækin Ístak hf. og Steypustöðin hf. keppnina. Þau greiddu allan kostnað við keppnina og veittu verðlaun.

Hér á eftir fara dæmin í lokakeppninni, en veittar voru fjórar klukkustundir til að leysa þau.

**1. dæmi.** Fimm konur Bryndís, Eydís, Freydís, Hafdís og Vigdís hafa sett upp hatta, sem eru annað hvort hvítir eða svartir að lit. Engin kvennanna veit, hvernig litan hatt hún sjálf er með á höfðinu. Nú er vitað, að kona með svartan hatt segir ávallt satt en kona með hvítan hatt lýgur alltaf. Nú setja konurnar fram eftirfarandi staðhæfingar:

| | |
|---|---|
| Bryndís: | Ég sé þrjá svarta og einn hvítan hatt. |
| Eydís: | Ég sé fjóra hvíta hatta. |
| Freydís: | Ég sé einn svartan og þrjá hvíta hatta. |
| Hafdís: | Ég sé fjóra svarta hatta. |

Finnið út frá þessu litina á höttum kvennanna fimm.

**2. dæmi.** Látum $a_1, \ldots, a_n$ vera ólíkar oddatölur, þannig að engin frumtala stærri en 5 gangi upp í neinni þeirra.

Sýnið, að

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

**3. dæmi.** Látum $m$ og $n$ vera náttúrulegar tölur og gerum ráð fyrir, að talan 24 gangi upp í $mn + 1$.

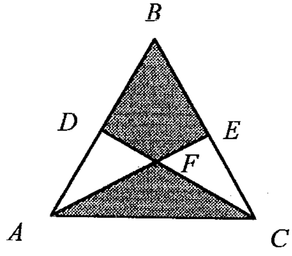
Sýnið, að 24 gangi upp í $m + n$.

**4. dæmi.** Sýnið, að jöfnurnar

$$x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}} \quad \text{og} \quad x = a + \sqrt{x}$$

séu jafngildar og finnið allar lausnir á þeim.

**5. dæmi.** Gefinn er jafnhliða þríhyrningur $ABC$ og innan í honum er punkturinn $F$, þannig að flatarmál þríhyrningsins $AFC$ er jafnt flatarmáli ferhyrningsins $DBEF$. Ákvarðið hornið $\angle EFC$.
(*Leiðbeining*: Athugið, að tveir þríhyrningar eru eins, ef þeir hafa sama flatarmál, eina jafn langa hlið og eitt horn jafn stórt.)




**6. dæmi.** Er hægt að koma ferningi með hliðalengd 21 inn í tening með kantlengd 20?

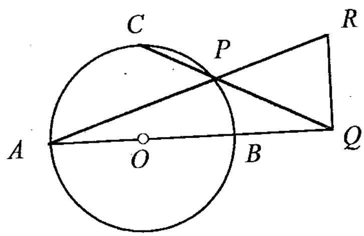
## Norræna keppnin 15. mars 1995

Miðvikudaginn 15. mars fór *níunda norræna stærðfræðikeppnin* fram. Þeim sem urðu í tíu efstu sætunum í úrslitakeppninni 4. mars, var boðið að taka þátt í henni. Vegna kennaraverkfallsins varð að breyta út af þeirri hefð, að keppnin færi fram í skólum þátttakenda. Var þeim þátttakendum, sem búa í Reykjavík og nágrenni hóað saman í Háskóla Íslands, en einn þátttakendanna var á Akureyri og leit Níels Karlsson til með honum.

Alls voru 69 þátttakendur í keppninni þetta árið og sáu Finnar að þessu sinni um framkvæmd keppninnar, þ.e. val á verkefnum og samræmingu á stigagjöf. Efstur varð Uoti Urpala frá Finnlandi, sem hlaut 18 stig af 20 mögulegum. Í öðru sæti varð Marcus Better frá Svíþjóð með 16 stig. Bestum árangri Íslendinganna náði Georg Lúðvíksson úr Menntaskólanum í Reykjavík, en hann fékk 10 stig og varð í 18.–28. sæti.

Verkefnin í norrænu stærðfræðikeppninni fylgja hér á eftir, en veittar voru fjórar klukkustundir til að leysa þau. Hvert dæmi vegur fimm stig.

**1. dæmi.** Látum $AB$ vera miðstreng í hring með miðju $O$. Veljum punkt $C$ á hringnum, þannig að $OC$ standi hornrétt á $AB$. Látum $P$ vera einhvern punkt



á hringnum milli $C$ og $B$ og látum línurnar $CP$ og $AB$ skerast í $Q$. Veljum $R$ á $AP$, þannig að $RQ$ standi hornrétt á $AB$.
Sýnið, að $|BQ| = |QR|$.

**2. dæmi.** Skilaboð eru skráð sem runur af núllum og einum. Aðeins eru leyfðar runur með í mesta lagi tveimur núllum eða tveimur einum í röð. (Til dæmis er runan 011001 leyfð en 011101 ekki.)
Ákvarðið fjölda leyfilegra runa með nákvæmlega tólf tölustöfum.

**3. dæmi.** Látum $n \geq 2$ og látum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vera rauntölur, þannig að

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0 \quad \text{og} \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Látum $M: = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Sýnið, að

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{1}$$

Ákvarðið, hvort (1) geti gilt sem jafna.

**4. dæmi.** Sýnið, að til séu óendanlega margir mismunandi (ekki eins) þríhyrningar $T$, sem uppfylla eftirfarandi:
(a) Lengdir hliða $T$ eru heilar tölur í röð.
(b) Flatarmál $T$ er heil tala.

## Ólympíuleikarnir í júlí 1995

*Alþjóðlegu Ólympíuleikarnir í stærðfræði* fara í þetta sinn fram í Toronto í Kanada dagana 16. til 25. júlí. Lið Íslands í ár skipa þeir Einar Guðfinnsson, nemandi í Menntaskólanum í Reykjavík, Georg Lúðvíksson, nýstúdent úr sama skóla, Hannes Helgason, nemandi í Flensborgarskóla í Hafnarfirði, og Kári Ragnarsson, nemandi í Menntaskólanum við Hamrahlíð. Þeir fjórir ásamt þremur öðrum framhaldsskólanemum, sem sýndu góðan árangur á liðnum vetri, gangast nú undir stranga þjálfun í þrautalausnum við Háskóla Íslands. Fulltrúi Íslands í dómnefnd Ólympíuleikanna verður Lárus H. Bjarnason, kennari við Menntaskólann við Hamrahlíð, og fararstjóri verður Einar Arnalds Jónasson, kennari við Fjölbrautaskólann í Breiðholti.

## ALÞJÓÐAÞING STÆRÐFRÆÐINGA Í ZÜRICH

*Alþjóðaþing stærðfræðinga* var haldið í Zürich dagana 3.–11. ágúst í fyrrasumar. Þetta var í þriðja sinn, sem þingið er haldið þar, því þar var fyrsta þingið árið 1897 og svo aftur 1932. Engin önnur borg hefur hýst alþjóðaþing stærðfræðinga oftar en einu sinni.

Fyrsta dag þingsins voru Fields-verðlaunin afhent og einnig þau, sem kennd eru við Rolf Nevanlinna, og fluttir voru fyrirlestrar til að kynna verk verðlaunahafa. Til Fields-verðlaunanna var stofnað árið 1924, og hlutu þau að þessu sinni Belgi, tveir Frakkar og Rússi: *Jean Bourgain* fyrir víðfeðm verk á sviðum stærðfræðigreiningar, *Pierre-Louis Lions* fyrir störf að ólínulegum hlutafleiðujöfnum, *Jean-Christophe Yoccoz* fyrir störf á sviði hreyfikerfa og *Efim I. Zelmanov* fyrir störf í grúpufræði. Nevanlinna-verðlaunin fyrir störf á sviði upplýsingafræði, sem voru veitt í fyrsta sinn árið 1982, hlaut *Avi Wigderson* frá Jerúsalem.

Eins og kunnugt er sá Alfred Nobel til þess, að engin Nóbelsverðlaun eru í stærðfræði, og vilja margir líta svo á, að Fields-verðlaunin séu þeirra ígildi, þótt þar sé hámarksaldur við fertugt. Afrek Andrews Wiles verður þá ekki þeirra verðlauna vert! En þess má þá geta, að í fyrsta sinn í 93 ára sögu Nóbelsverðlauna voru þau veitt núna í vetur fyrir hreina stærðfræði. Bandaríkjamaðurinn *John Nash* hlaut hagfræðiverðlaunin (ásamt tveimur öðrum) fyrir verk frá því um 1950 á sviði leikjafræði.

Allt þinghald, sem ætlað var þingheimi óskiptum, um 2400 manns, fór fram í *Zürich Kongresshaus* við Zürich-vatn. Það byggingabákn er sambyggt hinum víðfræga tónleikasal *Tonhalle*, sem Johannes Brahms vígði árið 1895, en sérstakir tónleikar voru haldnir þar fyrir þinggesti. Að öðru leyti var þinghald í Svissneska verkfræðiháskólanum, *Eidgenössische Technische Hochschule*, og Zürich-háskóla.

Þýzka stærðfræðifélagið, *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, mun halda næsta alþjóðaþing í Berlín dagana 18.–28. ágúst 1998. Alþjóðaþingið hefur einungis einu sinni verið haldið í Þýzkalandi, það var þriðja þingið árið 1904 í Heidelberg. Upplýsingar um þingið í Berlín eru þegar veittar á veraldarvef, http://icm98.zib-berlin.de, og er þar jafnframt tekið við forskráningu á þingið.

*Skarphéðinn Pálmason:*

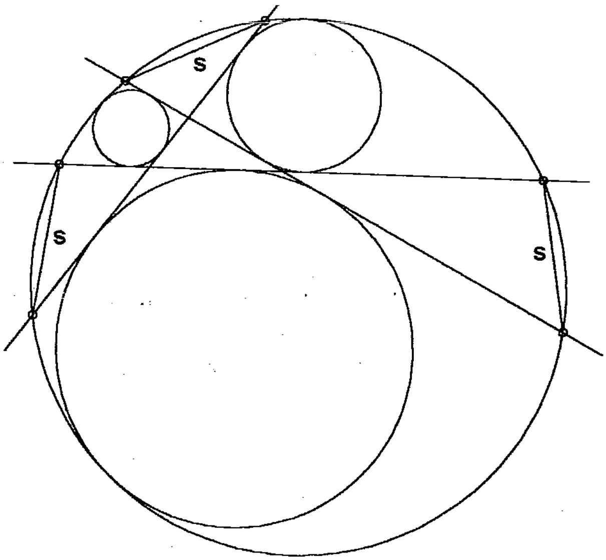
# ENN UM HRINGA SEM SNERTAST

Eins og getið var um í síðasta tölublaði *Fréttabréfs Íslenzka stærðfræðafélagsins* [2] birti dr. Ólafur Daníelsson grein árið 1945 í danska tímaritinu *Matematisk Tidsskrift* með fyrirsögninni *Lidt elementær Geometri* [6]. Þar sannar hann þá setningu, *að hringur, sem umlykur og snertir alla ytri snertihringa þríhyrnings, hafi geisla*

$$\frac{r^2+s^2}{4r}, \tag{1}$$

*þar sem $r$ er geisli innritaðs hrings og $s$ er hálft ummál þríhyrningsins.* Áður hafði hann birt grein með sömu fyrirsögn í sama tímariti [5]. Þar sannar hann *setningu Feuerbachs* um, að *níupunkta hringur þríhyrnings snerti alla ytri snertihringana og auk þess innri snertihringinn,* en níupunkta hringur þríhyrnings er hringur gegnum alla miðpunkta hliðanna, en sá hringur fer einnig gegnum fótpunkta hæðanna og auk þess gegnum punkta á hæðunum, sem eru mitt á milli skurðpunkts hæðanna og hornpunkta þríhyrningsins. Þessi setning var fyrst sönnuð af K. W. Feuerbach (1800–1834). [1]

Ég var mjög hrifinn af setningu dr. Ólafs um geisla utanverða hringsins, sem hann kallar *Ydercirklen* í grein sinni, og þegar ég eignaðist mína fyrstu forritanlegu vasatölvu árið 1978 skemmti ég mér við að láta hana reikna með ítrekunaraðferðum lengdir hinna ýmsu strika, sem fram koma á mynd með hringnum, þegar lengdir hliðanna í þríhyrningnum voru settar inn í tölvuna. Tölvu þessa var hægt að forrita með allt að 1000 forritunarskrefum, sem þótti gott í þá daga. Var ég að leita að einhverjum tengslum milli lengda þessara strika og lengda hliðanna. Mér til undrunar kom í ljós, að strengirnir þrír, sem merktir eru $s$ *á 1. mynd* reyndust alltaf hafa lengd jafna hálfu ummáli þríhyrningsins. Ég hélt, að það hlyti að vera einfalt mál að sanna þetta, en það reyndist ekki vera. Ég sýndi Sigurkarli Stefánssyni þessa uppgötvun, og fundum við báðir óháð hvor öðrum sannanir á þessu. Þessar sannanir byggðust á setningu dr. Ólafs um geisla ytri hringsins, sem Sigurkarl vildi kalla *úthringinn,* og voru þær nokkuð flóknar.




*1. mynd*

Ég hef öðru hverju síðan velt því fyrir mér, hvort ekki væri til einhver einfaldari útleiðsla á þessu. Svo var það, að ég las í *Fréttabréfi Íslenzka stærðfræðafélagsins* frá febrúar 1993 hina skemmtilegu grein eftir Robert Magnus um hringa, sem snertast, og hina útvíkkuðu setningu Ptólomeosar (setningu Caseys) [7], og þar var þá komin sönnunaraðferð, sem ekki byggðist á setningu dr. Ólafs.

Robert Magnus skrifar annars, að setningu Ptólomeosar sjálfa sé yfirleitt að finna í námsefni menntaskóla, en ég hygg, að það sé ekki lengur rétt hér á landi. Eftir að gamla landsprófið var fellt niður komu nemendur verr undirbúnir í framhaldsskóla en áður var, og urðu framhaldsskólarnir þá að taka að sér að kenna ýmislegt, sem áður var kennt í grunnskólum. Varð þá í staðinn að draga úr kennslu í öðru og sleppa ýmsu skemmtilegu efni eins og dráttardæmum. Efni úr rúmfræði var fremur sleppt en öðru, þar sem margt í rúmfræðinni er strangt tekið ekki nauðsynlegt sem undirbúningur undir háskólanám. Er þetta þó slæmt, þar sem rúmfræðin er að mínu mati betur til þess fallin en flest annað námsefni í stærðfræði að vekja áhuga nemenda á námsgreininni. Eitthvað er þó nú orðið bætt úr þessu fyrir þá nemendur, sem eru svo heppnir að fá sérstaka kennslu háskólakennara sem undirbúning undir stærðfræðikeppni erlendis.

**Strengirnir í úthringnum.** Snúum okkur þá að sönnuninni. Köllum hringinn, sem umlykur og snertir alla ytri snertihringa þríhyrnings, *úthringinn*, og látum $s$ vera hálft ummál þríhyrningsins.

Þá á að sanna eftirfarandi setningu:

**Setning 1.** *Ef tvær hliðar þríhyrnings eru framlengdar út fyrir þann hornpunkt, sem þær hafa sameiginlegan, og látnar skera úthringinn, þá er lengd strengsins milli skurðpunktanna $s$.*

Á *2. mynd* eru hliðar $\triangle ABC$ eins og venjulega kallaðar $a$, $b$ og $c$. Þá er eftirfarandi vel þekkt:

$$\begin{aligned} 2s &= a+b+AE+EB = CA_b+CB_a, \\ CA_b &= CB_a = s, \\ BE &= BB_a = CC_a = s-a, \\ AE &= AA_b = CC_b = s-b, \\ AA_c &= BB_c = s-c. \end{aligned} \tag{2}$$

Lítum á punktinn $\Sigma_1$ sem hring með geisla 0, en $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ og $\Sigma_4$ eru ytri snertihringar þríhyrningsins $ABC$. Látum $(\Sigma_i\Sigma_j)$ tákna lengd ytra snertilstriks milli hringanna $\Sigma_i$ og $\Sigma_j$. Þar sem hringarnir $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ og $\Sigma_4$ snerta úthringinn innanvert í þessari röð, fæst samkvæmt hinni útvíkkuðu setningu Ptólomeosar [7]:

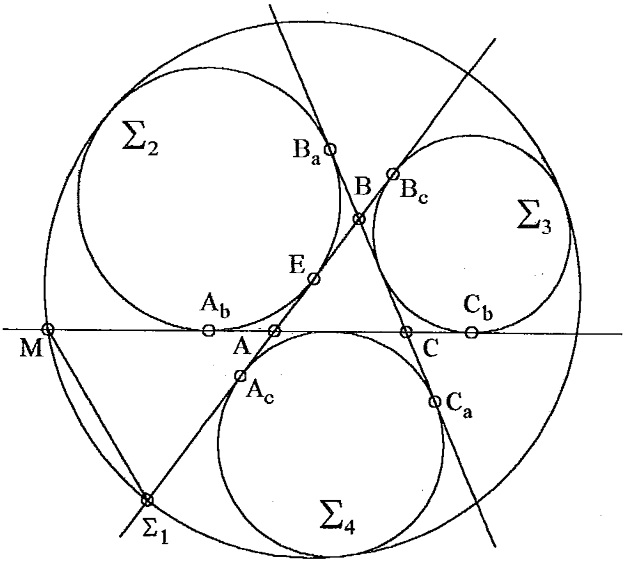
$$(\Sigma_1\Sigma_2)\cdot(\Sigma_3\Sigma_4)+(\Sigma_1\Sigma_4)\cdot(\Sigma_2\Sigma_3) = (\Sigma_1\Sigma_3)\cdot(\Sigma_2\Sigma_4).$$

Látum nú lengd striksins $\Sigma_1 A$ vera $x$. Þá er

$$\begin{aligned} (\Sigma_1\Sigma_2) &= \Sigma_1 E = x+(s-b), & (\Sigma_3\Sigma_4) &= A_cB_c = a+b, \\ (\Sigma_1\Sigma_4) &= \Sigma_1 A_c = x-(s-c), & (\Sigma_2\Sigma_3) &= A_bC_b = a+c, \\ (\Sigma_1\Sigma_3) &= \Sigma_1 B_c = x+s, & (\Sigma_2\Sigma_4) &= B_aC_a = b+c. \end{aligned} \tag{3}$$

Af þessu fæst:

$$(x+(s-b))(a+b)+(x-(s-c))(a+c) = (x+s)(b+c).$$




*2. mynd*

Sé nú margfaldað upp úr þessu og notað $2s = a + b + c$, fæst:

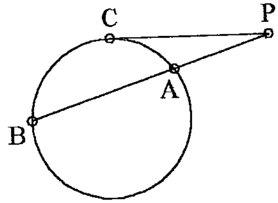
$$x = \Sigma_1 A = \frac{s}{a} b.$$

Þar með fæst auðvitað einnig $MA = \frac{s}{a} c$. Af þessu leiðir, að $\Delta ABC$ og $\Delta AM\Sigma_1$ eru einshyrndir með hlutfall milli tilsvarandi hliða sem er $\frac{s}{a}$, en það gefur aftur, að $\Sigma_1 M = \frac{s}{a} a = s$.

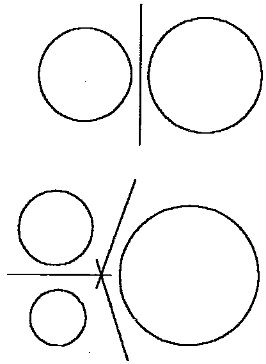
Þarna er þá komin nokkuð einföld sönnun, ef menn gefa sér hina útvíkkuðu setningu Ptólomeosar, sem Robert Magnus sannaði í grein sinni. Ef til vill er hægt að finna aðrar einfaldar sannanir á þessu.

**Setning dr. Ólafs.** Þar sem fáir hafa undir höndum *Matematisk Tidsskrift* frá 1945, datt mér í hug að endursegja sönnun dr. Ólafs Daníelssonar á setningunni um geisla úthringsins. Sumt af því, sem hann notar þar, var áður hluti af námsefni menntaskóla, en er nú dottið út. Er það flestum lesendum þessarar greinar kunnugt, og fer ég því einungis lauslega yfir það. Íslenzk heiti erlendra orða, sem notuð eru, eru ef til vill ekki öllum kunn.

Fyrst er það þá *mið* (d. *potens*, e. *power*) punkts $P$ við hring, en það er margfeldi lengda strikanna $PA$ og $PB$ á *3. mynd*. Auðvelt er að sýna með einshyrndum þríhyrningum, að það er óháð því, hvernig strikið, sem sker hringinn, er dregið frá punktinum $P$. Ef strikið er snertill $PC$, er miðið $PC^2$. Ef $P$ er innan í hringnum, er miðið skilgreint á líkan hátt, og er það þá neikvætt. Þá er það *miðalína* (d. *radikalakse*) tveggja hringa, en það er leg þeirra punkta, sem hafa sama mið við báða hringana. Miðalínan er alltaf hornrétt á miðtengilínu hringanna. Ef gefnir eru þrír hringar með miðjur, sem eru ekki á beinni línu, er *miðamiðja* (d. *radikalcentrum*) þeirra þar, sem miðalínurnar skerast (sjá *4. mynd*). Þessi þrjú orð bjó dr. Ólafur til, og eru þau í kennslubók hans í rúmfræði [4].

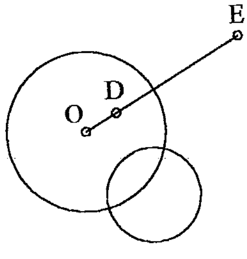



*3. mynd*



*4. mynd*

Þá er það *hringhverfing* (d. *inversion*) í gefnum hring. Það er vörpun sléttunnar á sjálfa sig, þannig að á *5. mynd* varpast punktarnir $D$ og $E$ hvor á annan, ef $OD \cdot OE = R^2$, þar sem $O$ er miðja hringsins og $R$ er geisli hans. Alkunnugt er, að við hringhverfingu varpast hringur á hring, ef hringurinn fer ekki gegnum $O$. Ef hann fer gegnum $O$, þá varpast hann á línu. Á sama hátt varpast lína á hring, sem fer gegnum $O$, nema línan fari sjálf gegnum $O$. Þá varpast hún á sjálfa sig. Hér verðum við að líta svo á, að $O$ varpist í óendanlega fjarlægan punkt og óendanlega fjarlægur punktur varpist á $O$. Hringur, sem sker hringhverfuhringinn undir réttu horni (sjá *5. mynd*), varpast



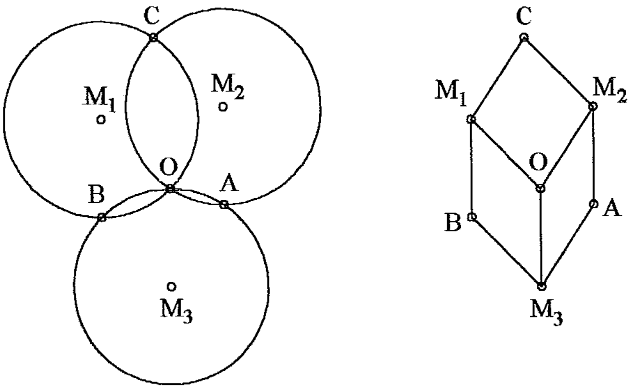

*5. mynd*

á sjálfan sig, þar sem fjarlægð $O$ frá skurðpunktum hringanna hafin í annað veldi er mið $O$ við hringinn.

Loks er notuð í sönnuninni eftirfarandi setning, sem við sönnum hér fyrst:

**Setning 2.** *Ef þrír jafnstórir hringar skerast í einum punkti, þá eru aðrir skurðpunktar þeirra á hring, sem er jafnstór hinum.*

Sá ég nýlega, að sönnun á þessu var einmitt eitt af þeim verkefnum, sem lögð voru fyrir nemendur til undirbúnings undir stærðfræðikeppni erlendis.




*6. mynd*

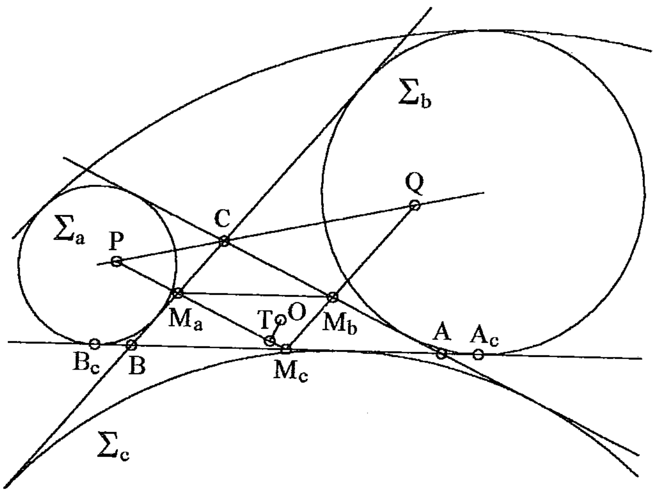
Setninguna má til dæmis sýna á eftirfarandi hátt. Á *6. mynd* skerast hringarnir allir í punktinum $O$. Miðjur þeirra eru $M_1$, $M_2$ og $M_3$ og aðrir skurðpunktar $A$, $B$ og $C$. Á myndinni til hægri sést afstaða punktanna sjö. Strikin níu á myndinni eru öll jafnlöng geisla hringanna og mynda þau þrjá tigla. Á myndinni eru því þrisvar sinnum þrjú samsíða strik, og er þá ekki erfitt að sanna, að $\triangle ABC$ er eins og $\triangle M_1M_2M_3$, en sá þríhyrningur hefur miðju umritaðs hrings í $O$ og hefur því sama geisla og hinir. Ef afstaða hringanna er önnur má átta sig á þessu á svipaðan hátt.

Þá er komið að setningu dr. Ólafs [6]. Hann setur hana þannig fram:

**Setning 3.** *Ef tveir þríhyrningar hafa jafnstórt flatarmál og jafnstórt ummál, þá hafa þeir jafnstóra úthringa.*

Þar sem flatarmál þríhyrnings er margfeldi geisla innritaðs hrings $r$ og hálfs ummálsins $s$, er þetta hið sama og að segja, að geisli úthringsins sé aðeins háður $r$ og $s$.

Í sönnuninni er fyrst fundin miðamiðja allra ytri snertihringanna og síðan geisli hrings, sem hefur miðamiðjuna fyrir miðju og sker alla ytri snertihringana undir réttum hornum. Við hringhverfingu í þessum hring varpast þá allir ytri snertihringarnir á sjálfa sig en níupunkta hringurinn á úthringinn.




*7. mynd*

Við látum $M_a$, $M_b$ og $M_c$ vera miðpunkta hliðanna $a$, $b$ og $c$ í $\triangle ABC$ og látum $\Sigma_a$, $\Sigma_b$ og $\Sigma_c$ vera ytri snertihringana eins og sýnt er á *7. mynd.* Strikin $M_cM_a$ og $M_cM_b$ eru framlengd, þannig að þau skeri miðtengilínu hringanna $\Sigma_a$ og $\Sigma_b$. Skurðpunktarnir heita $P$ og $Q$, og er þá auðvelt að sjá, að $\triangle M_aPC$ er jafnarma, þar sem miðtengilínan helmingar grannhorn hornsins $C$ í $\triangle ABC$ og strikið $M_cP$ er samsíða hliðinni $b$. Þess vegna eru hornin við $P$ og $C$ í þríhyrningnum jafnstór. Á sama hátt sést, að $\triangle M_bCQ$ og $\triangle M_cPQ$ eru jafnarma. Þá er

$PM_a = CM_a = \dfrac{a}{2}$. Einnig er $M_cM_a = \dfrac{b}{2}$, þannig að $M_cP = \dfrac{a+b}{2}$. Nú er vitað samkvæmt (2) og (3), að

$$B_cA_c = a + b \quad \text{og} \quad BB_c = AA_c = s - c,$$

svo að við fáum fjögur jafnlöng strik,

$$M_cB_c = M_cA_c = M_cP = M_cQ. \tag{4}$$

Samkvæmt fyrstu jöfnunni hér hefur $M_c$ sama mið við hringana $\Sigma_a$ og $\Sigma_b$ og er þá á miðalínu þeirra, og miðalínan er þess vegna lína gegnum $M_c$ hornrétt á miðtengilínu hringanna $\Sigma_a$ og $\Sigma_b$. Miðalínan helmingar því hornið $M_c$ í $\triangle M_aM_bM_c$ og fer gegnum punktinn $O$, sem er miðja innritaðs hrings í $\triangle M_aM_bM_c$. En geisli hans er $OT = \dfrac{r}{2}$, þar sem $\triangle M_aM_bM_c$ er einshyrndur $\triangle ABC$ en með helmingi styttri hliðar. Á sama hátt sést, að hinar tvær miðalínur ytri snertihringanna hljóta að fara gegnum punktinn $O$, og er því $O$ miðamiðja ytri snertihringanna. Þá er að finna geisla hrings með miðju í $O$, sem sker $\Sigma_a$, $\Sigma_b$ og $\Sigma_c$ undir réttum hornum. Hér notar dr. Ólafur, að $P$ og $Q$ eru svokallaðir *núllhringar* í þeim hringavendi, sem hringarnir $\Sigma_a$ og $\Sigma_b$ ákvarða, þar sem $P$ og $Q$ eru á miðtengilínu þeirra og jöfnur (4) gilda, en af því leiðir aftur, að allir hringar, sem fara gegnum $P$ og $Q$, skera $\Sigma_a$ og $\Sigma_b$ undir réttum hornum. Mun ég ekki skýra þetta nánar, þar sem einnig er hægt að sýna það á eftirfarandi hátt.

Gerum þá ráð fyrir, að á *8. mynd* séu hornin við $R$ og $S$ rétt og strikin $OP$ og $OS$ séu jafnlöng. Þá fæst:

$$OP^2 = OR^2 + RP^2$$

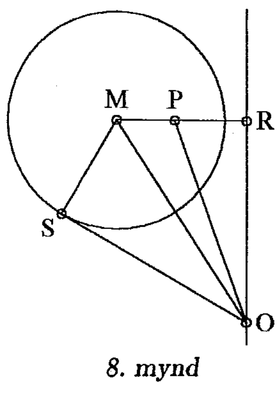
og

$$OR^2 + RM^2 = OS^2 + MS^2.$$

Séu jöfnurnar lagðar saman og notað $OP = OS$, fæst

$$RP^2 = RM^2 - MS^2,$$

sem sýnir, að lengd striksins $RP$ er óháð því, hvar á línunni $O$ er. (Þessa skýringu hef ég frá Sigurkarli Stefánssyni [8].)




*8. mynd*

Af þessu leiðir þá, að sérhver punktur á miðalínu $\Sigma_a$ og $\Sigma_b$ hefur mið við þessa hringa, sem er jafnt fjarlægð hans frá $P$ í öðru veldi. Nú er

$$OP^2 = OT^2 + TP^2, \quad \text{en} \quad OT = \frac{r}{2} \quad \text{og} \quad TM_c = \frac{s-c}{2},$$

þar sem strik í $\triangle ABC$ frá $C$ til snertipunkts innritaðs hrings á hliðinni $a$ hefur lengd $s-c$. Þá er

$$TP = M_cP - TM_c = \frac{a+b}{2} - \frac{s-c}{2} = \frac{s}{2},$$

og þess vegna er mið $O$ við ytri snertihringana $OP^2 = \frac{1}{4}\left(r^2 + s^2\right)$. Við hringhverfingu í hring með miðju í $O$ og geisla, sem er $\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}$, varpast því ytri snertihringarnir á sjálfa sig.

Næst er þá að athuga, hvert níupunkta hringurinn varpast við þessa hringhverfingu. Þar sem hann snertir alla utanverðu snertihringana samkvæmt setningu Feuerbachs, hlýtur hann að varpast á úthringinn. Nú er punkturinn $O$ jafnlangt frá línunum $M_aM_b$, $M_bM_c$ og $M_aM_c$, og varpast þessar línur því á jafnstóra hringa, sem allir fara gegnum $O$. Þar sem níupunkta hringurinn er umritaður hringur um $\triangle M_aM_bM_c$, hlýtur hann þá að varpast á hring, sem fer gegnum skurðpunkta þessara hringa. En þeir eru allir jafnstórir, og verður því úthringurinn jafnstór þeim samkvæmt setningu 2. Þarf þá aðeins að finna geisla eins þessara hringa, til dæmis þess hrings, sem $M_aM_c$ varpast á. Sá punktur, sem næstur er $O$ á $M_aM_c$, er $T$, og er $OT = \frac{r}{2}$. En fjarlægð $O$ frá þeim punkti, sem $T$ varpast á, finnst af jöfnunni

$$x\,\frac{r}{2} = \frac{r^2+s^2}{4},$$

þar sem $x$ er þvermál úthringsins, svo að geisli hans er $\dfrac{r^2+s^2}{4r}$.

Þar með höfum við lokið sönnun á setningu dr. Ólafs.

**Japönsk rúmfræðidæmi.** Í síðasta tölublaði *Fréttabréfs* [2] var þess getið, að setningin um geisla úthringsins hafi verið Japönum kunn um aldamótin 1800 og í japönskum hofum hafi hangið málaðar töflur undir þakskeggi með rúmfræðimyndum. Í nýlegri bók eftir H. Fukagawa og D. Pedoe [3] er lýst aðferð Japana til að leysa þetta vandamál. Þar er það meðal um 250 rúmfræðidæma og eru þau frá þeim tíma, þegar Japanar voru nær algerlega einangraðir frá Vesturlöndum á 17. og 18. öld og á mestum hluta 19. aldar. Japanar hafa haft sérstakt dálæti á dæmum með hringum, sporbaugum og kúlum, og eru öll dæmin í bókinni þeirrar gerðar. Vegna einangrunar sinnar virðast þeir ekkert hafa þekkt til rúmfræði á Vesturlöndum og hafa jafnvel uppgötvað ýmsar setningar í rúmfræði áður en þær voru fundnar á Vesturlöndum. Þannig var *setningar Caseys* (útvíkkunar á setningu Ptólomeosar) til dæmis getið í Japan árið 1830, en Casey setti hana fyrst fram árið 1857, en þá að vísu á fullkomnara formi. Lítur út fyrir, að Japanar hafi ekki þekkt neitt til hringhverfingar og er því aðferð þeirra til að leysa dæmið um geisla úthringsins flóknari en aðferð dr. Ólafs. Höfðu þeir áhuga á að finna geisla úthringsins og einnig geisla níupunkta hringsins táknaða við geisla ytri snertihringanna, sem við skulum kalla $r_a$, $r_b$ og $r_c$. Virðast þeir ekki hafa vitað um nein tengsl níupunkta hringsins við þríhyrninginn önnur en þau, að hann væri hringur, sem ytri snertihringarnir snertu utanvert. Til að finna geisla hringanna rituðu þeir sex jöfnur, sem gáfu tengsl $r_a$, $r_b$ og $r_c$ við önnur strik í mynd af þríhyrningi og úthring hans. Eftir flókna algebrureikninga komust þeir að niðurstöðu. Hefur það sjálfsagt kostað nokkra þolinmæði, þar sem ekki er árennilegt að leysa saman jöfnurnar, sem byrjað var með. Fundu þeir, að geisli úthringsins væri:

$$\frac{s^4}{4r_ar_br_c} + \frac{r_ar_br_c}{4s^2}$$

og geisli níupunkta hringsins:

$$\frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)}{8\,(r_ar_b + r_br_c + r_cr_a)}.$$

Þessu getum við svo breytt í $\frac{r^2+s^2}{4r}$ annars vegar og $\frac{R}{2}$ hins vegar með því að nota eftirfarandi þekktar reglur:

$$F = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

og

$$abc = 4RF,$$

þar sem $R$ er geisli umritaðs hrings og $F$ er flatarmál $\triangle ABC$.

**Aðrir snertihringar.** Að lokum má geta þess, að hægt er að fá dálitla viðbót við setningu dr. Ólafs.

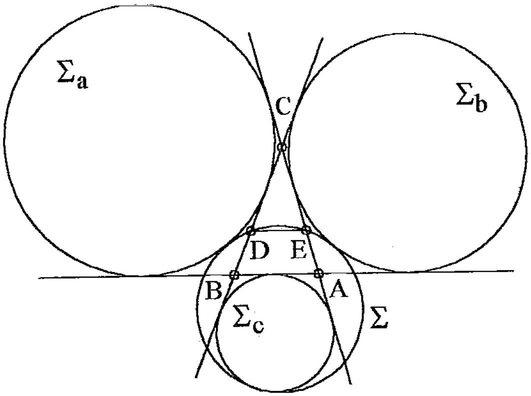
Þar sem línan $AB$ á *7. mynd* snertir hringana $\Sigma_a$, $\Sigma_b$ og $\Sigma_c$, varpast hún við sömu hringhverfingu og notuð var við sönnunina á setningu 3 á hring gegnum $O$, sem $\Sigma_a$ og $\Sigma_b$ snerta utanvert, en $\Sigma_c$ snertir innanvert. Þennan hring skulum við kalla $\Sigma = \Sigma^c_{ab}$. Er þetta einn þeirra fimm hringa, sem snerta utanverða snertihringa $\triangle ABC$. Þrír þeirra eru hliðstæðir, þ.e. $\Sigma^a_{bc}$, $\Sigma^b_{ca}$ og $\Sigma^c_{ab}$, en hinir eru úthringurinn og níupunkta hringurinn.

Til að finna geisla þessa hrings $\Sigma$ þarf að finna fjarlægð punktsins $O$ frá $AB$ á *7. mynd*. Er ekki erfitt að sjá, að hún er $\frac{h_c}{2} - \frac{r}{2}$, þar sem $h_c$ er hæðin á hliðina $c$ í $\triangle ABC$. Þar sem $ch_c = 2rs$, fæst af þessu, að fjarlægðin er $\frac{a+b}{c}\frac{r}{2}$. Á svipaðan hátt og við fundum geisla úthringsins fæst nú geisli þessa hrings af jöfnunni

$$x\frac{a+b}{c}\frac{r}{2} = \frac{r^2+s^2}{4},$$

þar sem $x$ er þvermál hringsins. Geisli hringsins $\Sigma$ er því $\frac{c}{a+b}\frac{r^2+s^2}{4r}$, sem við höfum til samanburðar við geisla úthringsins (1).

Síðan má með hinni útvíkkuðu setningu Ptólomeosar einnig fá viðbót við setningu 1 hér að framan. Skurðpunkta hliðanna $a$ og $b$ í $\triangle ABC$ við hringinn $\Sigma$ köllum við $D$ og $E$ eins og á *9. mynd.* Á hliðstæðan hátt og í sönnun á setningu 1 sönnum við, að $DE = \frac{c}{a+b}s$ og að $DE$ er




*9. mynd*

samsíða hliðinni $c$. Til að ákvarða lengdina á strikinu $CE$ má þá líta á punktinn $E$ sem hring með geisla 0, en þegar hinni útvíkkuðu setningu Ptólomeosar er beitt, þarf hér að hafa í huga, að við höfum snertihringa bæði að utanverðu og innanverðu. En þetta læt ég lesandanum eftir að gera.

## Heimildir

1. Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968.
2. *Fréttabréf Íslenzka stærðfræðafélagsins* **6** (1994), bls. 3 og 46.
3. H. Fukagawa og D. Pedoe, *Japanese Temple Geometry Problems — san gaku*, Charles Babbage Research Centre, Winnipeg 1989.
4. Ólafur Daníelsson, *Um flatarmyndir, kenslubók í rúmfræði*, Rvík 1920.
5. ———, *Lidt elementær Geometri*, Matematisk Tidsskrift A (1940), 29–35.
6. ———, *Lidt elementær Geometri*, Matematisk Tidsskrift A (1945), 85–86.
7. Robert Magnus, *Hringar sem snertast*, Fréttabréf Íslenzka stærðfræðafélagsins **5** (1993), 28–39.
8. Sigurkarl Stefánsson, óbirt gögn.

*Jón Ragnar Stefánsson:*

# EIGNARÁKVÖRÐUN FYRIR HLUTAFÉLÖG MEÐ GAGNKVÆMRI EIGNARAÐILD

Í eftirmælum mínum eftir Kr. Guðmund Guðmundsson tryggingastærðfræðing í síðasta *Fréttabréfi* vék ég að því, að grein hans í *Nordisk Matematisk Tidskrift* frá árinu 1960 [1] væri dæmi um fræðilegan afrakstur af ráðgjöf hans fyrir stjórnvöld. Það viðfangsefni, sem þar um ræddi, var, hvernig leggja ætti á hinn svokallaða *stóreignaskatt*, sem ákveðinn var með lögum nr. 44 frá 1957. Svo fór reyndar, að þau var búið að nema úr gildi, þegar hin fræðilega úttekt birtist. Það ákvæði laganna, sem Guðmundur fjallaði um og stóð í mönnum, hvort framkvæmanlegt væri, var að finna í 1. mgr. 4. gr., þar sem sagði:

> *Hreinum eignum félaga* [ ... ] *skal skipt niður á eigendur félaganna í réttu hlutfalli við hlutafjár- og stofnfjáreign þeirra hvers um sig, og teljast þær eignir með öðrum eignum einstaklinga við skattálagningu.*

Ljóst er, að margslungin gagnkvæm eignaraðild veldur því, að slíkt lagaákvæði er óárennilegt, og þurfa þá ekki að koma til hreinar samsteypur af hlutafélögum.

Hér verður endursögð lýsing Guðmundar á verkefninu og lausn, en sú hugmynd, sem sönnun hans byggist á, verður sett fram með orðavali mínu. Síðan ljúkum við því hér til fulls að finna nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði þess, að ótvíræð eignarákvörðun fáist fyrir hvert félag. En það er ekki viðfangsefni hér að fást við lagalega hlið þessa gamla máls né skattalega; einungis er litið á það af stærðfræðilegum sjónarhóli, enda er þetta forvitnilegt verkefni í línulegri algebru.

Til einföldunar á framsetningu verða eingöngu hlutafélög skoðuð. Segjum, að um sé að ræða $n$ hlutafélög alls, sem við höfum á skrá í tiltekinni röð; í hinu umrædda viðfangsefni voru þetta þá öll hlutafélög, sem gjaldendur á landinu áttu hlut í. Til þæginda miðum við framsetninguna við aðstæður í því viðfangsefni, þannig að við látum eins og að á skránni séu „öll“ hlutafélög. Hver sá hluthafi í einhverju þessara hlutafélaga, sem er ekki eitt hlutafélaganna á þeirri sömu skrá, nefnist þá hér í þessari framsetningu einstaklingur.

Heildareign $i$-ta hlutafélagsins köllum við $x_i$, og er þetta sú stærð, sem ákvarða á fyrir sérhvert $i$. Samkvæmt lagaákvæðinu skyldi hverjum einstaklingi, sem væri hluthafi í $i$-ta hlutafélaginu og ætti alls $a$ af heildarhlutafé þess, þar sem $0 < a \leq 1$, talin til eignar fjárhæðin $ax_i$. Segjum svo, að $a_{ij} \geq 0$ sé hlutfallsleg hlutafjáreign $i$-ta hlutafélagsins í $j$-ta félaginu, og að $k_i$ sé sú eign $i$-ta hlutafélagsins, sem er umfram heildareign þess í þessum $n$ hlutafélögum.

Til skoðunar kemur þá línulega jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2 &= k_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n &= k_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{1}$$

Með því að setja

$$b_{ii} := -1 + a_{ii} \quad \text{og} \quad b_{ij} := a_{ij}, \quad \text{ef} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

fæst, að jöfnuhneppið (1) jafngildir fylkjajöfnunni

$$\mathbf{BX} = -\mathbf{K}, \tag{2}$$

þar sem

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}.$$

Viðfangsefnið er því að ákvarða nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði þess, að fylkjajafnan (2) hafi ótvírætt ákvarðaða lausn, þ.e. að fylkið $\mathbf{B}$ hafi andhverfu, sem aftur jafngildir því, að línuvektorar fylkisins $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{b}_i := (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

séu línulega óháðir.

Eðli málsins samkvæmt er

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \quad \text{þ.e.} \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \leq 0, \quad \text{fyrir öll} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Fram kemur hér á eftir, að sá eiginleiki skiptir máli, að í $j$-ta hlutafélaginu sé einstaklingur meðal hluthafa, en það jafngildir því, að

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \;<\; 1, \quad \text{þ.e.} \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \;<\; 0. \tag{$3_j$}$$

**Hjálparsetning 1.** *Gerum ráð fyrir, að línuvektorarnir* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *séu línulega háðir, og að*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}, \quad \textit{þar sem} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{4}$$

*Setjum*

$$M: \;=\; \max\{\alpha_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

*og gerum ráð fyrir, að við höfum valið stuðlana þannig, að* $M > 0$.

*Um sérhvert* $r$ *með* $\alpha_r = M$ *gildir, að*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir} \;=\; 1, \quad \textit{þ.e.} \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ir} \;=\; 0.$$

**Sönnun.** Eftir deilingu í jöfnu (4) með $M$ má gera ráð fyrir, að $M = 1$. Af (4) fást hnitajöfnurnar

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ij} \;=\; 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Fyrir $r$ með $\alpha_r = 1$ er þá

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ir} \;=\; -1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ir} \;\leq\; -1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ir} \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_{ir} \;\leq\; 0,$$

svo að $\sum_{i=1}^{n} b_{ir} = 0$. ∎

Af þessari hjálparsetningu fáum við tafarlaust eftirfarandi setningu:

**Setning 2.** *Ef ójafna* $(3_j)$ *gildir fyrir öll* $j = 1, 2, \ldots, n$, *þá eru línuvektorarnir* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *línulega óháðir.*

Það tilvik er fljótafgreitt, þar sem ójafna $(3_j)$ gildir ekki fyrir neitt $j$:

**Setning 3.** *Ef ójafna* $(3_j)$ *gildir ekki fyrir neitt* $j = 1, 2, \ldots, n$, *þá eru línuvektorarnir* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *línulega háðir.*

**Sönnun.** Samkvæmt forsendu er

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 0 \quad \text{fyrir öll} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

svo að línuvektorar fylkisins $\mathbf{B}$ eru línulega háðir: summa þeirra er $\mathbf{0}$. ∎

Með þessum setningum eru komnar fram niðurstöðurnar í grein Guðmundar:

1) *Ótvíræð eignarákvörðun fæst í hverju hlutafélagi, þegar hvert þeirra hefur einstakling sem hluthafa.*

2) *Þegar ekkert hlutafélaganna hefur einstakling sem hluthafa, er eign hvers þeirra óákvörðuð.*

Við höldum svo áfram greiningu á verkefninu og tökum fyrir hið almenna tilvik, þar sem ójafna $(3_j)$ gildir um sum $j$ en ekki öll.

Setjum fyrst til styttingar $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ og síðan

$$E := \{j \in \mathbb{N}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1\} \quad \text{og} \quad F := \{j \in \mathbb{N}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1\}.$$

Forsenda okkar hér á eftir verður því, að $E \neq \emptyset$ og $F \neq \emptyset$. Næst setjum við

$$F_1 := \{j \in F \mid \text{til er } i \in E \text{ með } a_{ij} > 0\}.$$

Ef $F_1 \neq \emptyset$ og $F_1 \neq F$, setjum við

$$F_2 := \{j \in F \setminus F_1 \mid \text{til er } i \in F_1 \text{ með } a_{ij} > 0\}.$$

Almennt gerum við fyrir tiltekið $m \geq 1$ ráð fyrir, að við höfum ákvarðað hlutmengi $F_m \subseteq F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{m-1})$, þannig að

$$F_m \neq \emptyset \quad \text{og} \quad F_m \neq F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{m-1})$$

(hér er undirskilið, að $F_0 = \emptyset$). Við skilgreinum þá

$$F_{m+1} := \{j \in F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_m) \mid \text{til er } i \in F_m \text{ með } a_{ij} > 0\}.$$

Þessi þrepun tekur enda og við skilgreinum þá töluna $k \geq 2$, þannig að

$$k := \max\{m+1 \mid F_m \neq \emptyset \quad \text{og} \quad F_m \neq F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{m-1})\}. \tag{5}$$

Ef $F_1 = \emptyset$ eða $F_1 = F$, svo að ekki kemur til þrepunar, setjum við $k := 1$. Tilvikin tvö,

$$F_k = \emptyset \qquad \text{og} \qquad F_k = F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{k-1}),$$

útiloka hvort annað og með þeim greinist úrlausn á viðfangsefninu í tvennt. Við sjáum, að í fyrra tilvikinu er

$$F \neq F_1 \cup \cdots \cup F_k \qquad \text{og} \qquad F = F_1 \cup \cdots \cup F_k \tag{6}$$

í seinna tilvikinu.

Áður en lengra er haldið skulum við heimfæra þessi mengi upp á hlutafélögin sjálf, en þá þurfum við á nýju orðalagi að halda til að einfalda framsetninguna.

Við segjum, að hluthafi í einu hlutafélagi sé *óbeinn hluthafi* í öðru hlutafélagi, ef fyrrnefnda félagið er hluthafi í síðarnefnda félaginu.

Þessa skilgreiningu útvíkkum við og rekjum okkur frá einu hlutafélagi til annars til að finna óbeina hluthafa.

Við segjum því til viðbótar, að hluthafi í einu hlutafélagi sé *óbeinn hluthafi* í öðru hlutafélagi, ef fyrrnefnda félagið er *óbeinn* hluthafi í síðarnefnda félaginu.

Við höfum þá, að $j$-ta hlutafélagið hefur einstakling sem hluthafa þá og því aðeins að $j \in E$. Jafnframt höfum við, að ef $j \in F$, þ.e. $j$-ta hlutafélagið hefur engan einstakling sem hluthafa, þá gildir, að það hefur einstakling sem óbeinan hluthafa þá og því aðeins að $j \in F_1 \cup \cdots \cup F_k$.

Til að lesandinn sjái svo betur fyrir sér, hvað felst í hvoru tilviki í (6) fyrir sig, skulum við skoða fylki með $k = 2$. Með því að raða upp á nýtt hlutafélögunum í skrá okkar getum við gert ráð fyrir, að fyrst komi öll hlutafélögin, sem tengjast $E$. Síðan röðum við hlutafélögunum í $F$ einnig upp á nýtt, þannig að þar komi fyrst öll hlutafélögin í $F_1$, en það eru einmitt þau hlutafélög, þar sem hver hluthafi er hlutafélag og eitthvert þeirra hefur einstakling sem hluthafa. Segjum, að

$$E = \{1, \ldots, p\} \quad \text{og} \quad F_1 = \{p+1, \ldots, m\} \quad \text{með} \quad 1 \leq p < m < n.$$

Þá er fylkið **B** af taginu

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} & b_{1,p+1} & \cdots & b_{1,m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,p} & b_{p,p+1} & \cdots & b_{p,m} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{p+1,1} & \cdots & b_{p+1,p} & b_{p+1,p+1} & \cdots & b_{p+1,m} & b_{p+1,m+1} & \cdots & b_{p+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,p} & b_{m,p+1} & \cdots & b_{m,m} & b_{m,m+1} & \cdots & b_{m,n} \\ b_{m+1,1} & \cdots & b_{m+1,p} & b_{m+1,p+1} & \cdots & b_{m+1,m} & b_{m+1,m+1} & \cdots & b_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} & b_{n,p+1} & \cdots & b_{n,m} & b_{n,m+1} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Hér veitum við því fyrst athygli, að í norðausturhorninu á **B** höfum við núllfylki. Síðan beinum við athyglinni að hlutfylkjunum

$$\begin{bmatrix} b_{1,p+1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,p+1} & \cdots & b_{p,m} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} b_{p+1,m+1} & \cdots & b_{p+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,m+1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Samkvæmt skilgreiningu á $F_1$ gildir um fylkið hér á vinstri hönd, að enginn dálkvektoranna er núllvektorinn. Þar sem við höfum $k = 2$, er um tvennt að ræða fyrir fylkið á hægri hönd. Annað hvort er það núllfylki (og sameinast þá núllfylkinu fyrir ofan það), en það svarar til þess að $F_2 = \emptyset$, ellegar gildir um það, að enginn dálkvektora þess er núllvektorinn, en það svarar til þess að $F_2 = F \setminus F_1$. Það sem skilur á milli þessara tveggja tilvika, er lögunin á hlutfylki í suðausturhorninu á **B**, sem liggur undir núllfylki í norðausturhorninu. Í fyrra tilvikinu er það ferningslaga, en í seinna tilvikinu eru línuvektorar þess (sem í báðum tilvikum reynast vera línulega háðir) fleiri en dálkvektorarnir.

Við sönnum þá almennt, að í fyrra tilvikinu hafi fylkið **B** ekki andhverfu, en það gildi hins vegar í seinna tilvikinu.

**Setning 4.** *Ef $F \neq F_1 \cup \cdots \cup F_k$, þá eru línuvektorarnir $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ línulega háðir.*

**Sönnun.** Gefið er, að $F_k = \emptyset$. Setjum $R := F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{k-1})$, svo að $R \neq \emptyset$. Við höfum þá fyrir öll $j \in R$, að

$$b_{ij} = a_{ij} = 0 \quad \text{fyrir öll} \quad i \in E \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{k-1} = \mathbb{N}_n \setminus R, \tag{7}$$

og ennfremur

$$\sum_{i \in R} a_{ij} = 1, \quad \text{þ.e.} \quad \sum_{i \in R} b_{ij} = 0. \tag{8}$$

Af (8) fæst þá, að línuvektorar fylkisins

$$[b_{ij}]_{(i,j) \in R \times R}$$

eru línulega háðir: summa þeirra er $\mathbf{0}$. Þar sem fylkið er ferningslaga, eru dálkvektorar þess þá einnig línulega háðir. Af (7) fæst þar með, að dálkvektorar fylkisins

$$[b_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times R}$$

eru línulega háðir, en þeir eru um leið meðal dálkvektora fylkisins $\mathbf{B}$. Þar með eru línuvektorar $\mathbf{B}$ línulega háðir. ∎

Næsta hjálparsetning er í beinu framhaldi af hjálparsetningu 1, og hún gefur okkur síðan greiðlega meginniðurstöðu okkar.

**Hjálparsetning 5.** *Gerum ráð fyrir, að línuvektorarnir* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *séu línulega háðir, og ákvörðum* $M$ *út frá jöfnu* (4) *eins og í hjálparsetningu 1.*

1) *Um sérhver* $s, r \in \mathbb{N}_n$ *gildir, að*

$$\text{ef} \quad \alpha_s < M \quad \text{og} \quad \alpha_r = M, \quad \text{þá er} \quad a_{sr} = 0.$$

2) *Um sérhvert* $r \in \mathbb{N}_n$ *gildir, að*

$$\text{ef} \quad \alpha_r = M, \quad \text{þá er} \quad r \in F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k).$$

**Sönnun.** Eftir deilingu með $M$ getum við sem fyrr gert ráð fyrir, að $M = 1$. Samkvæmt hjálparsetningu 1 er $r \in F$ fyrir öll $r$ með $\alpha_r = 1$.

1) Tökum $s$ og $r$ með $\alpha_s < 1 = \alpha_r$, og gerum ráð fyrir, að $a_{sr} > 0$. Þá er

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ir} = -1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} \alpha_i a_{ir} + \alpha_s a_{sr} < -1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ir} = 0,$$

því $r \in F$; mótsögn.

2) Tökum $r$ með $\alpha_r = 1$. Fyrir öll $i \in E$ er $\alpha_i < 1$, svo að $a_{ir} = 0$. Þá er $r \notin F_1$, svo að $r \in F \setminus F_1$.

Fyrir tiltekið $m$ með $1 \leq m < k$ gerum við ráð fyrir, að við höfum sannað, að

$$r \in F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_m) \quad \text{fyrir öll} \quad r \in \mathbb{N}_n \quad \text{með} \quad \alpha_r = 1.$$

Þar með fæst fyrir öll

$$i \in \mathbb{N}_n \setminus [(F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_m))] = E \cup F_1 \cup \cdots \cup F_m,$$

að $\alpha_i < 1$, og þess vegna fæst samkvæmt lið 1) fyrir sömu $i$, að $a_{ir} = 0$ fyrir öll $r$ með $\alpha_r = 1$. Þá fæst fyrir öll $r$ með $\alpha_r = 1$, að $r \notin F_{m+1}$, svo að $r \in F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{m+1})$.

Með þrepun höfum við þá sannað, að

$$r \in F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k), \quad \text{ef} \quad \alpha_r = 1. \quad \blacksquare$$

**Setning 6.** *Ef* $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$, *þá eru línuvektorarnir* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *línulega óháðir.*

**Sönnun.** Þar sem $F \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k) = \emptyset$, fæst af hjálparsetningu 5, að línuvektorarnir $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ eru ekki línulega háðir. $\blacksquare$

Setningar 4 og 6 heimfærum við nú upp á upphaflega viðfangsefnið um eignarákvörðun fyrir hlutafélög, svo að lokaniðurstaðan er eftirfarandi:

*Ótvíræð eignarákvörðun fæst í hverju hlutafélagi þá og því aðeins að sérhvert þeirra hafi einstakling sem beinan eða óbeinan hluthafa.*

Við skulum svo falla frá því orðalagi, sem við völdum í upphafi, þar sem við létum eins og að á skrá okkar væru „öll" hlutafélög. Segjum nú, að við séum með skrá yfir tiltekin hlutafélög, þannig að utan hennar kunni að vera önnur hlutafélög. Þá getum við orðað þessa niðurstöðu okkar upp á nýtt:

*Eignarákvörðun fyrir tiltekin $n$ hlutafélög, sem lýst er með jöfnuhneppinu* (1), *er ótvíræð þá og því aðeins að sérhvert þeirra hafi beinan eða óbeinan hluthafa, sem er ekki meðal þessara $n$ hlutafélaga.*

## Heimild

1. K. G. Guðmundsson, *Et determinantproblem fra den íslandske skattelovgivning*, Nordisk Matematisk Tidskrift **8** (1960), 30–32.

## STÆRÐFRÆÐIÞING NÆSTA SUMAR

Hér verður getið um þrjú stærðfræðiþing almenns eðlis, sem haldin verða næsta sumar og sérstök ástæða er til að vekja athygli á.

*Tuttugasta og annað norræna stærðfræðingaþingið* verður haldið í Lahti í Finnlandi dagana 5.–7. júní 1996. Athygli er vakin á, að það verður haldið snemmsumars í þetta sinn eins og líka þingið í Luleå fyrir þremur árum, en áður voru slík þing jafnan haldin síðsumars. Það er finnska stærðfræðifélagið, *Suomen matemaattinen yhdistys*, sem heldur þingið. Þess má geta, að þingtíðindi frá Luleå komu út í fyrra undir heitinu *Analysis, algebra and computers in mathematical research*, og eru þar tveir Íslendingar meðal höfunda, Björn Birnir og Hermann Þórisson.

*Áttunda alþjóðaþing um stærðfræðimenntun* verður haldið í Sevilla á Spáni 14.–21. júlí 1996. *Alþjóðanefnd um stærðfræðikennslu* sér um þessi þing, en hún starfar á vegum *Alþjóðasambands stærðfræðinga.* Sjöunda þingið var haldið í Québec í Kanada í ágúst 1992. Þetta eru mjög fjölmenn þing og er búizt við, að þinggestir verði á fjórða þúsund. Fyrsta tilkynning um þingið hefur þegar verið send. Önnur tilkynning fæst með því að skrifa til: ICME–8, Aparttado de Correos 4172, 41080 Sevilla, España (bréfsími -34-5-421-8334).

*Annað evrópska stærðfræðingaþingið* verður haldið í Búdapest dagana 22.–26. júlí 1996. Það er ungverska stærðfræðifélagið, *Bolyai János Matematikai Társulat*, sem heldur þingið á vegum *Evrópska stærðfræðifélagsins.* Haldnir verða um 45 fyrirlestrar í boði þingsins, í sameinuðu þinginu eða í samhliða fyrirlestraröðum; ennfremur verður sýning á veggspjöldum og hringborðsumræður í níu deildum um margvísleg efni, sem varða samfélag stærðfræðinga. Fyrsta tilkynning er væntanleg nú í sumar. Póstfang þingsins er: Bolyai János Matematikai Társulat, H-1027 Budapest, Fö utca 68 (bréfsími 36-1-201-6974, netfang h3341sza@ella.hu).

Í tengslum við þingið verða fjölmargar ráðstefnur og minni háttar faglegar samkomur haldnar í Ungverjalandi eða í hinum næstu grannlöndum bæði skömmu fyrir þingið og dagana næstu á eftir.

*Fyrsta evrópska stærðfræðingaþingið* var haldið í París í júlí 1992, og komu þingtíðindi þaðan út í fyrra í digru þriggja binda ritverki.

## MITTAG-LEFFLER-STOFNUNIN NÆSTU VETUR

Viðfangsefni á *Mittag-Leffler-stofnuninni* í Stokkhólmi næsta vetur verður eitt og hið sama allan veturinn, *Lie-grúpur innan stærðfræðigreiningar*, og verður lögð áherzla á þýða greiningu (e. *harmonic analysis*) og hlutafleiðujöfnur á Lie-grúpum. Þessari starfsemi næsta vetur stjórna Mogens Flensted-Jensen, Gestur Ólafsson, Peter Sjögren og Bent Ørsted auk forstöðumanns stofnunarinnar, en þess má geta að þrír hinir fyrstnefndu voru meðal fyrirlesara eða óbreyttra þátttakenda á norræna sumarskólanum í þýðri greiningu, sem haldinn var á Laugarvatni 1977. Auk Gests verða tveir Íslendingar meðal gesta á stofnuninni næsta vetur, þeir Sigurður Helgason og Helgi Þorleifsson.

Viðfangsefni á stofnuninni veturinn 1996–97 verður *rúmfræði fjölda og tengsl hennar við kennilega eðlisfræði*, og veturinn þar á eftir, 1997–98 verða teknar fyrir *reikningslegar aðferðir við lausn á afleiðujöfnum.*

Athygli er vakin á því, að stofnunin veitir allmarga dvalarstyrki og er miðað við mánaðardvöl hið minnsta. Styrkirnir eru ætlaðir stúdentum, sem eru í framhaldsnámi eða hafa lokið því nýlega. Styrkir vegna vetrarstarfsins hverju sinni eru auglýstir veturinn áður.

## STÆRÐFRÆÐIVERÐLAUN Á STÚDENTSPRÓFI

Svo sem hefð er á komin veitti *Íslenzka stærðfræðafélagið* nokkrum þeirra stúdenta, sem brautskráðust nú í vor, sérstaka viðurkenningu fyrir ágætan námsárangur í stærðfræði á stúdentsprófi. Var þeim öllum afhent bók að gjöf með áritaðri staðfestingu á verðlaununum.

Þeir nýstúdentar, sem hlutu verðlaun að þessu sinni, eru

Ásta Herdís Hall, Menntaskólanum við Hamrahlíð,
Bragi Pálsson, Verzlunarskóla Íslands,
Georg Lúðvíksson, Menntaskólanum í Reykjavík,
Guðmundur Hafsteinsson, Menntaskólanum í Reykjavík,
Guðmundur Páll Magnússon, Menntaskólanum við Sund,
Ingimar Guðni Haraldsson, Fjölbrautaskólanum í Breiðholti,
Steinar Ingi Halldórsson, Menntaskólanum í Reykjavík og
Steinar Páll Landrö, Verzlunarskóla Íslands.

*Jón Ragnar Stefánsson:*

# AF DOKTORSVÖRN ÓLAFS DANÍELSSONAR

*Mag. scient. Ólafur Dan Daníelsson* varði doktorsritgerð sína við Hafnarháskóla laugardaginn 30. október 1909, daginn fyrir 32. afmælisdag sinn, og hófst athöfnin kl. 10 árdegis. Ritgerðin nefndist

*Nogle Bemærkninger om en Gruppe algebraiske Flader, der kunne bringes til at svare entydig til en Plan Punkt for Punkt,*

og var hún gefin út af Pios Boghandel í Kaupmannahöfn, 89 síður alls. Opinberir andmælendur voru prófessorarnir dr. H. G. Zeuthen og dr. Niels Nielsen, en úr hópi áheyrenda andmæltu dr. Herman Valentiner og dr. C. Juel.

Þess má geta, að þremur mánuðum síðar varði Harald Bohr einnig doktorsritgerð sína við Hafnarháskóla, *Bidrag til de Dirichletske Rækkers Theori*, og voru þar hinir sömu opinberu andmælendur.

Í íslenzkum blöðum birtust tvær fregnir af vörn hins nýja doktors og eru þær báðar prentaðar hér lesendum til fróðleiks, en einnig má hafa nokkra skemmtun af. Ennfremur birtum við danska samtímafrásögn af doktorsvörninni. En við byrjum á því að kynna andmælendur fyrir lesendum.

*Hieronymus Georg Zeuthen* (1839–1920) lét af prófessorsembætti við Hafnarháskóla árið eftir þá vörn, sem hér segir frá, og hafði þá gegnt því embætti í um aldarfjórðung. Helztu verk hans eru annars vegar á sviði rúmfræði, sér í lagi fjöldarúmfræði (en gullverðlaunaritgerð Ólafs Dan frá því um aldamótin var einmitt á því sviði), og hins vegar eru veigamikil rit um sögu stærðfræði, bæði um gríska stærðfræði til forna og stærðfræði á miðöldum.

*Niels Nielsen* (1865–1931) tók við prófessorsembætti við Hafnarháskóla þetta sama ár og gegndi til dauðadags, og eru helztu rit hans um fallafræði og talnafræði; sér í lagi má nefna verk um sérstök föll, Bernoullitölur og Stirling-tölur. *Christian Juel* (1855–1935) var prófessor í aflfræði við Verkfræðiháskólann (*Polyteknisk Læreanstalt*), og eru helztu verk hans á sviði rúmfræði, en *Herman Valentiner* (1850–1913), sem kenndi stærðfræði í nokkur ár við Verkfræðiháskólann, var hinn eini andmælendanna, sem hafði meginstarf utan háskóla. Hann var framkvæmdastjóri líftryggingafélagsins *Dan* og *„var einn af fremstu dönskum stærðfræðingum síns tíma“*, segir Richard Petersen.

Fyrsta frásögnin hér af doktorsvörninni er úr *Óðni* (V. árg. 1909, bls. 76), en ritstjóri hans var Þorsteinn Gíslason.

**Dr. Ólafur Dan Daníelsson.**

*30. október síðastl. fjekk Ól. D. Daníelsson, kennari við Kennaraskólann hjer í Reykjavík, doktorsnafnbót við háskólann í Kaupmannahöfn fyrir ritgerð um stærðfræði, er hann varði þar þá. Ritgerðin heitir: »Nogle Bemærkninger om en Gruppe algebraiske Flader«.*

*Þetta er efni, sem ekki er fyrir aðra en lærða stærðfræðinga við að fást. En í dönsku blaði, sem segir frá því, er höf. varði ritgerð sína á háskólanum, er lokið lofsorði á hana. Háskólakennarinn, sem fjekk það hlutverk að andmæla henni, dr. N. Nielsen, hafði lokið ummælum sínum á þá leið, að höf. hefði skilist ágætlega við hlutverk sitt. Líkt sögðu aðrir, er tóku til máls um ritgerðina frá áheyrenda bekkjum, þar á meðal dr. Valentiner, er verið hafði kennari höf. um tíma áður, og dr. Zeuthen prófessor. Þeir tóku báðir fram, að ritgerðin bæri vott um hæfileika til sjálfstæðra athugana. Yfir höfuð kom það fram hjá þeim, sem töluðu, segir danska blaðið, að þeim þótti enn meir til ritgerðarinnar koma vegna þess, hve óhægt höf. hefði átt aðstöðu, þar sem hann hefði lítinn aðgang átt að vísindalegum stærðfræðisritum meðan hann samdi hana. En ritgerðin er samin hjer heima.*

*Dr. Ól. Dan. Daníelsson er fæddur 30.* [svo] *okt. 1877 í Viðvík í Skagafirði, sonur Daníels söðlasmiðs Ólafssonar prests í Viðvík Þorvaldssonar, útskrifaður úr skóla 1897, las síðan stærðfræði við háskólann í Khöfn og tók próf í henni í apríl 1904. Síðan hefur hann dvalið hjer í Reykjavík og var skipaður kennari við Kennaraskólann hjer 1908. Hann er kvæntur Ólöfu dóttur Sveins Sigfússonar kaupmanns hjer í Reykjavík.*

Síðan kemur frétt sú, sem birtist á forsíðu *Ísafoldar* 13. nóvember 1909, og er annar bragur á þeirri frásögn.

## Nýi doktorinn.
## Dr. phil. Ólafur Dan Daníelsson.

*Kh. 3. nóv.*

*Ólafur Daníelsson úr Skagafirði varði doktorsbók sína á háskólanum hér 30. f. m., eins og til stóð.*

*Þegar varðar eru doktorsritgerðir, safnast prófessorar háskólans, doktorar og aðrir mektarmenn saman í stofu þeirri, sem athöfnin fer fram í, og eru burgeisar þessir girtir frá áheyrendum með sterkum grindum; mun það gert til varúðar. Fyrir innan grindurnar eru stólaraðir prófessora og andmælenda til beggja handa, en autt bil á milli. Fyrir miðju bilinu inni við vegginn er hækkaður pallur með ræðustóli. Þar stíga doktorsefnin upp í og húka þar meðan athöfnin fer fram. Síðan stíga andmælendur fram á mitt gólfið og skíta út bókina og doktorsefnið niður fyrir allar hellur, en hrósa síðan öllu saman á eftir.*

*Ólafur Dan. talaði fyrst nokkur vel valin orð ex Cathetra (úr ræðustólnum) og beiddist líknar andmælenda, og hafði sér það til afsökunar, að hann hefði verið úti á Íslandi og því ekki náð í svo margar bækur sem skyldi.*

*Þetta fanst oss ólærðum mönnum eðlilegt, Ólafi full vorkunn þó að eitthvað væri að bókinni og í annan stað hæverskulega talað.*

*En prófessorarnir mega ekki hugsa þannig. Þeir verða að ráðast á bókina. Það er skylda þeirra.*

*Fyrstur reis upp dólgur mikill og ruddi úr sér langri romsu af mikilli grimd.*

*Þetta er glæpsamlegt, sagði hann og hjó krítarstönginni af bræði sinni í töfluna af svo miklu afli, að hún brotnaði (krítarstöngin). Var engu líkara en þetta væri hinn versti berserkur í vígamóði. Síðan fór að sljákka í honum smámsaman, og loks át hann ofan í sig alt, sem hann hafði sagt.*

*Þetta er hringlandibandvitlaust, sagði annar, og hrósaði þó Ólafi fyrir viturleik og frjósemi heilans.*

*Ólafur svaraði öllum fúkyrðunum af mikilli kurteisi og lét ekki á sér bera annað en alt væri það hugsunarrétt, er þeir sögðu. Svo var hann stiltur.*

*Síðan talaði sá þriðji og fjórði í öllu mýkri tóntegund, löstuðu Ólaf og hrósuðu þó á víxl.*

*Svo er sagan búin. Ólafur varð doktor með hinni mestu sæmd.*

*Eg hefi ekki verið við doktorsathöfn fyr; en það segja mér fróðir menn, sem á þetta hlýddu, að Ólafur hafi varið sig allra doktora bezt.*

*Seinna þenna sama dag sat Ólafur í veizlu hjá einum prófessoranna og voru þar með honum allir andmælendurnir. Þar hrósuðu þeir bókinni allir einum rómi. Þar þurftu þeir ekki að vera tvítyngdir. Þar máttu þeir segja sannfæringu sína.*

*En gaman var að hlýða á þessa »kommendíu«.*

*Svipall.*

Hver var fréttaritari *Ísafoldar* við doktorsvörnina 1909? Ekki verður fullyrt um það með óyggjandi vissu, en hér verður það haft fyrir satt — þar til annað kemur í ljós — að þar hafi stýrt penna *Sigurður Guðmundsson,* síðar skólameistari á Akureyri. Svo mikið er vitað, að hann var viðstaddur doktorsvörnina sjálfa, raunar ásamt mörgum öðrum íslenzkum stúdentum, og sagði hann *Guðmundi Arnlaugssyni* löngu síðar þau ummæli eins andmælendanna um doktorsefnið, sem Guðmundur birti svo í afmælisgrein sinni um doktorinn áttræðan (*Mbl.*, 1. nóv. 1957): *„De har en frodig matematisk fantasi.“* Þessi ummæli endursagði *„Svipall“* í íslenzkri gerð í Ísafold eins og sjá má hér að framan. Við þetta bætist, að tungutak fréttaritarans og frásagnarstíll eru mjög í anda Sigurðar Guðmundssonar frá Mjóadal, svo sem sjá má á varðveittum skrifum, sem sannarlega eru hans, frá stúdentsárum hans í Kaupmannahöfn á fyrsta áratug aldarinnar.

En þetta er vissulega tilgáta og væri fengur að fregna af því, ef einhver lesandi skyldi búa yfir vitneskju um fréttaritarann.

Fram kom í *Óðni,* að frá doktorsvörninni var sagt í ótilgreindu dönsku blaði. Í *Nationaltidende* og *Politiken* voru daginn eftir þurrar tilkynningar um vörnina, en ekkert umfram það, en sama dag, sunnudaginn 31. október, birtist grein um hana í blaðinu *Vort Land* og er þar ekki bara þurr frásögn! Hún fer hér á eftir í heild í þýðingu minni og er einungis fyrirsögn haldið á frummálinu.

**Doktordisputats.**

**Dr. phil. Olafus Danielsson.**

*Það varð löng umræða og vitaskuld ákaflega forvitnileg, sem tók í gær alla athygli stærðfræðinga okkar frá því snemma um morguninn og langt fram eftir degi. Undarlegt reyndar, að efnið hafði ekki dregið til sín fjölda áheyrenda, kannski hefur það nú ekki meiri háttar hagnýtt gildi: en samt sem áður, „Nokkrar athugasemdir um safn af algebrulegum flötum“ er þó efni, sem enginn vel siðaður maður getur litið á eins og honum komi það hreint ekki við. —*

*Og það verður þá líka að segja það strax, að fyrsti andmælandi, dr. Niels Nielsen, sem andmælti hér í fyrsta skipti sem prófessor og margir hinna yngri háskólaborgara þekkja sem (já, svo herma sögur) mjög strangan prófdómara á stúdentsprófi — byrjaði af ákafa, svo að áheyrendur, sem fylgdust með af athygli, skulfu á stundum, eins og til dæmis þegar prófessorinn meðhöndlaði stóru svörtu töfluna með handafli, sem virtist frekar stafa af jarðneskum en hljóðum stærðfræðilegum krafti. Hann ásakaði doktorsefni hörðum orðum fyrir kæruleysi við það, sem bersýnilega væri erfitt að öðlast, þann hæfileika að fara með tilvitnanir, en hann gaf sannarlega líka til kynna, að aðferð hins unga vísindamanns væri svo forvitnileg og hagnýt, og að hann hefði unnið verk sitt til enda á eftir atvikum svo frábæran hátt, að einungis væri ástæða til að gleðjast yfir því og óska doktorsefni til hamingju.*

*Af andmælendum úr hópi áheyranda fékk dr. Valentiner forstjóri fyrstur orðið. Það væri honum gleðiefni að sjá magister Daníelsson í þessu hlutverki í dag; hann hefði um skamma hríð verið kennari hans og vonaði, að kennsla sín hefði komið honum að gagni. Hann lýsti því yfir, að doktorsefni byggi yfir verulegri stærðfræðilegri hugvitssemi og hefði frjósaman heila, sem gæti borið ávöxt í þessu efni.*

*Eftir hlé, sem fréttariturunum þótti ekki beinlínis kærkomið, byrjaði dr. Juhl [svo] prófessor að útskýra ýmis atriði, sem honum fannst, að doktorsefni hefði tekið röngum tökum, og að lokum kom fram dr. Zeuthen prófessor sem seinni opinberi andmælandi.*

*Prófessorinn hóf ræðu sína með nokkrum tímabærum athugasemdum varðandi hina munnlegu vörn. Hann kvað það vera algjör* *mistök að reyna að leggja hana niður. Það væri ákaflega mikilvægt, að tilheyrendur, svo vel að sér sem þeir væru, fengju að heyra um hvað ritgerðin fjallaði og til hvers hún væri nýt. Um hinn unga vísindamann myndaðist þannig almenningsálit, sem mundi skipta máli við embættaveitingar og því um líkt. Með þessu væri ekki verið að segja, að gefa ætti einhvers konar einkunn fyrir hið fyrirliggjandi verk. Málið væri jú, að vitaskuld væri það í flestum tilvikum þannig, að doktorsefni fengi sinn doktorshatt; því það mundi jaðra við hneyksli, ef hið gagnstæða kæmi fyrir, bæði fyrir háskóladeildina og doktorsefnið; en þó ætti að viðhalda prófinu, og við getum nú gengið að því vísu, að allri umræðu um að afnema það sé lokið.*

*Eftir þetta tók prófessorinn til við að fjalla um ritgerðina. Hann lagði áherzlu á, að doktorsefni byggi yfir sjálfstæðum sköpunarhæfileika, sem væri honum svo nauðsynlegur, þar sem hann hefði ekki mikinn aðgang að lestrarefni á Íslandi.*

*Í heild var það atriði, sem allir andmælendur lögðu áherzlu á, að hið fyrirliggjandi verk yrði að teljast þeim mun fegurra í því ljósi, að það hefði verið samið við erfið skilyrði. Dr. Daníelsson hefur skrifað það á Íslandi, þar sem sjálfsagt er ekki neinn aðgangur að vísindalegu lesefni af slíku tagi.*

*Meðal tilheyrenda veittum við athygli landa doktorsefnis, Finni Jónssyni prófessor, dr. Bonnesen og Madsen hershöfðingja, sem þó hvarf af braut eftir andmæli fyrstu tveggja ræðumanna; ennfremur var fjöldi íslenzkra stúdenta þar viðstaddur.*

*Erik.*

Ekki segir svo nánar hér í *Fréttabréfi* af „doktorsbókinni“ sjálfri, en lesandanum til hollrar íhugunar ljúkum við þessari frásögn af hinni fyrstu doktorsvörn íslenzks stærðfræðings með þeirri staðhæfingu (*Theses*), sem höfundurinn sjálfur endaði ritgerð sína með:

*Með engu móti má líta svo á stærðfræði sem hún sé einungis samansafn af niðurstöðum. Hún á sér sína listrænu hlið — eins og sjálfsagt öll vísindi — þar sem skýrleiki framsetningar og glæsileiki aðferða skipa fremsta sess. Þessu virðist mér þeir höfundar gleyma, sem skrifa ritgerðir sem runu af setningum án sannana, en við það týnist lesandanum að mestu hið innra samhengi.*

**SETNING WILES**

*Um sérhverja náttúrulega tölu $n$,*
*sem er stærri en 2,*
*gildir að jafnan*

$$x^n + y^n = z^n$$

*hefur enga lausn,*
*þar sem $x$, $y$ og $z$ eru náttúrulegar tölur.*

Sönnun er lengri en svo,
að hún rúmist innan þessa ramma.

Íslenzka stærðfræðafélagið
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Fjölritunarstofa
Daníels Halldórssonar