Íslenska stærðfræðafélagið

Skýrsla stjórnar fyrir árið 1998

Lögð fram á aðalfundi 11. febrúar 1999

Fundir

Sjö fyrirlestrar voru haldnir. 26. febrúar hélt Jakob Yngvason fyrirlestur sem hann nefndi „Um grunnástand Bose-agnar.“ Fundargestir voru 19. 20. apríl hélt Skúli Sigurðsson fyrirlestur sem hann nefndi „Eðlisfræði, stærðfræði og móderníismi um 1920.“ Fundargestir voru 21. 22. maí héldu Svíarnir Love Ekenberg og Johan Thorbiörnson fyrirlestur sem þeir nefndu „To eat a donkey in May: some observations concerning the evaluation of decision situations in numerically imprecise domains.“ Fundargestir voru 8. 16. júlí hélt Finnur Lárusson fyrirlestur með fyrirsögninni „Tvinnfallagreining á þekjurúmum yfir algebrulegum víðáttum.“ Fundargestir voru 14. 8. október hlustuðu 15 fundargestir á Geir Agnarsson segja frá Ólympíuleikunum sumarið 1998 í Taipei. 12. nóvember hélt Augustine Kong tölfræðingur fyrirlestur undir fyrirsögninni „Pedigrees, Genes and Graphs.“ 20 sóttu fundinn. Að lokum var fyrirlestur Lárusar Thorlacius 8. desember. Hann var best sótti fyrirlestur ársins, e.t.v. vegna fyrirsagnarinnar „Heimsfræði.“ Fundargestir voru 38.

Útgáfustarfssemi

Árið sem leið hefur verið metár fyrir útgáfur þar sem félagið hefur gefið út hvorki meira né minna en þrjú meiriháttar rit.

Ensk-íslensk stærðfræðiorðaskrá. Við fengum fyrstu eintök af orðaskránni í hendur á síðasta aðalfundi félagsins. Þessi bók hefur nú þegar sannað sitt gildi og hefur reynst vinsæl. Um áramót höfðu 285 eintök selst og er þetta langt umfram það sem við bjuggumst við. Þetta rit er eflaust ómissandi hjálpartæki öllum þeim sem rita um stærðfræði á íslensku. Við viljum nota þetta tækifæri til að þakka meðlimum Orðanefndarinnar og einkum formanni hennar Reyni Axelssyni fyrir alla þá vinnu sem þeir lögðu til við samningu orðaskrárinnar. Einnig þökkum við þeim sem hjálpuðu til að koma henni í prentað form. Við þökkum Almanakssjóði og Málræktarsjóði fyrir fjárstuðning. Við væntum þess að Orðanefndin starfi áfram undir forystu Reynis til að takast á við ný verkefni.

Leifur Ásgeirsson, minningarrit. Leifur Ásgeirsson, fyrsti íslenski stærðfræðingurinn sem varð þekktur á alþjóðlegum vettvangi, lést 1990. Minningarrit um Leif Ásgeirsson kom út í lok október á síðasta ári. Stærðfræðafélagið og

Raunvísindastofnun standa að útgáfunni. Ritið hefur að geyma allar útgefnar stærðfræðigreinar Leifs; þar ber sérstaklega að geta þeirrar sem inniheldur meðalgildissetningu hans og er skrifuð á Laugum. Einnig eru í bókinni fyrirlestrar sem haldnir voru honum til heiðurs áttræðum, fyrirlestrar sem haldnir voru í minningu hans haustið 1990, og minningargreinar um hann. Ævi og störf Leifs eru rakin í ítarlegum inngangskafla eftir Jón Ragnar Stefánsson. Bókin er glæsileg og við þökkum ritnefndinni fyrir að hafa leitt þetta verk til lykta. Jón Ragnar mun gera grein fyrir útgáfu ritsins á þessum fundi.

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema árin 1984–1998. Ritið samanstendur af öllum dæmum úr stærðfræðikeppnum framhaldsskólanema síðan starfssemin hófst 1984, ásamt svörum, lausnum og fræðiefni. Jóhann Sigurðsson og Rögnvaldur G. Möller ritstýra. Bókin muni reynast gagnlegt þeim sem eru að undirbúa sig undir keppnina.

Fréttabréf og tengsl við félagsmenn

Eitt markmið þessarar stjórnar var að endurreisa fréttabréfið. Þar sem Jón Ragnar, sem hafði ritstýrt fréttabréfinu síðan 1991, var önnum kafinn, tók stjórnin þá ákvörðun að sjá um að ritstýra því sjálf. Þess er vænst að það komi út á næstunni. Við notum þetta tækifæri til að þakka Jóni Ragnari fyrir störf hans við fréttabréf liðinna ára. Nú þarf að finna endanlega lausn á ritstjórn fréttabréfsins sem geti tryggt að það komi út tvisvar á ári. Það gæti verið virk leið til að mynda tengsl við þá félagsmenn sem ekki sækja fyrirlestra félagsins að staðaldri. Í sama tilgangi tókum við upp þá nýjung að birta skýrslu stjórnar á vefsíðu okkar. Við væntum þess að því verði haldið áfram. Vefsíðan hefur verið notuð til að miðla ýmsum upplýsingum, t.d. hefur verið hægt að panta orðaskrána í gegnum hana. Vefsíðan hefur fengið nýja slóð: `http://www.raunvis.hi.is/is`.

Bókaverðlaun á stúdentsprófi

Eftirtaldir nýstúdentar hlutu verðlaun á árinu:

Kristinn Kristinsson, Menntaskólanum við Hamrahlíð
Andrey Ermolinskiy, Fjölbrautaskóla Vesturlands
Árni Richard Árnason, Menntaskólanum við Sund
Sveinn Hákon Harðarson, Fjölbrautaskólanum í Breiðholti
Óli Þór Atlason, Verzlunarskóla Íslands
Árdís Elíasdóttir, Menntaskólanum í Reykjavík
Burkni Helgason Maack, Menntaskólanum í Reykjavík

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Félagið stendur að keppninni ásamt Félagi raungreinakennara. Fulltrúar félagsins í þessari starfssemi ættu að vera þrír, en eru nú aðeins tveir, þeir Rögnvaldur G. Möller og Friðrik Diegó. Á fundinum segir Rögnvaldur frá starfssemi keppninnar.

Breytingar á félagaskrá

Fjórir gengu í félagið á síðasta aðalfundi:

Stefán G. Jónsson
Páll Jónsson
Gunnlaugur Pétursson
Vikar Pétursson

Enginn sagði sig úr félaginu. Fjöldi félagsmanna er nú 146.

Alþjóðasamskipti

Eggert Briem situr í ritstjórn Mathematica Scandinavica sem fulltrúi Íslands. Jón Kr. Arason er fulltrúi okkar í stjórn Mittag-Leffler stofnunarinnar og sat aðalfundinn í maí. Ragnar Sigurðsson er fulltrúi félagsins í ritstjórn Normat. Félagið er aðili að International Mathematical Union (IMU) og European Mathematical Society (EMS). Robert Magnus sat fund IMU-ráðsins í Dresden í ágúst s.l. Þar var ákveðið m.a. að næsta Heimsþing stærðfræðinga skuli haldið í Beijing 2002. Kristín Halla Jónsdóttir hefur verið fulltrúi okkar á þingi sem International Commission on Mathematical Instruction skipuleggur á fjögurra ára fresti og verður næst árið 2000.

Fjármál

Kostnaður við aðild að IMU og EMS er umtalsverður. Þátttaka er einungis möguleg með styrkjum frá Menntamálaráðuneytinu. Það sama má segja um framlag til Mittag-Leffler stofnunarinnar. Fjárstaðan er góð og mun Magnús Halldórsson, gjaldkeri félagsins, greina frá stöðunni á fundinum.

Önnur frétt frá aðalfundinum

Ný stjórn var kosin á aðalfundinum 11. febrúar 1999. Í henni sitja:

Benedikt Jóhannesson, formaður, tölvupóstfang: `benedikt@talnakonnun.is`
Geir Agnarsson, gjaldkeri, tölvupóstfang: `geira@raunvis.hi.is`
Eygló Guðmundsdóttir, ritari, tölvupóstfang: `eyglog@ismennt.is`.

Frumtalnasetningin í ljósi sögunnar[1]

Ragnar Sigurðsson

Náttúrleg tala kallast *frumtala* ef hún er stærrri en 1 og er einungis deilanleg með 1 og sjálfri sér. Fyrstu frumtölurnar eru

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,$$
$$43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 \dots$$

Í margar aldir hafa menn reynt að gera sér mynd af dreifingu frumtalnanna í mengi náttúrlegra talna. Ein leið til þess er að gera lista yfir frumtölurnar $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$ og reyna að meta p_n sem fall af n. Önnur leið er að skilgreina *frumtalnafallið* π, með

$$\pi(x) = \text{ fjöldi frumtalna } \leq x = \sum_{p \leq x} 1,$$

og reyna að meta $\pi(x)$ sem fall af x. Athugið að

$$\pi(x) = n, \qquad \text{ef} \qquad p_n \leq x < p_{n+1}.$$

Sagan

Fyrstu athugunina á frumtölum er að finna í bókum Evklíðs frá því um 300 f.kr. Hann sannaði þar meðal annars undirstöðusetningu reiknilistarinnar sem segir að sérhverja náttúrlega tölu megi þátta í veldi af frumtölum og að slík þáttun sé ótvírætt ákvörðuð, ef horft er framhjá röð þáttanna. Hann sannaði einnig að frumtölurnar eru óendanlega margar.

Fyrstir manna til þess að setja fram tilgátu um hegðun $\pi(x)$ voru Legendre (1752–1833) og Gauss (1777–1855). Legendre prófaði sig áfram með nálganir á frumtalnafallinu $\pi(x)$ og komst að því að ein slík væri

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x - 1{,}08366}.$$

Hér táknar log náttúrlega logrann. Í bréfi sem Gauss skrifaði árið 1849 fjallar hann um frumtalnatilgátu Legendres og segist þá hafa fengist við að meta

[1] Þessi grein byggir á fyrirlestri sem haldinn var á fundi í Íslenska stærðfræðafélaginu 7. október 1993.

frumtalnafallið á árunum 1792–93 og komist að því að nálga megi $\pi(x)$ með heildinu

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Hvorki Gauss né Legendre skilgreindu hvaða skekkjumat ætti að nota í nálgununum, en á fyrri hluta síðustu aldar var það alþekkt að frumtalnatilgátuna ætti að túlka sem staðhæfinguna

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

og $f(x) \sim g(x)$ táknar að $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 1$, þ.e.a.s. hlutfallsskekkjan stefnir á núll ef x stefnir á óendanlegt.

Auðvelt er að sannfæra sig um að frumtalnatilgátan jafngildir $p_n \sim n \log n$. Jafnframt er fljótséð að

$$\frac{x}{\log x} \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Fyrstu niðurstöðurnar sem leiddu til sönnunar á frumtalnatilgátunni litu dagsins ljós á árunum 1849–1852. Þar var að verki rússinn Tsébyséff (1821–1894). Niðurstöður hans voru margar og ákaflega merkilegar. Hann sannaði að hlutfallsleg skekkja í nálgun Gauss á frumtalnafallinu væri minni en 11%, þ.e.

$$0{,}89 \int_2^x \frac{dt}{\log t} < \pi(x) < 1{,}11 \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

og að ef markgildið

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) \Big/ \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

er til, þá er það jafnt 1. Tsébyséff sannaði einnig að nálgun af gerð Legendres

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A \log x + B}$$

geti aldrei verið betri en nálgun Gauss. Hann innleiddi ný talningarföll sem tengjast frumtölunum,

$$\vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log p, \qquad \psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p, \qquad x \in \mathbb{R},$$

og sannaði að ef eitt markgildanna

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}$$

er til, þá eru hin einnig til og þau eru jöfn. Frumtalnatilgátan er því jafngild staðhæfingunum $\psi(x) \sim x$ og $\vartheta(x) \sim x$.

Árið 1859 fjallaði Riemann (1826–1866) um frumtalnafallið og setti þá fram mjög frumlegar hugmyndir, sem ekki eru fullrannsakaðar enn þann dag í dag. Markmið hans var ekki einungis að sanna frumtalnatilgátu þeirra Gauss og Legendre, heldur að meta skekkjuna

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

og jafnvel setja fram nákvæmari nálganir á frumtalnafallinu en þá sem heildi Gauss gefur. Hann skilgreindi fallið ζ sem við hann er kennt,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

og sýndi fram á hvernig eiginleikar þess tengjast dreifingu frumtalnanna. Lykilatriðið í athugun Riemanns er að líta á ζ sem fágað fall af tvinnbreytistærðinni s og beita margfeldi Eulers

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Til einföldunar á rithætti, þá táknum við summur og margfeldi, sem tekin eru yfir allar frumtölur með

$$\sum_p \qquad \text{og} \qquad \prod_p .$$

Euler (1707–1783) hafði raunar notað þetta óendanlega margfeldi til þess að sýna að röðin

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

væri ósamleitin.

Frumtalnatilgátuna sönnuðu þeir Hadamard (1865–1963) og de la Vallée Poussin (1866–1962), óháð hvor öðrum en nánast samtímis, árið 1896. Sönnun þeirra byggði á hugmyndum Tsébyséffs og Riemanns og þeir þurftu að framkvæma mjög nákvæmt mat á ζ-fallinu. Sannanir þeirra Hadamards og de la Vallée Poussin þóttu mikið afrek. Uppfrá því nefndist tilgátan *frumtalnasetningin*.

Árið 1928 einfaldaði N. Wiener [9] sönnunina á frumtalnasetningunni all verulega og beitti til þess svokölluðum Tauber-setningum.

Menn voru mjög forvitnir að vita hvort til væri *einföld sönnun* á frumtalnasetningunni. Þá er átt við að setningin sé sönnuð án þess að notaðar séu niðurstöður úr tvinnfallagreiningu. Þetta tókst þeim P. Erdös [2] og A. Selberg [6] óháð hvor öðrum árið 1949.

Árið 1980 kom J. D. Newman [4] fram með nýja sönnun á frumtalnasetningunni, sem byggði einungis á tvinnfallafræði en ekki á Fourier-greiningu. Þremur árum síðar einfaldaði J. Korewaar [3] sönnun Newmans. Hann notaði meginhugmyndina hjá Newman til þess að sanna einfalda útgáfu af Tauber-setningunni og bjó þannig til einfaldaða sönnun í anda Wieners. Í þessari grein sönnum við frumtalnasetninguna með aðferð Korewaars.

Tsébyséff-föllin

Við byrjum á því að líta á Tsébyséff-föllin

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p, \qquad \text{og} \qquad \psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fyrri summan er tekin yfir allar frumtölur $\le x$ en sú síðari yfir öll veldi af frumtölum sem eru $\le x$. Samband þessara falla er

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots .$$

Athugið að þetta er endanleg summa því $\vartheta(x^{\frac{1}{k}}) = 0$ ef $x^{\frac{1}{k}} < 2$. Ef við látum $[a]$ tákna stærstu heiltöluna sem er minni en eða jöfn a, þá er $[\log x / \log p]$ stærsta heiltala m þannig að $p^m \le x$ og því gildir formúlan

$$\psi(x) = \sum_{p \le x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p.$$

Setning 1 (Tsébyséff). *Ef annað hvort markgildanna*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \qquad \text{eða} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

er til, þá er hitt einnig til og þau eru jöfn.

Sönnun: Við berum fyrst föllin ψ og π saman,

$$\psi(x) = \sum_{p \le x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \le \sum_{p \le x} \log x \le \pi(x) \log x.$$

Til þess að fá mat á hinn veginn, þá tökum við x nógu stórt til þess að $1 < x/(\log x)^2 < x$ og setjum $y = x/(\log x)^2$. Þá er

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \pi(y) + \sum_{y<p\leq x} 1 \leq \pi(y) + \sum_{y<p\leq x} \frac{\log p}{\log y} \\
&\leq \pi(y) + \frac{\psi(x)}{\log y} \leq \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{\psi(x)}{\log x - 2\log\log x}.
\end{aligned}$$

Við höfum því ójöfnurnar

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x} \cdot \frac{\log x}{\log x - 2\log\log x}$$

og af þeim leiðir staðhæfingu setningarinnar.

Af þessari setningu sjáum við að frumtalnasetningin er jafngildi því $\psi(x) \sim x$. Við þurfum nú að meta stærðargráðu fallsins ψ.

Setning 2. *Við höfum $\psi(x) = O(x)$, þ.e. til er fasti $C > 0$ þannig að*

$$\psi(x) \leq Cx, \qquad x > 0.$$

Sönnun: Byrjum á því að athuga að allar frumtölur p, $n < p \leq 2n$, ganga upp í

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 2}.$$

Þar með er

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < 2^{2n}.$$

Við tökum nú náttúrlega logrann beggja vegna jafnaðarmerkisins

$$\sum_{n<p\leq 2n} \log p < 2n$$

og látum síðan n hlaupa á veldum af 2,

$$\sum_{2^{k-1}<p\leq 2^k} \log p < 2^k,$$

$$\sum_{p\leq 2^k} \log p < 2^k + 2^{k-1} + \cdots + 1 < 2^{k+1}.$$

Fyrir gefið x veljum við k sem minnstu tölu þannig að $x \leq 2^k$ og fáum

$$\sum_{p \leq x} \log p \leq 4x.$$

Nú er

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p \leq x^{\frac{1}{2}}} \log p + \sum_{p \leq x^{\frac{1}{3}}} \log p + \cdots \\ &\leq 4x + 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{3}} + \cdots .\end{aligned}$$

Til þess að ákvarða fjölda liðanna sem eru frábrugðnir 0 í þessari summu, þá athugum við að $x^{\frac{1}{m}} < 2$ jafngildir því að $\log x / \log 2 < m$. Við þurfum því ekki að taka nema $O(\log x)$ liði í summunni og fáum því matið

$$\psi(x) \leq 4x + Cx^{\frac{1}{2}} \log x = O(x).$$

Eiginleikar ζ-falls Riemanns

Fall Riemanns er skilgreint með óendanlegu röðinni

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1.$$

Hún er greinilega alsamleitin í jöfnum mæli á sérhverju hálfplani af gerðinni $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > c\}$, þar sem $c > 1$ og því er ζ fágað fall á hálfplaninu $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > 1\}$. Tengsl þess við dreifingu frumtalnanna liggja í margfeldi Eulers

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1,$$

þar sem óendanlega margfeldið er tekið yfir allar frumtölur.

Þeir sem eru óvanir þessum rithætti eiga kannski erfitt með að átta sig á þessari formúlu, en í rauninni er hún sáraeinföld, því við getum liðað hvern þátt í margfeldinu í kvótaröð,

$$\frac{1}{1 - 1/p_j^s} = \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^{n_j s}}.$$

Þegar við margföldum saman endanlega margar af þessum óendanlegu röðum, þá fáum við

$$\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-1/p_j^s} = \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_m=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m})^s}.$$

Nú vitum við að sérhverja náttúrlega tölu n má skrifa á nákvæmlega einn veg sem $n = p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$, svo ef við látum m stefna á óendanlegt þá fæst summan af $1/n^s$, þar sem n hleypur yfir allar náttúrlegar tölur.

Við skulum nú sýna fram á að hægt sé að framlengja ζ yfir í fágað fall á $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$. Við tökum þá s með $\operatorname{Re} s > 2$ og athugum að

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} ns \int_n^{n+1} x^{-s-1}\,dx \\
&= s\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} [x]x^{-s-1}\,dx = s\int_1^{\infty} [x]x^{-s-1}\,dx,
\end{aligned}$$

þar sem $[x]$ táknar næstu heilu tölu $\leq x$. Við höfum því

$$\zeta(s) = s\int_1^{\infty} [x]x^{-s-1}\,dx.$$

Berum þetta saman við heildið

$$s\int_1^{\infty} x\cdot x^{-s-1}\,dx = s\int_1^{\infty} x^{-s}\,dx = \frac{s}{s-1} = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Ef við tökum mismuninn af þessum tveimur síðustu jöfnum, þá fáum við

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 + s\int_1^{\infty} \big([x]-x\big)x^{-s-1}\,dx.$$

Með því að skoða hægri hliðina í þessari jöfnu þá fáum við:

Setning 3. *Fallið ζ hefur fágaða framlengingu yfir á $\{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$. Sérstöðupunkturinn $s = 1$ er skaut af stigi 1 og leif ζ þar er jöfn 1.*

Út frá Euler-margfeldinu sjáum við að ζ hefur enga núllstöð s með $\operatorname{Re} s > 1$. Við höfum reyndar meira:

Setning 4 (Hadamard og de la Vallée Poussin). *Fallið ζ er núllstöðvalaust á* $\{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s \geq 1, s \neq 1\}$.

Sönnun Mertens frá 1898: Eins og áður var getið, þá þurfum við aðeins að sanna að $\zeta(s) \neq 0$ ef $\operatorname{Re} s = 1$. Við byrjum á því að athuga að

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Gerum ráð fyrir að staðhæfing setningarinnar sé röng og látum $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vera þannig að $\zeta(1+ib) = 0$. Skilgreinum síðan

$$\varphi(s) = \zeta(s)^3 \zeta(s+ib)^4 \zeta(s+2ib).$$

Fyrst ζ hefur skaut af stigi 1 í $s = 1$ og núllstöð í punktinum $1+ib$, þá hefur fallið φ afmáanlegan sérstöðupunkt í $s = 1$ og hann er núllstöð. Þar með

$$\log|\varphi(s)| \to -\infty, \qquad s \to 1. \tag{2}$$

Tökum nú $s \in \mathbb{R}$ með $s > 1$ og setjum ζ fram með margfeldi Eulers. Ef Log táknar höfuðgrein lograns, þá fæst

$$\begin{aligned}
\log|\zeta(s+it)| &= -\sum_p \log|1 - p^{-s-it}| \\
&= -\operatorname{Re}\sum_p \operatorname{Log}(1 - p^{-s-it}) \\
&= \operatorname{Re}\sum_p \left(p^{-s-it} + \frac{1}{2}(p^2)^{-s-it} + \cdots\right) \\
&= \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s-it} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\cos(t\log n)
\end{aligned}$$

Hér eru stuðlarnir $a_n \geq 0$. Nú notfærum við okkur (1) og fáum

$$\begin{aligned}
\log|\varphi(s)| &= 3\log|\zeta(s)| + 4\log|\zeta(s+ib)| + \log|\zeta(s+2ib)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big(3 + 4\cos(b\log n) + \cos(2b\log n)\Big) \geq 0.
\end{aligned}$$

Þetta er mótsögn við (2) og við höfum sannað setninguna.

Nú skulum við sjá hvernig föll Tsébyséffs og Riemanns tengjast. Til þess tökum við lograafleiðuna af ζ og notfærum okkur Euler margfeldið

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\frac{d}{ds}\operatorname{Log}\zeta(s) = \sum_p \frac{d}{ds}\operatorname{Log}(1-p^{-s}) \\
&= \sum_p \frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}\log p \\
&= \sum_p \left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right)\log p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

Hér táknar Λ van Mangoldt-fallið,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^m, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

en tengsl þess við fallið ψ eru einföld

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n).$$

Nú skulum við skrifa lograafleiðuna sem heildi,

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n-1)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)}{(n+1)^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)s\int_n^{n+1} x^{-s-1}\,dx \\
&= s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} \psi(x)x^{-s-1}\,dx
\end{aligned}$$

$$= s \int_1^\infty \psi(x) x^{-s-1}\, dx.$$

Frumtalnasetningin

Nú er komið að sönnuninni á frumtalnasetningunni,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

Hún byggir á tveimur einföldum setningum:

Setning (Ikehara). *Látum $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ vera vaxandi, $f(x) = O(x)$ og gerum ráð fyrir að*

$$g(s) = s \int_1^\infty f(x) x^{-s-1}\, dx$$

sé vel skilgreint og að g sé fágað fall á hálfplaninu $\operatorname{Re} s > 1$. *Gerum ráð fyrir að til sé fasti c þannig að fallið*

$$g(s) - \frac{c}{s-1}$$

hafi fágaða framlengingu yfir á grennd um línuna sem gefin er með jöfnunni $\operatorname{Re} s = 1$. *Þá er*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

Frumtalnasetninguna leiðir af setningu Ikehara: Samkvæmt setningu Tsébyséffs dugir að sanna að

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Setjum nú $f(x) = \psi(x)$. Þá er $g(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$. Fyrst $\psi(x) = O(x)$ og fallið ζ er fágað á

$$\{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s > 0, s \neq 1\}$$

og hefur skaut af stigi 1 í $s = 1$ með leifina 1, þá er ljóst að f og g uppfylla forsendurnar með $c = 1$.

Til þess að sanna setningu Ikehara þurfum við:

Setning (Tauber-setning fátæka mannsins) *Látum $F : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ vera takmarkað fall sem er heildanlegt á sérhverju hlutbili $[0, b]$, $b > 0$. Þá er fallið G, sem gefið er með*

$$G(z) = \int_0^\infty F(t) e^{-zt}\, dt,$$

vel skilgreint og fágað fall í hálfplaninu $\mathrm{Re}\, z > 0$. *Gerum ráð fyrir að hægt sé að framlengja* G *yfir í fágað fall í grennd um línuna* $\mathrm{Re}\, z = 0$. *Þá er heildið*

$$\int_0^\infty F(t)\, dt$$

samleitið (og jafnt $G(0)$*).*

Setningu Ikehara leiðir af Tauber-setningunni: Gerum ráð fyrir að föllin f og g uppfylli forsendur setningarinnar. Við setjum $x = e^t$ og skilgreinum

$$F(t) = e^{-t} f(e^t) - c.$$

Þá er F takmarkað á $[0, +\infty)$. Laplace-mynd fallsins F er

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^\infty \big(e^{-t} f(e^t) - c\big) e^{-zt}\, dt \\ &= \int_1^\infty f(x) x^{-z-2}\, dx - \frac{c}{z} \\ &= \frac{1}{z+1} \Big(g(z+1) - \frac{c}{z} - c \Big). \end{aligned}$$

Samkvæmt forsendum okkar er unnt að framlengja G yfir í fágað fall í grennd um sérhvern punkt á þverásnum og samkvæmt Tauber-setningunni eru heildin

$$\int_0^\infty \big(e^{-t} f(e^t) - c\big)\, dt = \int_1^\infty \frac{f(x)/x - c}{x}\, dx$$

samleitin. Nú þurfum við að sanna að af þessu leiði að $f(x)/x \to c$ ef $x \to +\infty$. Gerum ráð fyrir að

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} > c.$$

Veljum $\delta > 0$ þannig að

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} > c + 2\delta > c.$$

Þá er hægt að velja y hversu stórt sem vera skal þannig að $f(y)/y > c + 2\delta$. Veljum y það stórt að

$$\int_y^{\varrho y} \frac{f(x)/x - c}{x}\, dx < \delta \log \varrho, \tag{3}$$

þar sem $\varrho = (c+2\delta)/(c+\delta) > 1$. Fyrst f er vaxandi fall, þá er

$$f(x) \geq f(y) > (c+2\delta)y > (c+\delta)x, \qquad \text{ef } y < x < \varrho y,$$

og þar með er

$$\int_y^{\varrho y} \frac{f(x)/x - c}{x}\, dx \geq \int_y^{\varrho y} \frac{\delta}{x}\, dx = \delta \log \varrho$$

í mótsögn við (3). Því er $\limsup_{x\to+\infty} f(x)/x \leq c$. Á svipaðan hátt er sýnt að $\liminf_{x\to+\infty} f(x)/x \geq c$.

Sönnun á Tauber-setningunni: Fyrst F er takmarkað, þá getum við gert ráð fyrir að $|F(t)| \leq 1$ ef $t \geq 0$. Fyrir sérhvert $\lambda \in (0, +\infty)$ skilgreinum við

$$G_\lambda(z) = \int_0^\lambda F(t)e^{-zt}\, dt.$$

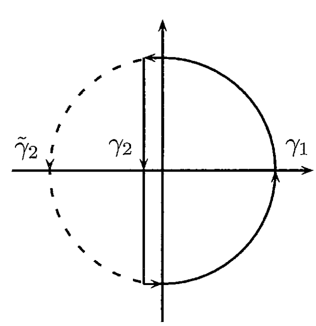
Þá er greinilegt að G_λ er heilt fágað fall og við ætlum að sýna að $G_\lambda(0) \to G(0)$ ef $\lambda \to +\infty$. Til þess beitum við Cauchy-formúlunni.

Látum $R > 0$ vera gefið. Samkvæmt forsendu okkar er til $\delta > 0$ þannig að G er fágað í grennd um mengið $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z \geq -\delta, |\operatorname{Im} z| \leq R\}$. Við skilgreinum nú keðjuna $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, þar sem vegirnir γ_1 og γ_2 eru gefnir með

$$\gamma_1 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma_1(t) = Re^{it},$$

$$\gamma_2 = \langle iR, -\delta + iR\rangle + \langle -\delta + iR, -\delta - iR\rangle + \langle -\delta - iR, -iR\rangle.$$

Hér táknar $\langle a, b\rangle$ strikið frá a til b.



Cauchy-formúlan gefur

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \big(G(z) - G_\lambda(z)\big)\,\frac{dz}{z}.$$

Í ljós kemur að þessi framsetning er óheppileg þegar meta á $G(0) - G_\lambda(0)$, því eina matið sem við höfum fyrir heildisstofninn í hægra hálfplaninu er

$$|G(z) - G_\lambda(z)| \le \int_\lambda^\infty |F(t)|e^{-xt}\,dt \le \frac{1}{x}e^{-\lambda x},$$

þar sem $x = \operatorname{Re} z > 0$, og þátturinn $1/x$ er til vandræða ef x er lítið. Leiðin út úr þessu er að athuga að

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \big(G(z) - G_\lambda(z)\big)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz,$$

sem er bein afleiðing af Cauchy-formúlunni. Síðan athugum við að

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{2x}{R^2},$$

þar sem $z = x + iy$ og $|z| = R$. Þetta gefur matið

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \big(G(z) - G_\lambda(z)\big)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} \frac{1}{x}e^{-\lambda x}e^{\lambda x}\frac{2x}{R^2}\,|dz| = \frac{1}{R}. \tag{4}$$

Næst metum við G_λ í vinstra hálfplaninu

$$|G_\lambda(z)| \le \int_0^\lambda |F(t)|e^{-xt}\,dt \le \int_0^\lambda e^{-xt}\,dt \le \frac{1}{|x|}e^{-\lambda x},$$

þar sem $x = \operatorname{Re} z < 0$. Nú er G_λ heilt fágað fall, svo heildi fallsins

$$z \mapsto G_\lambda(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)$$

yfir γ_2 er jafnt heildi þess yfir $\tilde\gamma_2$, þar sem $\tilde\gamma_2$ táknar hálfhringinn frá iR til $-iR$ með miðju í 0. Við fáum nú auðveldlega matið

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} G_\lambda(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde\gamma_2} \frac{1}{|x|}e^{-\lambda x}e^{\lambda x}\frac{2|x|}{R^2}\,|dz| = \frac{1}{R}. \tag{5}$$

Nú er komið að því að meta heildi fallsins

$$z \mapsto G(z)e^{\lambda z}\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)$$

yfir γ_2. Fyrst G er fágað í grennd um stoð vegarins γ_2, þá er til fasti $C = C(R,\delta)$ þannig að

$$\Big|G(z)\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)\Big| \le C(R,\delta),$$

ef z er punktur á veginum γ_2. Við skiptum veginum γ_2 í tvennt, $\gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4$,

$$\gamma_3 = \langle iR, -\alpha + iR\rangle + \langle -\alpha - iR, -iR\rangle$$

$$\gamma_4 = \langle -\alpha + iR, -\delta + iR\rangle + \langle -\delta + iR, -\delta - iR\rangle + \langle -\delta - iR, -\alpha - iR\rangle.$$

Þá fáum við

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} G(z)e^{\lambda z}\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)\,dz\Big| \le \alpha C(R,\delta) \tag{6}$$

og þar sem $\operatorname{Re} z < -\alpha$ ef z er á veginum γ_4, þá fáum við einnig

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_4} G(z)e^{\lambda z}\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)\,dz\Big| \le (R+\delta)C(R,\delta)e^{-\alpha\lambda}. \tag{7}$$

Nú getum við lokið við sönnunina. Við þurfum að sýna að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ sé til λ_0 þannig að $|G(0) - G_\lambda(0)| < \varepsilon$ ef $\lambda > \lambda_0$. Við veljum fyrst $R > 0$ þannig að $1/R < \varepsilon/4$ og veljum síðan $\delta > 0$ þannig að fallið G sé fágað í grennd um mengið

$$\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z \ge -\delta, |\operatorname{Im} z| \le R\}.$$

Við skilgreinum γ_1 og γ_2 eins og hér að framan og látum síðan $C(R,\delta)$ vera fasta sem uppfyllir (7). Þvínæst veljum við $\alpha > 0$ það lítið að $\alpha C(R,\delta) < \varepsilon/4$ og skilgreinum γ_3 og γ_4 eins og hér að framan. Að lokum veljum við λ_0 það stórt að $(R+\delta)C(R,\delta)e^{-\alpha\lambda} < \varepsilon/4$ ef $\lambda > \lambda_0$. Nú skrifum við

$$\begin{aligned} G(0) - G_\lambda(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \big(G(z) - G_\lambda(z)\big)e^{\lambda z}\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)\,dz \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} G_\lambda(z)e^{\lambda z}\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)\,dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} G(z)e^{\lambda z}\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)\,dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_4} G(z)e^{\lambda z}\Big(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\Big)\,dz. \end{aligned}$$

Samkvæmt (4-7) hafa allir liðirnir í hægri hlið jöfnunnar tölugildi $< \varepsilon/4$ ef $\lambda > \lambda_0$ og þar með er $|G(0) - G_\lambda(0)| < \varepsilon$ ef $\lambda > \lambda_0$.

Heimildir

[1] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta function*, Academic Press, 1974.

[2] P. Erdös, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **35** (1949) 374-384.

[3] J. Korevaar, *On Newman's Quick Way to the prime Number Theorem*, Mathematical Intelligencer, **4**, nr. 3, (1982), 108-115.

[4] D. J. Newman, *Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem*, American Mathematical Monthly, **87**, (1980), 693-696.

[5] B. Riemann, *Collected works*, Dover, New York, 1953.

[6] A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*, Ann. Math. **50** (1949), 305-313.

[7] E. C. Titchmarsh, (aukin og endurskoðuð útgáfa eftir D. R. Heath-Brown), *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford Scientific Publ., 1986.

[8] D. V. Widder, *The Laplace Transfrom*, Princeton University Press, 1946.

[9] N. Wiener, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Dover, 1933.

Sex stærðfræðingar verðlaunaðir í Berlín

Robert Magnus

Heimsþing stærðfræðinga er haldið á fjögurra ára fresti, nú síðast í ár. Það var haldið í Berlín, í fyrsta skipti í Þýskalandi í nær öld. Þingið er stærsti viðburður í heimi stærðfræðinga og tóku u.þ.b. 3.500 stærðfræðingar þátt í tíu daga dagskrá þess. Einn fastur dagskrárliður á heimsþinginu er veiting Fieldsverðlauna. Þau eru verðlaunapeningur úr gulli og eru veitt þeim sem hafa náð aðdáunarverðasta árangri í stærðfræðirannsóknum. Litið er á þau sem hvatningu auk verðlauna. Það er e.t.v. ástæðan fyrir því að Fieldsverðlaun eru einungis veitt mönnum undir fertugu. Mest eru veitt fern verðlaun í hvert skipti en stundum eru þau færri. Ólíkt Nóbelsverðlaunum er þeim aldrei skipt milli manna.

Í þetta skipti voru fern verðlaun veitt og var athyglisvert að tveir verðlaunahafar starfa við Cambridge háskóla, þeir Richard E. Borcherds og William T. Gowers. Hinir tveir voru Maxim Kontsevich, sem starfar hjá Institut des Hautes Études í París, og Curtis T. McMullen við Harvard háskóla.

Tunglskin og skrímslið

Richard Borcherds hlaut verðlaun vegna uppgötvana í algebru og rúmfræði. Nánar tiltekið sannaði hann tunglskinstilgátuna. Þessi tilgáta var sett fram af John Conway og Simon Norton í lok áttunda áratugarins. Litríkt heitið stafar af því að tilgátan felur í sér mjög óvænt tengsl milli ólíkra hluta. Af eigin reynslu getur höfundur þessara orða staðfest að Conway er einnig mjög litríkur, þar sem hann sótti fyrirlestra hans í Cambridge sem nemandi á sjöunda áratuginum.

Tunglskinstilgátan tengir ákveðna grúpu, sem hefur verið kölluð skrímslið, og sporger föll. Þau síðarnefndu hafa verið mikilvægt viðfangsefni í stærðfræði síðan á tímum Abels. Grúpur lýsa m.a. samhverfum. Þær eru byggðar upp úr einföldum grúpum sem ekki er hægt að kljúfa. Í lok áttunda áratugarins tókst stærðfræðingum að ljúka því gífurlega verki að flokka allar einfaldar grúpur. Þær mynda nokkra óendanlega flokka, t.d. samanstendur einn flokkur af jafnstæðugrúpunum A_n fyrir $n \geq 5$, en síðan eru grúpur sem virðast ekki tilheyra neinum flokki. Þær síðastnefndu kallast stakstæðar einfaldar grúpur (sporadic simple groups) og kom það í ljós að þær eru endanlega margar. Sú stærsta fékk heitið skrímslið, þar sem hún hefur u.þ.b. 8×10^{53} stök. Í sönnun sinni notaði Borcherds hugmyndir úr strengjafræði, nýrri og umdeildri grein eðlisfræðinnar, sem hefur verið frjósöm uppspretta óvæntra uppgötvana í hreinni stærðfræði.

Að fletta ofan af fléttum

Timothy Gowers hefur svarað torræðum spurningum um rúmfræði Banach rúma. Líkt og Borcherds notar hann hugmyndir frá tveimur, að því er virðist óskyldum, viðfangsefnum: fellagreiningu og fléttufræði. Pólski stærðfræðingurinn Stefan Banach var upphafsmaður Banach rúma og eftir hann lágu margar óleystar tilgátur um innri gerð þessara rúma. Nokkrar þeirra voru leystar fyrir um 20 árum, t.d. spurningin um tilvist Schauder-grunna. Þá lá viðfangsefnið kyrrt um skeið en merkilegar uppgötvanir Gowers hafa vakið það til lífs aftur. Merkilegast er eftirfarandi tvískipting: Sérhvert óendanlega vítt Banach rúm X hefur óendanlega vítt hlutrúm Y þannig að annað hvort hefur Y skilorðslausan grunn, eða Y er arfgengt ókljúfanlegt. Það síðarnefnda þýðir að ekkert hlutrúm rúmsins Y er bein summa tveggja óendanlega víðra Banach rúma. Í stórum dráttum er munurinn þessi. Hlutrúm Y af fyrri tegund hefur marga takmarkaða virkja á meðan hlutrúm af síðari tegund hefur mjög fáa (allir virkjar eru af gerðinni $\lambda I+T$ þar sem T er þjappaður virki). Slík rúm veita svör við mörgum, áður óleystum, spurningum og sýna að Banach rúm eru afar fjölbreytilegir gripir. Annað sem Gowers gerði var að finna nýja og snjalla sönnun á setningu Szemerédis úr fléttufræði um tilvist jafnmunaruna í mengjum af náttúrlegum tölum.

Strengir og hnútar

Skammtasviðsfræði hefur leitt til merkilegra uppgötvana í hreinni stærðfræði. Strengjafræði hefur orðið býsna vinsæl leið til að þróa skammtasviðsfræði og það er skemmtileg tilviljun að hugleiðingar manna í þessum fræðum hafa leitt til uppgötvunar nýrra óbreytna fyrir hnúta. Markmið hnútafræði er að finna óbreytu sem hægt er að reikna út fyrir sérhvern hnút og sem segir okkur um tvo hnúta hvort hægt sé að breyta öðrum í hinn án þess að klippa hnútinn sundur. Þetta er enn óleyst verkefni. Maxim Kontsevich er sérfræðingur í strengjafræði og hefur hann nú fundið bestu hnútaóbreytuna hingað til. Hann hefur einnig leyst tilgátu sem kennd er við Edward Witten og sannað að tvö líkön fyrir skammtaþyngdarafl eru jafngild.

Þeir leysa jöfnur er þa'ekki?

Curtis T. McMullen er sérfræðingur í tvinnhreyfikerfum (complex dynamics). Almenningur þekkir hreyfikerfafræði vegna tískufyrirbærisins kaos. McMullen hefur sannað merkilegar niðurstöður um Mandelbrot mengið sem menn höfðu gert tilgátu um strax á sjöunda áratugnum. Hann hefur einnig beitt hreyfikerfum til að athuga gamla og auðskiljanlega spurningu: Hvernig getur maður leyst jöfnu? Nánar tiltekið er um það að ræða að finna nálgunaraðferð sem er samleitin. Aðferð Newtons er vel þekkt en hún leiðir ekki alltaf til samleitnis. McMullen hefur sýnt að ekki er til nein allsherjaraðferð fyrir margliðujöfnur sem er samleitin í öllum tilfellum.

Dulkóðun í margar áttir

Nevanlinna verðlaunin eru veitt vegna árangurs í tölvunarfræði. Peter Shor sem starfar við rannsóknastofu AT&T hlaut þau fyrir að sýna að þáttun talna er hægt að framkvæma í margliðutíma á skammtatölvu. Þetta er byltingarkennd uppgötvun fyrir margra hluta sakir. Í venjulegri stafrænni tölvu er ástand hverrar einingar annað hvort 0 eða 1. Í skammtatölvu er ástandið aftur á móti línuleg samantekt ástandanna 0 og 1 í skilningi skammtafræðinnar. Í venjulegri tölvu er auðvelt að margfalda tvær tölur saman en að þátta tölu tekur, að því að er vitað, svo langan tíma að það er óframkvæmanlegt verkefni ef talan er stór. Á þessu byggjast dulkóðunaraðferðir sem eru notaðar til að senda upplýsingar milli tölva og koma í veg fyrir að utanaðkomandi geti komist að þeim. Shor hefur sýnt að þáttun er möguleg í margliðutíma með skammtatölvu og er því eins hröð og margföldun. En í bili þarf ekki að óttast að núgildandi dulkóðun sé ónýt vegna þess að enginn hefur smíðað skammtatölvu; hún er enn einungis kennilegt hugtak.

Síðasta orð í síðustu setningu

Að lokum verður að nefna hetju þingsins Andrew Wiles. Hann hefur öðlast aðdáun stærðfræðinga og almennings vegna sönnunar á síðustu setningu Fermats. Þar sem hann er of gamall til að hljóta Fields verðlaun (Wiles er 45 ára) ákvað Alþjóðlega stærðfræðisambandið (sem skipuleggur heimsþingið) að búa til sérstaka silfurtöflu til að heiðra hann. Upplýsingar um hvað stendur á töflunni voru ekki fyrir hendi, en telja verður ólíklegt að hún sé nógu stór til að sönnunin á tilgátu Fermats komist fyrir á henni.

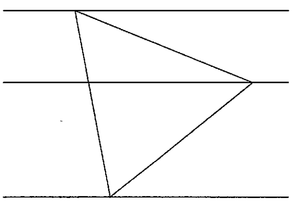
Þrautahorn

Robert Magnus

Í þessu fréttabréfi hefst ný og vonandi regluleg greinaröð. Við setjum fyrir lesandann stærðfræðiþrautir. Lausnir við þrautunum verða síðan birtar í næsta fréttabréfi. Við bjóðum lesandanum að taka þátt í þessu með okkur með því að senda inn lausnir. Við birtum svo nöfn þeirra sem leystu þrautina ásamt bestu lausninni. Okkur væri einnig sönn ánægja að birta þrautir sem þið kynnuð að senda okkur, en vinsamlegast látið þá lausnir fylgja.

Hér kemur fyrsti skammtur af þrautum. Fyrsta þrautin er auðvelt rúmfræðidæmi til að koma ykkur í gott skap.

Þraut 1. Þrjár samsíða línur eru tilteknar. Finnið leið til að teikna (með reglustiku og hringfara) jafnhliða þríhyrning sem hefur hornpunktana á línunum þremur (sjá myndina).



Þraut 2. Ákvarðið frumþætti tölunnar $3^{15} + 1$.

Þraut 3. Anna og Birna leika eftirfarandi talnaspil. Þær velja til skiptis náttúrlega tölu á bilinu 1 til 100. Reglurnar eru:

(i) Hverja tölu má aðeins velja einu sinni.

(ii) Velja má einungis tölu sem gengur upp í eða er margfeldi tölunnar sem valin var á undan.

(iii) Sú sem leikur fyrst verður að velja slétta tölu.

(iv) Sú vinnur sem velur tölu þannig að hin getur ekki fundið löglegan leik. Sýnið að sú sem leikur fyrst getur alltaf unnið og finnið vinningsleið.

Ferðasaga frá Fjársjóðseyju

Eygló Guðmundsdóttir

Sögulegur inngangur

Bao Dao—Fjársjóðseyja. Sögusagnir um ótrúlegt ríkidæmi þessarar litlu eyjar skammt undan austurströnd meginlands Kína hafa valdið endalausum straumi innflytjenda þangað öldum saman. Sjóræningjar og pólitískir útlagar, kaupmenn og ævintýramenn, bændur og fiskimenn hafa yfirgefið heimkynni sín á meginlandinu og freistað gæfunnar á eyjunni fögru og frjósömu sem nú gengur undir nafninu Taiwan. Fyrstu skráðu heimildir um eyna eru frá því fyrir upphaf Han keisaradæmisins, árið 209 f.Kr. En þótt lítið sé vitað um forsögu eyjarinnar benda fornleifafundir til búsetu manna þar fyrir 10 000 árum og áhöld sem fundist hafa leiða að því líkur að tengslin við meginlandið séu jafn gömul. Fornleifafundir hafa einnig bent til þess að ættbálkar frá Suðaustur-Asíu hafi sest að á suður- og austurströnd eyjarinnar og afkomendur frumbyggja af malaískum uppruna gegna enn mikilvægu hlutverki í menningu eyjarinnar. Fyrstu ritaðar heimildir um að Kínverjar hafi reynt að eigna sér eyna eru frá 239 e.Kr. þegar keisaradæmið Wu sendi þangað 10 000 manna könnunarleiðangur. Ekki hefur sá leiðangur leitt til fastrar búsetu því að fyrstu Kínverjarnir sem vitað er til að settust að á eynni voru af minnihlutaættkvísl Hakka sem sætt höfðu ofsóknum frá örófi alda og flýðu loks heimkynni sín í Hunan héraði fyrir um það bil 1500 árum. Leið þeirra lá þó fyrst suður til strandhéraða Fujian og Guangdong á meginlandinu þar sem þeir stunduðu fiskveiðar sem leiddu þá til Pescadores eyja, nú Penghu, og síðan til Taiwan. Um árið 1000 er talið að þeir hafi komið sér fyrir á frjósömum sléttum suðurhluta eyjarinnar og hrakið frumbyggjana sem þar voru fyrir til fjalla. Hakkar ræktuðu sykurreyr, hrísgrjón og te og hófu viðamikil viðskipti við meginlandið. Afkomendur þeirra eru nú meðal dugmestu og framsæknustu íbúa eyjarinnar.

Eins og fleiri dæmi eru um hefur eyjan „fundist“ oftar en einu sinni. Snemma á 15. öld tilkynnti útsendari Ming hirðarinnar, Zeng He, að hann hefði „uppgötvað“ eyju sem í skráðum heimildum hlaut nafnið *Taiwan* sem merkir á máli innfæddra „stallaður flói“ sem gæti vísað til stallaðra hrísgrjónaekra Hakkanna. Á Ming tímabilinu (1368–1644) lögðu sífellt fleiri innflytjendur leið sína frá Fujian héraðinu yfir Taiwan sundið. Hröktu þeir Hakkana sífellt lengra inn í landið og lögðu undir sig frjósamar slétturnar á vestanverðri eynni. Á 15. og 16. öld varð Taiwan athvarf sjóræningja og kaupmangara sem herjuðu á austurströnd Kína, versluðu þegar vel áraði en rændu er verr gekk.

Þegar hér er komið sögu voru vestrænar þjóðir heldur betur farnar að líta í kringum sig í veröldinni, tímar landafunda voru runnir upp og þjóðir Evrópu kepptust um að eigna sér ríkar nýlendur. Portúgalskir sæfarar hrópuðu frá sér numdir er þeir sigldu framhjá eynni: „*Isla formosa. Isla formosa!*“ sem útleggst á okkar tungu Fagra eyja og um margar aldir gekk eyjan undir nafninu Formósa á Vesturlöndum. Árið 1590 byggðu Portúgalir höfn og settu á stofn verslunarmiðstöð á norðurhluta eyjarinnar. Japanir reyndu í fyrsta sinn að innlima Taiwan árið 1593 eftir að þeir höfðu reynt án árangurs að sigra Kína. Þeim tókst þó ekki að hrista af sér Evrópubúa og 1624 byggðu Hollendingar mikið virki á suðvesturströnd eyjarinnar eftir að þeim mistókst að ná Macau frá Portúgölum. Að hætti nýlenduherra þjökuðu Hollendingar þegna sína með þungum sköttum og vinnuþrælkun, fluttu að auki inn trúboða ef takast mætti að snúa þegnunum til kristinnar trúar. Hollenska Austur-Indíafélagið kom á verslunareinokun á eynni og flutti inn ópíum frá Jövu sem einnig var undir þeirra stjórn. Hollendingar kenndu eyjarskeggjum að blanda tóbaki við ópíum og reykja það. Sá siður festi fljótt rætur á Taiwan og breiddist þaðan til meginlandsins þar sem hann átti eftir að valda falli Qing keisaraættarinnar og koma af stað stríði milli Kínverja og Breta tveimur öldum síðar. En Hollendingar sátu þó ekki einir að krásinni, fleiri ætluðu sér þar hlut. Spánverjar reistu virki á austurströndinni árið 1626 en höfðu aðeins skamma viðdvöl því Hollendingar flæmdu þá burt árið 1642. Ríkti nú friður á eynni í nokkur ár eða þar til græðgi Hollendinga keyrði um þverbak er þeir reyndu að innheimta nefskatt af landsmönnum. Þá var þeim nóg boðið og gerðu blóðuga uppreisn árið 1652.

Á meðan þessu fór fram barðist Ming keisaraættin hatrammlega fyrir veldi sínu á meginlandinu en varð að lúta í lægra haldi fyrir her Manchu manna sem komu frá norðausturhéruðunum. Síðasti Ming keisarinn fól sjóræningja frá Taiwan, Cheng að nafni, stjórn leifanna af her sínum áður en hann svipti sig lífi þegar Manchu hernum hafði tekist að ná Beijing og hrifsa völdin. Cheng tókst hins vegar að halda hernum saman og með japanskri eiginkonu sinni eignaðist hann soninn Koxinga sem hélt uppi merki föður síns og Ming ættarinnar allt til ársins 1658 að hann gafst upp og flýði með her sinn til Taiwan. Þar voru fyrir Hollendingar en með slægð tókst Koxinga að grafa undan veldi þeirra og leyfði að lokum af mildi sinni hollenska landstjóranum að yfirgefa landið ásamt mönnum sínum árið 1662. Þar með var fjögurra áratuga veldi Hollendinga á eynni lokið. Þótt nýlenduveldið væri hrunið gekk eyjan áfram undir nafninu sem Portúgalir höfðu gefið eynni, Formósa hét hún á tungum vestrænna þjóða fram yfir miðja 20. öldina.

Koxinga andaðist aðeins ári eftir að hann frelsaði eyna undan oki Hollendinga en áhrif hans voru gífurleg. Í föruneyti hans höfðu verið yfir 1000 fræðimenn, listamenn, munkar og meistarar í öllum greinum kínverskrar menningar og honum tókst að glæða með þjóðinni ást á öllu sem kínverskt var. Mörgum öldum eftir að hann var allur var hann gerður að þjóðhetju og honum veitt sæmdarheitið chuntzu eða „fullkominn maður". Sonur hans og sonarsonur ríktu eftir hans dag til ársins 1684 þegar Manchu náði loks að innlima eyna í kínverska keisaradæmið.

Manchu stjórnin lagði blátt bann við frekari flutningi fólks til eyjarinnar en engu að síður sjöfaldaðist íbúafjöldinn næstu 150 árin. Þrátt fyrir að Koxinga hefði innrætt þegnum sínum siðmenningu risti hún ekki dýpra en svo að Taiwanar misþyrmdu og jafnvel hálshjuggu evrópska sæfara sem urðu skipreika við strendur eyjarinnar. Af því hlutust tíðir árekstrar milli Kína og Vesturlanda. Í kjölfarið gaus svo upp ópíumstríðið milli Kína og Bretlands árið 1839 er Kínverjar fóru að amast við ópíumverslun Breta í Canton. Bretar brugðu þá á það ráð að auka ítök sín á Formósu og öðrum eyjum í grenndinni til að tryggja sér nýja markaði fyrir ópíumið. En það voru fleiri en Bretar sem reyndu fyrir sér á Formósu á 19. öldinni því að Bandaríkjamenn voru búnir að uppgötva hernaðarlegt og ekki síður verslunarlegt mikilvægi eyjarinnar í Austur-Asíu. Um miðja öldina höfðu bresk og bandarísk fyrirtæki haslað sér völl á eynni og fluttu út kamfóru, te, hrísgrjón, timbur og kol, en eini innflutningurinn, og iðulega verðmætari en útflutningurinn, var sem fyrr ópíum.

Kínversk yfirvöld skiptu sér lítt af málefnum Taiwan. Ekki var nóg að eyjan væri fögur, rík að gögnum og gæðum og hernaðarlega vel staðsett því með tímanum reyndist örðugt að halda þar uppi lögum og reglu. Þá sáu Japanir, sem löngum hafði dreymt um heimsveldi, sér leik á borði. Þeir höfðu átt í erjum við Kínverja frá því að taiwanskir frumbyggjar drápu japanska áhöfn skips sem strandaði við eyna árið 1872 og eftir hatrammar þrætur og hótanir um yfirtöku eyjarinnar buðu Kínverjar Japönum bætur og hurfu hinir síðarnefndu frá við svo búið. Eftir það stjórnuðu Kínverjar Taiwan í nokkur ár og lýstu eyna 22. héraðið í Kína árið 1886. Erjunum var þó ekki lokið. Árið 1895 braust út stríð milli Kína og Japan í kjölfar þess að Japanir hertóku Kóreu sem hafði löngum verið bandalagsþjóð Kínverja. Kínverjar biðu lægri hlut og töpuðu Taiwan og fleiri eyjum. Japanir lögðu svo undir sig Mansjúríu árið 1932 og fimm árum síðar höfðu þeir náð á sitt vald borgunum Tianjin, Beijing, Shanghai og Nanjing, sem þá var höfuðborg Kína. Árásunum stýrðu þeir frá flugvöllum sínum á Taiwan.

Japanir héldu yfirráðum á Taiwan og í hluta Kína fram að lokum Síðari heimsstyrjaldarinnar er Kínverjar endurheimtu lönd sín eftir friðarsamninga 1945. Þróun á Taiwan hafði tekið stökk fram á við undir stjórn Japana. Þeir byggðu upp járnbrautir og vegi sem tengdu öll helstu byggðarlög eyjarinnar, reistu skóla og sjúkrahús, tæknivæddu iðnað og landbúnað og síðast en ekki síst batt ströng stjórn þeirra endi á innbyrðis átök og deilur. Þrátt fyrir þetta voru íbúarnir ekki ánægðir með nýju herraþjóðina enda nýttu Japanir landsgæðin eingöngu í eigin þágu og reyndu að móta þjóðina í sinni mynd og rjúfa aldagamlar hefðir, gerðu henni að tala japönsku og jafnvel að taka upp japönsk nöfn.

Um aldamótin 1900 hafði sterk þjóðernishreyfing risið upp í Kína. Byltingarforinginn og hugmyndasmiður lýðræðisaflanna var Dr. Sun Yatsen. Árið 1912 báru herir hans sigurorð af her keisaradæmisins og hið 50 alda gamla kínverska keisaradæmi leið undir lok er síðasti keisari Qing-ættarinnar lagði niður völd. Sun Yatsen var þá til bráðabirgða kjörinn fyrsti forseti Kínverska lýðveldisins en ungur liðsforingi í her hans, Chiang Kaishek, sem hafði tekið þátt í skæruhernaði lýðveldishersins, tók við forystu hersins og leiddi hann í áratuga baráttu við kínverska kommúnista auk Japana. En baráttu Chiangs var síður en svo lokið þótt Japanir gæfust upp í stríðslok, kommúnistar notfærðu sér ringulreið eftirstríðsáranna og óðu uppi sem aldrei fyrr undir stjórn Maos Zedong enda úði og grúði af stríðstólum sem Japanir höfðu skilið eftir. Í fjögur ár ríkti borgarastyrjöld í Kína, spilling og upplausn í röðum þjóðernissinna gerði Chiang erfitt fyrir að halda lýðveldinu saman. Árið 1948 var hann þó kjörinn forseti Kína. En um það leyti náðu kommúnistar undirtökunum og í janúar 1949 sagði hann af sér embættinu.

Eftir að hafa farið huldu höfði í tæpt ár sneri Chiang Kaishek til baka í desember 1949 og leiddi sundurlausa hjörð þjóðernissinna, verslunarmanna, munka og meistara hinna ýmsu listgreina sem ekki vildu una yfirráðum kommúnista yfir sundið til Taiwan. Fetaði hann þar í fótspor Koxinga þremur öldum fyrr, rak á brott gjörspillta landsstjóra og kom á endurbótum í anda kínverskrar hefðar. Og hann bætti um betur því auk þess að endurskipuleggja skólakerfið sendi hann unga námsmenn til útlanda að nema nýja tækni og flytja heim nýja þekkingu. Stjórn sína nefndi hann útlagastjórn Kínverska lýðveldisins með aðsetur í Taipei á Taiwan og voru kjörorð hennar í anda meistara Sun Yatsens *þjóðernisvitund, lýðræði* og *fjárhagslegt öryggi fólksins.* Chiang fór ekki dult með skoðanir sínar og í hinsta ávarpi sínu til þjóðarinnar minnti hann á kjörorðin og hvatti þjóðina til að halda fast við þau áform að endurheimta meginlandið og endurvekja menningu sína. Chiang Kaishek dó 5. apríl 1975 og í næstu forsetakosningum var sonur hans, Chiang Ching-kuo kjörinn forseti. Eftir lát hans 1988 tók Lee Teng-hui við völdum og var kjörinn forseti árið 1990. Hann var fyrsti forseti lýðveldisins sem fæddur var á Taiwan.

Nú þegar líður að aldamótum er svo komið að stjórnvöld í Beijing og Taipei eru sammála um að Taiwan sé hérað í Kína, þótt ekki líti báðir aðilar það sömu augum. Djúpstæður ágreiningur stendur hins vegar um hvor sé lögleg stjórn landsins, kommúnistastjórn Alþýðulýðveldisins Kína eða útlagastjórn Lýðveldisins Kína á Taiwan. Á undanförnum 50 árum hefur smám saman myndast djúp gjá milli þjóðarbrotanna, hvort sem er í þjóðfélags-, menningar-, fjárhags- eða stjórnmálalegu tilliti.

Í gervallri sögu Kína hafa trúarbrögð vikið fyrir menningunni. Engum trúarkenningum, ef undan er skilin þjóðfélagsleg heimspeki Konfúsíusar, hefur nokkru sinni verið þröngvað upp á þjóðina. Búddismi, Daóismi, Múhameðstrú, kristin trú og fleiri trúarbrögð hafa lifað í sátt og samlyndi í Kína svo öldum skiptir, líklega vegna þess að þau hafa haldið sig utan veraldlegra áhrifa, og svo er enn í dag á Taiwan. Umburðarlyndi í trúmálum er ríkjandi og í menningu sinni leggja Taiwanar áherslu á hina mannlegu samkennd, *ren chingwei*. Í öllum samskiptum þeirra, í viðskiptum og skemmtanalífi, á opinberum vettvangi jafnt sem í einkalífi, í stóru sem smáu er mannleg tillitssemi í fyrirrúmi.

Staðhættir

Taiwan liggur á milli 22° og 25° norðlægrar breiddar og 120° til 122° austlægrar lengdar og liggur nyrðri hvarfbaugur um hana miðja. Eyjan er 36 000 km^2 að flatarmáli eða ámóta og þriðjungur Íslands, um það bil 390 km löng og um 140 km á breidd þar sem hún er breiðust. Hún er láglend og frjósöm að vestanverðu en fjallgarður liggur eftir eynni endilangri að austanverðu og er þar sums staðar þverhnípi í sjó fram en annars staðar takmarkað láglendi. Hæsta fjallið, Yu shan, sem útleggst Jaði fjallið, er tæpir 4000 m á hæð. Fjallgarðurinn er skógi vaxinn og sundurskorinn af djúpum gljúfrum sem sum eru stórkostleg náttúruundur. Taiwan er eldfjallaeyja, hveri og heitar laugar er þar víða að finna og jarðskjálftar eru algengir. Íbúar eru 22 milljónir svo að eyjan er þéttbýl, 80% íbúanna búa á frjósömum vesturhlutanum og stunda einkum landbúnað, iðnað og verslun. Fiskveiðar eru nokkuð stundaðar, einkum frá austurströndinni en minnihlutahópar sem fást við ýmiss konar þjóðlega framleiðslu búa flestir í fjallahéruðunum. Loftslag er heitt og rakt, sumarhiti er að meðaltali um 35°C á norðurhluta eyjarinnar og vetrarhiti fer ekki niður fyrir 5°C. Monsúnvindarnir sjá hins vegar til þess að rakinn fer sjaldan niður fyrir 75%. Fellibyljir fara gjarnan yfir landið á tímabilinu frá ágúst til október. Snjór fellur á hæstu fjöll og er þar skíðaparadís í stuttan tíma á veturna. Besti tíminn til að ferðast um landið er á vorin í apríl og maí og á haustin í október og nóvember.

Ferðalangar á framandi slóð

Við fengum eins gott ferðaveður og hægt er að hugsa sér þann 9. júlí 1998, daginn sem lagt var af stað til Taipei til að taka þátt í 39. Ólympíukeppninni í stærðfræði sem þar var haldin dagana 13.–21. júlí 1998 eða árið 86 samkvæmt kínversku tímatali sem er talið frá því að Dr. Sun Yatsen var kjörinn fyrsti forseti Kínverska lýðveldisins 1. janúar 1912. Leiðangursmenn voru 6 heiðurspiltar, Pawel, Pétur, Stefán Ingi, Marteinn Þór, Björn og Sveinn, ásamt undirritaðri, sem gegndi stöðu fararstjóra og aðstoðarmanns dómnefndarfulltrúans Geirs Agnarssonar. Hann var hins vegar farinn á undan að taka þátt í ráðstefnu í Prag en ætlaði að hitta okkur á flugvellinum í Frankfurt og verða okkur samferða þaðan. Það stóð heima og eftir 3 tíma flug til Frankfurt og tveggja tíma bið þar var lagt af stað með breiðþotu China Airlines í 12 klukkustunda flug til Kuala Lumpur. Þar var hálfrar annarrar stundar bið áður en haldið var áfram síðasta hluta ferðarinnar, $4\frac{1}{2}$ stundar flug til Taipei. Heildarflugtími var því $19\frac{1}{2}$ klukkustund en ferðalagið allt tók 23 klukkutíma eða jafnvel mætti telja það 26 tíma því að í raun hófst það klukkan 5 að morgni hins 9. júlí þegar leigubíll hóf að slæða upp ferðalangana heima. Þegar við bætist 8 klukkustunda tímamunur má sjá að vel var liðið á annan sólarhring þegar loks var lent á Chiang Kaishek flugvelli og ekki komið heim á hótel fyrr en síðdegis þann 10. júlí. Við vorum samt furðu hress, merkilegt hvað hægt er að sofa inni í miðri troðfullri breiðþotu innan um síblaðrandi Kínverja, strákarnir sváfu að vísu ekki mikið en fararstjórinn dró upp eyrnatappana sína og svaf af sér tvær kvikmyndir af einum fjórum sem sýndar voru á leiðinni. Fulltrúar keppninnar, þeirra á meðal kínverska stúlkan Pina Wu sem átti að verða leiðsögumaður íslenska liðsins, tóku á móti okkur á flugvellinum ásamt liðum fleiri landa sem komu á svipuðum tíma. Síðan tók við rútuferð til borgarinnar. Keppendur og fararstjóri gistu fyrstu þrjár næturnar á glæsihóteli Howard Plaza sem kom í ljós að styrkti keppnina og átti að vera aðsetur fararstjóra og dómnefndarfulltrúa eftir sjálfa keppnisdagana en dómnefndarfulltrúinn var ásamt öðrum slíkum sendur á annað Howard hótel úti í sveit á meðan þeir voru að ganga frá keppnisgögnum svo að ekki væri hægt að hafa samband við hann fyrir keppnina—ekkert svindl þar! Fyrsta kvöldið borðuðum við á hótelinu, hættum okkur ekki út í náttmyrkrið í ókunnri stórborg til að leita að veitingastað.

Laugardagsmorguninn 11. júlí mætti Pina til að fara með okkur í skoðunarferð um næsta nágrenni. Við vorum ekki búin að fá okkur morgunverð svo að við báðum að hún færi með okkur á kínverskan morgunverðarstað í nágrenninu eftir að við höfðum hneykslast mátulega á því að hún sagðist sjálf alltaf borða morgunverð á MacDonalds! Staðurinn reyndist framandi og maturinn ekki síður, ekki var nokkur leið að vita hvað væri í hinum ýmsu réttum en í þeim flestum reyndist vera eitthvert kjöt og þá voru sumir í erfiðum málum því að Sveinn fékkst ekki til að setja slíkt inn fyrir sínar varir. Með aðstoð Pinu pöntuðum við þó sitt lítið af hverju og svaladrykk innfæddra með. Svo var sest að borðum og byrjað að narta ofurvarlega í kræsingarnar. En ekki gekk öllum vel að kyngja og þegar skola átti „óætinu“ niður með svaladrykknum tók steininn úr og við lá að háttvísi sumra fyki út í veður og vind. En frán augu fundu gosdrykki í dósum og fyrr en varði var heimsdrykkurinn kóka kóla kominn á borðið og ákveðið var að kannski væri ekki svo vitlaust eftir allt að fá sér hamborgara í morgunverð. Það sem eftir var laugardagsins fór svo í að kanna nágrennið með sérstakri áherslu á kunnugleg skyndibitaskilti og hvílast heima á hóteli því að tímamunur og ferðaþreyta setti eðlilega mark sitt á fyrstu dagana. Um kvöldið fórum við á nýfundinn hamborgarastað, að vísu ekki McDonalds, en allt er hey í harðindum og allir glorsoltnir enda hafði morgunverðurinn reynst flestum léleg undirstaða.

Sunnudaginn 12. júlí gat Pina ekki verið með okkur því að hún þurfti að sinna undirbúningi á keppnisstað. Fararstjórinn ákvað þá að láta reyna á hæfni sína í starfi og bauð upp á skoðunarferð um miðborg Taipei á eigin spýtur enda búin að lesa spjaldanna á milli tæplega 300 blaðsíðna bók um Taiwan og þóttist fær í flestan sjó. Dagurinn var heitur og rigningarlegur er lagt var af stað gangandi í býtið með götukort að vopni—fararstjórinn treysti sér ekki í almenningssamgöngunetið upp á kínversku—og á fastandi maga því að morgunverðurinn skyldi verða að hætti Pinu, hamborgari á McDonalds! Marteinn og Pawel skipuðu sér í framvarðarsveit hópsins og komu fyrstir auga á merkið langþráða í hliðargötu. Eftir bendingar og erfiðleika við að gera afgreiðslufólki skiljanlegt að einn ætti aðeins að vera með grænmeti var tekið hressilega til matar enda liðið nær hádegi! Að málsverði loknum var göngunni haldið áfram og fyrr en varði glitti í skrautleg þök og við vorum komin að fyrsta áfangastað, menningarsetri Chiang Kaisheks, með 76 metra hárri stílhreinni minningarhvelfingu þar sem meistari Chiang sat á stalli í líki 25 tonna bronsstyttu og tók af lítillæti á móti gestum og gangandi undir umsjón árvakurra öryggisvarða. Í glæsilegum garðinum umhverfis var hins vegar líf og fjör og staðurinn ekki heilagri en svo að á sunnudögum virtist fara þar fram hjólaskautakeppni fyrir börn og unglinga en eldra fólk sat og spjallaði í skuggum framandi trjáa. Sitt til hvorrar handar við hvelfinguna eru Þjóðaróperan og Tónleikahöllin, tvær eins byggingar í dæmigerðum kínverskum stíl, með margskiptum vængjaþökum, skreyttar gulli og ótrúlega fínlegum mynstrum í skærum litum. Næsti áfangastaður var frægasta hof borgarinnar, Lungshan eða Drekafjall sem svo er nefnt vegna íburðarmikilla drekaskreytinga á þökum hofsins. Það tók lengri tíma en áætlað var að finna hofið sem er vel falið inni á milli húsa í þröngri götu í gamla borgarhlutanum. Kort okkar sýndi reyndar ekki nema helstu götur auk þess sem götunöfnin voru með vestrænu letri á kortinu en flestar götur á þessum slóðum voru einungis merktar með kínverskum táknum. Okkur kom á óvart hve allir virtust boðnir og búnir að leiða villuráfandi útlendinga á rétta braut því að við máttum varla stoppa við umferðarljós án þess að vingjarnlegir vegfarendur spyrðu hvort þeir gætu vísað okkur til vegar. Ljóst var að andi hins mikla heimspekings Konfúsíusar, sem fæddist árið 551 f.Kr. og Kínverjar nefna Kong fuzi eða meistara Kong, sveif enn yfir borg og bý. Hann var upphafsmaður þeirrar lífsspeki sem gestir á Taiwan verða enn í dag áþreifanlega varir við og felst í því að hamingja manna sé einkum fólgin í gestrisni og hjálpsemi við náungann. Hins vegar er enska hins almenna borgara ekki upp á marga fiska og kínverskur framburður okkar að sama skapi bágur svo að minna gagn var að leiðbeiningunum en vilji stóð til. En áttvísi fararstjóra lét ekki að sér hæða og við reyndumst vera á nákvæmlega réttri leið eftir bendingum ávaxtasala sem skaut yfir okkur skjólshúsi, eða öllu heldur tjaldi, og gaf okkur að bragða framandi ávexti þegar allt í einu steyptist yfir hellidemba. Eftir að við höfðum vopnast regnkápum, regnhlífum eða pappaspjöldum frá ávaxtasalanum væna héldum við af stað og vissum ekki fyrr en við stóðum andspænis hofinu sem kúrði, í senn íburðarmikið og yfirlætislaust, við hliðina á nýlegri glerbyggingu sem stakk í stúf við aðrar byggingar hverfisins og var hreint stílbrot við fornlegt hofið. Hofið var reist á öndverðri 18. öld til vegsemdar helstu gyðjum Taiwan, Kuanyin, gyðju miskunnseminnar sem auk þess að hughreysta og styðja hina lifandi sér einnig um að losa hina látnu við kvalir hreinsunareldsins, og Matzu, sem upphaflega var gyðja sæfarenda en telst nú geta leyst hvers manns vanda. Annars er trú Taiwana flókin og samsett úr hinum ýmsu trúarbrögðum og kenningum, hofin óteljandi og helguð hinum ýmsu goðum. Kínversk trúarbrögð eiga rætur að rekja til dýrkunar náttúruvætta ýmiss konar en gegnum aldirnar hafa bæst við ótal goð sem eiga fyrirmyndir í fornum hetjum og mikilmennum úr sögu þjóðarinnar og sögnum, persónur sem teknar hafa verið í tölu goða með keisaralegri tilskipun eða að vali alþýðunnar. Þannig má segja að þau séu sambærileg við dýrlinga kaþólskrar trúar. Það var ekki laust við að við fylltumst lotningu er við stigum inn í forgarð hofsins og vorum í vafa um hvort tilhlýðilegt gæti talist að taka þar myndir eða ganga þar um af jafn ómerkilegri hvöt og forvitni um framandi siði. En enginn virtist kippa sér upp við nærveru okkar svo að við fikruðum okkur smám saman innar í reykelsisangandi helgidóminn og virtum fyrir okkur langborð sem svignuðu undan kræsingum sem trúaðir báru fyrir guði sína. Öndunum nægði þó augljóslega reykurinn af réttunum því að lokinni tilbeiðslu framan við skurðgoðin inni í hinu allra helgasta tók fólkið „leifarnar“ með sér heim og bar þær á kvöldmatarborðið fyrir fjölskylduna. Einnig var fórnað pappírsseðlum sem voru peningaígildi og hægt að kaupa ásamt öðru fórnargóssi í sölubúðum í fordyri hofsins. Hér eru menn raunsæir og gera sér grein fyrir að guðirnir lifi ekki á brauðinu einu saman frekar en mennirnir! Árið 1945 varð hofið óvart fyrir sprengjuárás Bandamanna og slíkir voru logarnir sem af hlutust að þeir brenndu hofið til grunna og bræddu járnhandrið utan um kamfóruviðarstyttu af Kuanyin en gyðjan sjálf stóðst vítislogana óskemmd. Að sjálfsögðu kom ekki annað til greina en endurreisa hofið í upphaflegri mynd utan um styttuna sem með jafnaðargeði virðir enn fyrir sér trúaða frá stalli sínum. Auk mikilfenglegs tréskurðar er hofið þekkt fyrir listilega höggnar steinsúlur og bronsmuni og hafa einungis sigurvegarar árlegrar útskurðarkeppni fengið að koma nærri verkinu. Þegar hér var komið frumraun fararstjóra í leiðsögn var orðið áliðið dags og ekkert lát á rigningunni svo að stefnan var tekin á aðaljárnbrautarstöðina sem samkvæmt leiðsögubókinni góðu var glæsileg bygging í hallarstíl og vel þess virði að skoða. Rétt þar hjá er frægasta kennileiti borgarinnar, Shin Kong turn, 245 metra hár og byggður árið 1994. Upp í hann liggur háhraðalyfta sem flytur farþega með 9 metra hraða á sekúndu upp í útsýnispall á 49. hæð á 35 sekúndum. En nú var farið að gæta þreytu og hungurs í hópnum og urðu því allir glaðir að sjá annað þekkt skyndibitamerki, góðlegt andlit hins ameríska kjúklingabónda Colonel Sanders í KFC. Eftir að hafa satt sárasta hungrið og látið mestu bleytuna leka af sér var ákvörðun tekin um að sleppa því að fara upp í turninn að sinni enda viðraði ekki til útsýnis og stefnan tekin á aðaljárnbrautarstöðina. Þar höfðum við litla viðdvöl þótt eflaust sé hún verð skoðunar en fundum okkur leigubíla heim á hótel. Hinir allra hörðustu, Pawel og Marteinn, ákváðu þó að ganga heim.

Í opinberri heimsókn

Mánudaginn 13. júlí hófst svo opinber keppnisdvöl. Við vorum sótt klukkan 8:30 og ekið með okkur á stúdentagarðinn þar sem keppendur áttu að búa allan tímann og þreyta keppnina. Við fararstjórar áttum að búa þar einnig fram yfir keppni en flytja eftir það yfir á Howard Plaza ásamt dómnefndarfulltrúum og taka þátt í yfirferð og vörn úrlausna gagnvart yfirdómurum. Stúdentagarðurinn er í útjaðri borgarinnar og lítur mjög aðlaðandi út við fyrstu sýn en sumir höfðu áhyggjur af að erfitt yrði að rata milli bygginganna sem ýmist voru heimavistir nemenda (strákar og stelpur bjuggu ekki í sömu húsum), kennsluhúsnæði, stjórnunarsetur, íþróttahús, mötuneyti, pósthús eða samkomu- og prófsalir. Einhvern veginn hafðist þetta þó og til að fyrirbyggja að nokkur yrði hungurmorða voru sett upp skilti sem vísuðu á matsalinn. Þá var farið að skoða húsakynni. Strákarnir bjuggu á fimmtu hæð sem Pinu þótti hið versta mál en hraustir Íslendingar skokka það nú án þess að blása úr nös. Hins vegar brá okkur aðeins í brún þegar við litum á rúmin, dýnulausar trékojur og rúmfatnaðurinn tvö þunn teppi, eitt undir og annað ofan á! En Pina yppti bara öxlum þegar hún sá á okkur svipinn og sagði að þetta væri lúxus, í sinni heimavist væru kojurnar úr járni—hún skaut því reyndar að mér að fararstjórar fengju rúm með dýnum. Þá var komið að fararstjóra að kanna sína vistarveru sem reyndist í næstu byggingu og einnig á fimmtu hæð. Þar var aðbúnaður öllu betri, uppbúin rúm með þykkri dýnu, sæng og kodda. Ég veit ekki hvort í mér blundaði einhver tortryggni en ég ákvað að byrja á að prófa dýnuna svo að ég svipti sænginni af og hlammaði mér niður á rúmið. En „tvisvar verður sá feginn sem á steininn sest,“ segir máltækið, dýnan reyndist grjóthörð og auk þess enn í þykkum plastumbúðum, líklega hafa þeir samið um að fá að skila dýnunum aftur að keppni lokinni og því ekki tekið plastið af. Undirrituð ákvað hins vegar að láta ekki bjóða sér það, reif lakið af dýnunni, dró plastið utan af, rúllaði því saman og setti inn í skáp og bjó svo um á ný. Herbergisfélaga fékk ég síðar um daginn, fararstjóra Lúxemborgarliðsins, Claudine. Eftir að við höfðum komið okkur fyrir héldum við út í matsal. Þar blasti við okkur hið glæsilegasta hlaðborð þótt maturinn á því væri ekki allur jafn girnilegur þegar betur var að gáð, einhvers konar blanda af vestrænum mat og austrænum en matreiddur að hætti heimamanna, bragðlítill og vægast sagt lítt áhugaverður, en einu mátti þó alltaf treysta, ávexti fengum við nóga og kökurnar sem ætlaðar voru sem eftirréttur voru ágætar og lifðu sumir að mestu leyti á þeim allan tímann. Grænmeti var líka alltaf á boðstólum en fábreytt, aðeins salatblöð, agúrkur og tómatar. Stærðfræðinemendur skólans gegndu hlutverki þjóna, skenktu vatni í glös, buðu kaffi og te og tóku af borðum og voru þau svo dugleg að við urðum að halda sem fastast í diskana til þess að þeir væru ekki rifnir burt í miðjum klíðum. Að máltíðinni lokinni fórum við út að kanna umhverfið og athuga hvað yrði hægt að taka sér fyrir hendur. Það reyndist harla fátt, samkomusalurinn var ekki tilbúinn en íþróttaaðstaðan stóð okkur til boða. Hún var hins vegar ekki upp á marga fiska, nokkur borðtennisborð í salnum og grasvöllur með körfu og hlaupabraut. Við fórum út með bolta en fljótlega tók að rigna eldi og brennisteini svo að við urðum að forða okkur inn. Þá var ekki um annað að ræða en fara bara að spjalla við nábúana eða æfa sig í stærðfræði enda nóg af verkefnum með að heiman.

Þriðjudagsmorgun 14. júlí var öllum skipað í rútur til opnunarhátíðar sem fram fór í alþjóðlegri ráðstefnuhöll. Þar var okkur smalað inn í salinn eftir girtum brautum. Ástæðuna álitum við vera þá að þarna voru einnig staddir dómnefndarfulltrúarnir sem vissu allt um hvaða dæmi yrðu í keppninni og engin áhætta skyldi tekin á svindli. Við sáum reyndar ekki hvernig slíkt ætti að vera hægt því að þeir voru á afmörkuðum bási mörgum sætaröðum fyrir ofan okkur í geysistórum salnum og ekki viðlit að kallast á. Okkur tókst þó að koma auga á okkar mann, Geir, og veifa honum svo hann sá okkur líka. Eins og vera ber á opnunarhátíð kynntu tveir prúðbúnir kynnar háttsetta ræðumenn í löngum röðum á milli þess sem hljómsveit ungmenna lék lög af ýmsum uppruna. Að athöfn lokinni var dómnefndarmönnum smalað út og burt áður en okkur var hleypt út úr salnum—öryggið í fyrirrúmi. Þegar heim var komið beið okkar hádegisverður en að honum loknum vildum við komast út fyrir skólalóðina til að skoða okkur um, komast í búð og kaupa kort til að senda heim. En þá kom aldeilis babb í bátinn. Í ljós kom að okkur var óheimilt að yfirgefa svæðið og voru verðir í hliðinu til að sjá um að því væri hlýtt. Rökin fyrir því voru að við myndum þá bara týnast eða fara okkur að voða. Þetta þótti sjálfstæðum Íslendingum hið versta mál, að Sveini þó undanskildum sem fannst sú ráðstöfun bæði sanngjörn og skiljanleg. Við skildum reyndar ekki hvers vegna við vorum þá við komuna látin hafa spjald um hálsinn með nafni, titli og þjóðerni, látum það vera, en aftan á því var á kínversku áletrun sem við skyldum sýna ef við lentum í ógöngum eða villtumst þar sem viðkomandi var beðinn um að koma okkur til skila á keppnisstað á kostnað keppnisyfirvalda. Það varð því úr að við sátum í fangelsi en Pina tók að sér að fara og kaupa kort svo að við gætum þó látið vita af okkur heima á Fróni. Við héldum okkur innan dyra við stærðfræðiiðkun, lestur eða einfaldlega svefn enda enn verið að vinna niður tímamuninn.

Miðvikudagurinn 15. júlí var fyrri keppnisdagurinn. Klukkan 9 til 13 glímdu keppendur við fyrri þrjú dæmi keppninnar en á meðan var fararstjórum hleypt úr prísundinni án þess þó að nokkuð væri skipulagt handa þeim að gera. Þeir sem voru vel lesnir um staðhætti vissu að skammt norðan við Taipei væri Yangmingshan þjóðgarðurinn sem möguleiki væri að skoða á dagparti. Við vorum því nokkur sem fengum kínverska leiðsögustúlku til að fara með okkur þangað í strætisvagni og þurftum að skipta um vagn einu sinni á leiðinni. Það var að mörgu leyti ágætur ferðamáti, maður komst aðeins nær fólkinu og sá margt á leiðinni, en ferðin tók langan tíma í óvægnum hitanum. Vegurinn liðaðist upp skógi vaxnar hlíðar þar sem glæsivillur iðnjöfra, kvikmyndastjarna og verktaka tróna ofar mengun og hitamollu borgarinnar. Efst í fjallinu er svo þjóðgarðurinn með stígum og blómalistaverkum, styttum af mektarmönnum og minjagripaverslunum, tjörnum með gosbrunnum og fossandi smálækjum. Þótt við værum þarna komin hátt upp í fjöllin var hitasvækjan mikil á norrænan mælikvarða og bjargaði mér vatnsflaskan sem ég skildi aldrei við mig. Leiðin til baka var ekki síður löng því að nú var kominn mesti umferðartími dagsins auk þess sem hitinn og þreytan voru farin að segja til sín. Eftir að staðan hafði verið tekin gengum við snemma til náða til að safna kröftum.

Fimmtudag 16. júlí var komið að kveðjustund í bili. Eftir að fararstjóri hafði kvatt lið sitt með óskum um góða hegðun og hlýðni við Pinu í hvívetna og hvatt það til dáða á stærðfræðisviðinu og keppendur voru horfnir inn í prófsali síðari keppnisdaginn var pakkað niður og enn flutt um set, yfir á Howard Plaza á ný. Á leiðinni var minnismerki Chang Kaisheks skoðað og nú var veðrið bjartara en þegar ég fór þangað með strákana. Sama dag flutti Geir ásamt öðrum dómnefndarfulltrúum á sama hótel og urðu með okkur fagnaðarfundir. Við vorum sett í herbergi með Dönum sem var hið besta mál og kærkomið tækifæri að beita dönskukunnáttunni og Geir norskunni sem er hans móðurmál. Fararstjóri Dananna var ung stúlka, háskólanemi í stærðfræði, sem gegndi hlutverkinu í fyrsta sinn eins og ég en dómnefndarfulltrúinn danski, sem sló um sig með því að þylja utanbókar heila kafla úr Eglu, var gamalreyndur í starfinu. Hann var aðallega í heimsóknum hjá syni sínum sem býr í Taipei en lét stúlkuna að mestu um að fara yfir verkefnin. Hjá okkur Geir ríkti hins vegar meiri samvinna þótt ábyrgðin væri hans, ég fór yfir rúmfræðidæmin en hann yfir annað. Við fengum ekki verkefni fyrri hluta í hendur til yfirferðar fyrr en undir kvöld þegar dómarar höfðu lokið við að fara yfir þau að því marki sem þeir gátu því að úrlausnir voru á móðurmáli keppenda. Kvöldið fór því í að lesa yfir og gefa stig eftir tiltekinni stigatöflu, reyna að finna sem allra mest vit í úrlausnum okkar manna og leggja á ráðin um hvernig við gætum rökstutt okkar mál fyrir dómnefndinni. Þetta kvöld var strákunum boðið á hornaboltaleik. Hins vegar fór ekki sögum af þeim fyrr en við hittumst aftur við lokaathöfnina á mánudag. Við fengum að vísu símanúmer sem við áttum að geta hringt í til þeirra en okkur tókst aldrei að ná sambandi.

Föstudaginn 17. júlí reið jarðskjálfti yfir Taiwan, 6,2 á Richter-kvarða. Við fundum ekki fyrir honum norður í Taipei en sunnar á eynni urðu talsverðar skemmdir af völdum skjálftans. Þar sem við vissum að þetta kæmi eflaust í fréttum heima hringdi ég heim um kvöldið til að segja að ekkert amaði að okkur. Ég hafði að vísu ekki fregnir af nemendum, því að þeir höfðu farið í heils dags ferð með sínu leiðsöguliði til borgarinnar Taichung að skoða vísindasafn sem þar er, en gerði ráð fyrir að ef eitthvað hefði komið fyrir þá hefðum við fengið að vita það. Hjá okkur fór dagurinn hins vegar í að fara yfir verkefni áfram og svo að hitta dómnefndina til að koma okkur saman um stigagjöfina. Ég taldi að vísu ekki hve margir dómararnir voru en tveir dómarar sáu um hvert dæmi og þar sem liðin voru 76 að þessu sinni má nærri geta að talsverð vinna hefur verið að raða tímum saman svo að fulltrúar allra 76 þjóða gætu hitt sitt dómarapar á tilteknum tíma. Við vorum heppin því að okkur hafði verið úthlutað þægilegum tímum en sumir höfðu þurft að vaka alla nóttina við að fara yfir verkefni sinna liða til að vera tilbúnir með niðurstöður á tilsettum tíma.

Fyrri hluti laugardagsins 18. júlí fór í samráðsfundi með dómnefndum og bið þess á milli. Ég rölti svolítið í búðir því að mig langaði að kaupa eitthvert dæmigert kínverskt handverk, kjól eða blússu. Mér til furðu fann ég ekkert slíkt, verslanir voru fullar af sömu vörum og finna mátti í hvaða stórverslun sem var í Evrópu eða Ameríku! Geir brá sér hins vegar á blómamarkað með Dananum Poul sem er mikill blómaræktarmaður. Um klukkan þrjú höfðum við

Geir svo lokið öllum okkar fundum og ákváðum að fara í bæinn því að hann hafði ekki fengið nokkurt tækifæri til að skoða sig um. Í krafti reynslu minnar af leiðsögumennsku bauðst ég til að fara með hann í sams konar leiðangur og ég hafði farið í með strákana viku fyrr. Þar með skoðaði ég Chang Kaishek í þriðja skipti en einnig fórum við í grasagarð borgarinnar sem ég hafði ekki fundið í fyrri ferðinni. Svo heimsóttum við Drekafjallshofið og voguðum okkur nú lengra inn í helgidóminn en í fyrra skiptið og gáfum okkur tíma til að fylgjast með athöfnum fólks þar. Við sáum til dæmis konu sem bugtaði sig og beygði, fór með ókennilegar þulur, viðhafði flóknar handasveiflur og steig framandi dansspor frammi fyrir átrúnaðargoði sínu. Enn fremur hjón með litla stúlku sem gerði sitt besta til að líkja eftir hreyfingum foreldranna. Einnig fylgdumst við með diskódís í pínupilsi og á pinnahælum henda upp bátslaga trékubbum um leið og hún hafði yfir einhverja töfraþulu. Þetta endurtók hún hvað eftir annað eins og hún væri að varpa hlutkesti. Hún kannaði stöðu kubbanna vandlega eftir hvert kast og við ímynduðum okkur auðvitað að hún væri að spyrja guðina með hverjum hún ætti að fara út í kvöld—og hætti ekki fyrr en niðurstaðan væri hagstæð! Nú var laugardagskvöld og meira um að vera í borginni en í fyrri ferð minni á sunnudagseftirmiðdegi. Við fórum því að leita uppi þann fræga stað næturmarkaðinn Snákasund eða Snake Alley. Nafnið hafa vestrænir menn gefið staðnum vegna þess að þar er seldur töfradrykkur úr blóði sem kreistur er úr snákum sem teknir eru lifandi úr búrum sínum, rotaðir með því að slá þeim við stein, hengdir upp á þráð og ristir á hol. Jafnvel er drykkurinn bættur með nokkrum dropum af snákaeitri en trú manna er að hann styrki augu og neðri hluta hryggjar, þreyta hverfi og síðast en ekki síst auki hann kyngetu karla. Áhugi Geirs á glímu sem verið var að sýna í einum básnum varð til þess að við stöldruðum nógu lengi við til að verða einmitt viðstödd þessa athöfn. Forvitnin varð hryllingnum yfirsterkari en þegar ég ætlaði að festa atburðinn á filmu var mér harðbannað það. Þegar Geir gerði sig svo líklegan til að þiggja snákadrykkinn var mér að mæta og í krafti aldursmunar fannst mér ég bera ábyrgð á að hann léti ekki þennan óþverra ofan í sig. En ég uppskar ekki annað en skellihlátur því að Geir hafði bara langað að stríða mér þegar hann sá hvað mér bauð við þessu. Nú vorum við orðin svöng en það sem var á boðstólum allt í kringum okkur lyktaði svo óhugnanlega að við enduðum á McDonalds og þegar það er skásti kosturinn er mér illa brugðið! Að máltíð lokinni héldum við áfram göngunni og stefndum nú á turninn háa því að þótt dimmt væri orðið var himinninn stjörnubjartur svo að við sæjum þó allavega ljósadýrð borgarinnar. Og við vorum ekki svikin af því, við rétt sluppum inn fyrir lokun klukkan 22 og nutum útsýnisins í birtunni af götulýsingu og ljósaskiltum. Göngulúin og ég sárfætt, auðvitað berfætt í sandölunum, en Geir alheill í góðum sokkum og leðurskóm, gengum við síðan heim á hótel og vorum komin undir miðnætti.

Sunnudaginn 19. júlí var ferðinni heitið í Þjóðminjahöll Taiwanbúa sem stendur undir hæðardragi við rætur fjallanna í norðurjaðri borgarinnar. Hún hýsir ómetanleg listaverk frá 5000 ára tímabili úr sögu kínversku þjóðarinnar. Safnið var opnað 1965 og eru þar að jafnaði um 6000 verk af margvíslegu tagi til sýnis af yfir 700 000 munum í eigu þess. Gripir safnsins eru varðveittir við kjörhita- og rakastig í stálkössum í tveimur hálfhringlaga göngum í hæðunum að baki því. Sögu hallarsafnsins má rekja 1000 ár aftur í tímann til upphafs Song keisaradæmisins (960–1279), en keisarar þeirrar ættar hófu að safna dýrgripum þjóðar sinnar og hvetja til bókaritunar og listiðkunar. Á tímum Ming keisaraættarinnar var safnið flutt frá Beijing til Nanjing og aftur til baka en þeir flutningar voru þó aðeins smámunir hjá því ferðalagi sem beið þess á tuttugustu öldinni. Safnið jókst síðan gífurlega á stjórnartíma Qing keisaranna (1644–1911) en þeir voru ákafir listaverkasafnarar og er megnið af núverandi safni árangur viðleitni þeirra til að leita uppi helstu fjársjóði Kína. Árið 1924 gerði ríkisstjórn lýðræðisaflanna í Beijing síðasta keisaranum, Pu Yi, sem þar hafði enn aðsetur þótt valdalaus væri, að yfirgefa höllina ásamt hirð sinni með tveggja klukkustunda fyrirvara. Síðan voru 30 ungir kínverskir menntamenn og listfræðingar fengnir til að flokka og skrá dýrgripina. Það tók þá tvö ár og að því búnu var hallarsafnið formlega stofnað og opnað almenningi. En verkinu var varla fyrr lokið en Japanir voru farnir að ógna Beijing og þar sem listaverkasafnið hafði og hefur enn gríðarlegt pólitískt gildi fyrir valdhafa hverju sinni var mikils um vert að forða því frá að lenda í höndum óvinanna. Ríkisstjórnin lét því pakka öllu safninu niður í 20 000 kassa og flytja það með fimm lestum suður til Nanjing. Og þannig hófst 16 ára ævintýraferð þar sem þeyst var með ómetanlega dýrgripina fram og til baka um stríðshrjáð héruð landsins, ýmist með lestum eða flutningabílum, á uxakerrum, flekum eða jafnvel tveimur jafnfljótum, allan tímann örskammt undan Japönum fyrst og síðar herjum kommúnista. Svo ótrúlegt sem það kann að virðast glataðist hvorki né eyðilagðist einn einasti gripur úr safninu. Þegar kommúnistar tóku svo völdin 1948 var 4800 kössum með dýrmætustu verkunum komið undan til Taiwan. Þar voru þeir geymdir uns safnbyggingin var tilbúin 1965. Það hefði þurft lengri tíma en við höfðum til að skoða allt safnið en hægt var að bæta sér það upp að nokkru með því að koma við í safnversluninni í anddyrinu og kaupa listaverkabækur eða aðra hluti til minja. Eftir hádegi var frjáls tími sem ég notaði til að rölta um og virða fyrir mér mannlífið, unglingar eru allir klæddir upp á vestrænan máta í gallabuxur og bol, allir bera með sér regnhlífar og konur nota þær einnig til að verjast sólinni, því að þarna þykir ljós húð eftirsóknarverð. Betlarar sáust varla. Um kvöldið var dómnefndarfulltrúum og fararstjórum boðið upp á drykk á diskóteki í eigu hótelkeðjunnar. Þangað var okkur ekið í rútu og smalað inn eins og fénaði í rétt. Ef einhver gerði sig líklegan til að hlaupa svolítið útundan sér var óðar hóað „this way, please“, í réttum dilk skyldum við lenda! Þegar inn var komið glumdi við háværasta diskótónlist svo að verkjaði í eyrun og ekki var viðlit að tala saman. Drykkurinn reyndist vera eitt bjórglas eða gosdrykkur auk þess sem poppkorn var á boðstólum. Að fullorðnu fólki skuli vera boðið upp á þessi ósköp er með endemum og vorum við fljót að skella í okkur úr glasinu og forða okkur út. Við Geir, ásamt Claudine hinni lúxemborgísku, fengum okkur göngutúr heim og sáum mest eftir að hafa látið hafa okkur út í þessa vitleysu í stað þess að setjast í ró og næði inn á einhvern barinn á hótelinu.

Nú var dvölin brátt á enda og mánudagsmorguninn 20. júlí var haldið í Sun Yatsen minningarhöllina þar sem lokaathöfnin fór fram ásamt verðlaunaafhendingu. Þar hittum við strákana okkar og verndarengilinn þeirra, hana Pinu, á ný og urðu það fagnaðarfundir af beggja hálfu. Við gátum sagt þeim frá hvernig gekk í prófunum og þeir sagt okkur hvað á þeirra daga hafði drifið. Þeim hafði fundist lítið til ferðarinnar á vísindasafnið koma og þegar ég spurði þá hvort þeir hefðu ekki skoðað landið á leiðinni og verið sagt eitthvað merkilegt kváðu þeir nei við, flestir hefðu sofið og enginn sagt þeim neitt. Ég fékk á tilfinninguna að Taiwanar bæru annað skynbragð á náttúruna en við. Þeir eiga þetta fallega land með ótal náttúruperlum en dettur ekki í hug að bjóða gestum sínum að skoða það. Reyndar las ég mér til um að það sem einkum dregur Kínverja til fjalla nokkrum sinnum á ári, óháð veðri, er fjallaþokan við sólarupprás sem talin er hafa lækningamátt vegna þess hve mikið hún hefur að geyma af *qi* sem er lífsorkan sjálf. Til merkis má geta þess að eitt elsta tákn kínverskunnar, *hsien*, sem táknar ódauðleikann er sett saman úr táknunum fyrir mann og fjall. Ekki höfðu strákarnir látið sér lynda fangavistina enda lítið um að vera innan veggja stúdentagarðsins og klifið yfir veggina út í frelsið—og Pina með. Hennar fyrirmæli voru að fylgja þeim hvert sem leið þeirra lægi, eða með hennar orðum „if you can't stop them, follow them!“ Hún var úrvinda af þreytu og sofnaði yfir athöfninni svo að ég dró þá ályktun að starf hennar hefði verið erfitt. Hún viðurkenndi að oft hefði verið lítið um svefn á nóttunni og svo þurfti hún að mæta á fundum á morgnana á meðan þeir sváfu. En hún bar þeim vel söguna og sagðist örugglega hafa fengið skemmtilegasta hópinn. Lokaathöfnin hófst með fimleikasýningu þar sem hópar ungmenna sýndu ótrúlegustu glæsi- og glæfraatriði. Í einu fífldirfskuatriðinu var ellefu stólum staflað hverjum ofan á annan og síðan snaraði einn Kínverjinn sér upp og stóð á höndum efst á staflanum. Þá hnippti Geir í mig og sagðist geta þetta líka en hins vegar á hann enn eftir að sanna það fyrir mér. Hann bar því við þegar heim á hótel kom að hann treysti ekki hótelstólunum! Verðlaunaafhendingin tók ógurlegan tíma, enda ótal verðlaun afhent og munaði aðeins einu stigi að einum okkar manna tækist að næla sér í bronsverðlaun. Að athöfninni lokinni héldu keppendur til sinna „gæslubúða" og við heim á okkar glæsihótel. Um kvöldið hittumst við þó á ný í sameiginlegum kvöldverði. Þar var gert ráð fyrir að keppendur sætu útaf fyrir sig en við Geir annars staðar í salnum með okkar líkum. Grænmetisætur voru auk þess settar í annan sal. Við létum þá stéttaskiptingu sem vind um eyrun þjóta og settumst hjá okkar strákum. Sama hátt höfðu fulltrúar ýmissa annarra þjóða við lítinn fögnuð skipuleggjenda. Við vildum líka að okkar grænmetisneytandi sæti hjá okkur en hann hafði áður sýnt það og sannað að hann er ekki að sama skapi uppreisnargjarn og við landar hans svo að hann lét sér lynda útlegðina. Og nú var komið að þjóðlega þættinum, kínverskur látbragðsleikur, söngur og trumbusláttur í bland við kínverska rétti sem flestir reyndust óætir. Einn réttur var borinn fram í einu og alltaf hélt maður að næst kæmi eitthvað sem hægt væri að borða, en það var öðru nær, ég ímynda mér að þetta hafi verið sambærilegt við að við byðum útlendum gestum okkar upp á svið, súran hval, kæstan hákarl, lundabagga, hrútspunga og slátur. Að málsverði loknum héldum við að hægt yrði að spjalla saman í rólegheitum fram eftir kvöldi. En ekki aldeilis! Skömmu eftir að síðasti réttur var borinn fram kom tilkynning í hátalarakerfi að nú skyldu menn flýta sér að kyngja síðasta bitanum því að rúturnar biðu. Svo var keppendum hóað út í snarhasti og við stóðum eftir og vissum varla hvaðan á okkur stóð veðrið. En þegar við höfðum náð áttum fórum við ásamt nokkrum öðrum fulltrúum á krá í nágrenninu. Þar kom í ljós leynd heimþrá í hópnum því að þegar að var gáð höfðu flestir pantað sér bjór frá ættlandi sínu, búnir að fá nóg af framandi mat og drykk!

Brottfarardagurinn 21. júlí rann upp bjartur og enn heitari en síðustu dagar. Hitinn hafði farið smáhækkandi allan tímann og var nú kominn upp undir 40 stig. Við yfirgáfum hótelið klukkan 9:30 um morguninn og ókum í rútum að stúdentagarðinum þar sem snæddur var hádegisverður. Þaðan fóru svo rútur á tilteknum tímum út á flugvöll, allt eftir því hvenær heimflug var. Okkar flug var ekki fyrr en klukkan 20:30 um kvöldið og það þýddi að við færum með rútu klukkan 17. Strákarnir voru ekki byrjaðir að pakka niður, herbergið þeirra leit út eins og eftir loftárás og fararstjóri fékk vægt áfall. En um tvöleytið var allt komið í töskurnar og við höfðum tíma til að skreppa aðeins með Pinu í „Kínverskan heimilisiðnað" því að sumir áttu eftir að kaupa minjagripi eða gjafir handa vandamönnum. Þarna varð ég mér loksins úti um kínverska blússu. Ég hafði annars gefið upp alla von um að finna hana eftir að hafa kvöldið áður rekist á kínverska stúlku í einni slíkri sem hún sagðist aðspurð hafa keypt í Ástralíu! Síðan hef ég fregnað að kínverskir kjólar fáist líka á Laugaveginum—hvar annars staðar—enda stendur í sjálfu Morgunblaðinu að Laugavegurinn sé ein besta verslunargata í heimi—og ekki lýgur Mogginn! Á flugvellinum kvöddum við Geir, Svein og Björn sem ætluðu austur um haf til Ameríku, ólíkra erinda þó, Geir að sækja kærustuna en hinir að kynna sér háttu Mormóna í Saltsjávarborg. Við hin héldum hins vegar vestur á bóginn, veltum af okkur tímamuninum yfir nóttina með viðkomu í Bangkok og lentum í Amsterdam klukkan 7 næsta morgun eftir 15 klukkustunda ferð. Þar urðum við svo að dvelja einn sólarhring áður en Flugleiðum tókst að koma okkur heim. Eins og nærri má geta var ljúft að stíga út í svalandi íslenskt veður eftir svona langt ferðalag á heitar framandi slóðir.

Lokaorð

Frammistaða íslensku keppendanna var ágæt þótt ekki ynnu þeir til verðlauna í þetta skiptið. Einn íslensku keppendanna, Stefán Ingi, var þó aðeins einu stigi frá verðlaunasæti auk þess sem þrír þeirra, Pétur, Stefán og Sveinn, fengu viðurkenningu fyrir að skila heilum dæmum réttum. Að venju voru það Austurlandaþjóðir sem röðuðu sér í efstu sætin ásamt fyrrverandi austantjaldsliðum og ef til vill ekki að undra þar sem skólauppeldi þar er með mjög ólíkum hætti því sem gerist á Vesturlöndum. Kínverjar tóku ekki þátt að þessu sinni í mótmælaskyni við að á skjölum er vörðuðu keppnina var keppnislandið skráð Taiwan (ROC) en skammstöfunin stendur fyrir „Republic of China" og það fór fyrir brjóstið á ráðamönnum þar. Íslenska liðið var hins vegar næstefst Norðurlandaþjóða, aðeins Svíar stóðu sig betur, og megum við vel við una.

39. alþjóðlegu Ólympíuleikarnir í stærðfræði—dæmi og valdar lausnir

Geir Agnarsson

Fyrri dagur - Taipei - 15. júlí, 1998

Dæmi 1 Í kúptum ferhyrningi $ABCD$ skerast hornalínurnar AC og BD hornrétt og hliðarnar AB og DC eru ekki samsíða. Gerum ráð fyrir að P, sem er skurðpunktur miðnormla AB og DC, sé innan í $ABCD$. Sýnið að $ABCD$ er innritanlegur þá og því aðeins að þríhyrnigarnir $\triangle ABP$ og $\triangle CDP$ hafa sama flatarmál.

Dæmi 2 Í keppni eru a keppendur og b dómarar, þar sem $b \geq 3$ er oddatala. Sérhver dómari gefur hverjum keppanda einkunnina „fullnægjandi" eða „ófullnægjandi". Gerum ráð fyrir að k sé tala þannig að sérhverjir tveir dómarar séu samdóma um í mesta lagi k keppendur. Sýnið að

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Dæmi 3 Fyrir jákvæða heiltölu n, er $d(n)$ fjöldi jákvæðra heiltalna sem ganga upp í n (að 1 og n meðtöldum.) Ákvarðið allar jákvæðar heiltölur k þannig að

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

fyrir einhverja heiltölu n.

Seinni dagur - Taipei - 16. júlí, 1998

Dæmi 4 Ákvarðið öll pör (a, b) af jákvæðum heiltölum þannig að $ab^2 + b + 7$ gangi upp í $a^2b + a + b$.

Dæmi 5 Látum I vera miðju innritaðs hrings í þríhyrningi ABC. Látum innhringinn í $\triangle ABC$ snerta hliðarnar BC, CA og AB í punktunum K, L og M í þessari röð. Línan gegnum B samsíða MK sker línurnar LM og LK í R og S í þessari röð. Sýnið að $\angle RIS$ er hvasst horn.

Dæmi 6 Athugum allar varpanir f úr mengi jákvæðra heiltalna í sjálft sig sem uppfylla

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur s og t. Ákvarðið minnsta gildi sem $f(1998)$ getur haft.

Hvert dæmi var 7 stiga virði og leyfður tími hvern dag var $4\frac{1}{2}$ klukkustund.

Við athugum lausnir þriggja dæma úr þessari ólympíukeppni, dæmi 2, 4 og 5, en öll þessi dæmi voru leyst af íslenskum keppendum í Taipei. Lausnirnar eru eftir þá Pétur Runólfsson, Stefán Inga Valdimarsson og Svein B. Sigurðsson, í þessari röð. Allir hlutu þeir fullt hús stiga fyrir sínar lausnir. Lausnir Péturs og Stefáns eru svo til eins og hinar opinberu lausnir, en lausn Sveins er ólík hinni opinberu lausn og í raun mun einfaldari.

Lausn dæmis 2: (Pétur Runólfsson) Við höfum $\binom{b}{2}$ dómarapör, og sérhverjir tveir dómarar eru samdóma um í mesta lagi k keppendur, og því eru í mesta lagi $k\binom{b}{2}$ pör af samdóma einkunnum. Fyrir sérhvert $i \in \{1, 2, \ldots, a\}$ gerum ráð fyrir að x_i dómarar gefa i-ta keppanda einkunnina „fullnægjandi" og y_i dómarar gefa honum einkunnina „ófullnægjandi". Nú gildir $x_i + y_i = b$ og fjöldi samdóma einkunna sem i-ti keppandi fær er því

$$\begin{aligned}\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} &= \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - b\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((b-1)^2 - 1\right).\end{aligned}$$

Þar sem b er oddatala þá er sérhver heiltala sem er stærri eða jöfn tölunni $\frac{1}{4}\left((b-1)^2 - 1\right)$ einnig stærri eða jöfn tölunni $\frac{1}{4}(b-1)^2$, en þar með fáum við

$$k\binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4},$$

sem gefur okkur ójöfnuna sem við vildum sanna.

Lausn dæmis 4: (Stefán Ingi Valdimarsson) Athugum að ef $ab^2 + b + 7$ gengur upp í $a^2b + a + b$, þá gengur $ab^2 + b + 7$ einnig upp í tölunni $b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$. Þar sem $a \geq 1$ þá er $b^2 - 7a < ab^2 + b + 7$, svo við athugum tilfellin tvö, eftir því hvort $b^2 - 7a \geq 0$ eða $b^2 - 7a < 0$.

Tilfellið $b^2 - 7a \geq 0$: Samkvæmt því sem fram kemur hér að ofan þá verður $b^2 - 7a = 0$ að gilda í þessu tilfelli. Þar með gengur 7 upp í b, svo við getum skrifað $b = 7k$ fyrir einhverja jákvæða heiltölu k og þar með er $a = 7k^2$. Á hinn bóginn sést að ef $(a, b) = (7k^2, 7k)$ þá er $a^2b + a + b = k(7^3k^4 + 7k + 7) = k(ab^2 + b + 7)$.

Tilfellið $b^2 - 7a < 0$: Hér gildir að jákvæða talan $7a - b^2$ er deilanleg með $ab^2 + b + 7$ aðeins ef $b^2 < 7$ (því annars væri $ab^2 + b + 7 > 9a > 7a - b^2$.) Svo hér er $b = 1$ eða 2.

$b = 1$: Hér verður $7a - 1$ að vera deilanlegt með $a + 8$, og því $\frac{(7a-1)-7(a+8)}{a+8}$ að vera heiltala, þ.e.a.s. $\frac{57}{a+8}$ er heiltala. Nú eru þær heiltölur sem ganga upp í 57 tölurnar 1, 3, 19 og 57, svo möguleg gildi á $a + 8$ eru því 19 eða 57, og því er $a = 11$ eða 49.

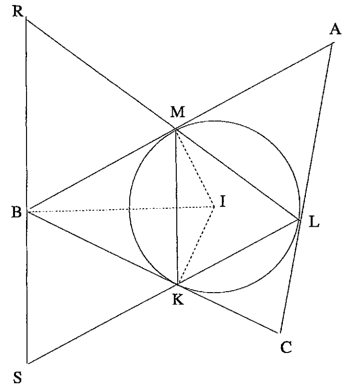
Ef $a = 11$ þá er $a^2b + a + b = 133 = 7 \cdot 19 = 7 \cdot (ab^2 + b + 7)$, og því er $(a, b) = (11, 1)$ lausn.

Ef $a = 49$ þá er $a^2b + a + b = 2451 = 43 \cdot 57 = 43 \cdot (ab^2 + b + 7)$, og því er $(a, b) = (49, 1)$ lausn.

$b = 2$: Hér verður $7a - 4$ að vera deilanlegt með $4a + 9$, og því $\frac{7(4a+9)-4(7a-4)}{4a+9}$ að vera heiltala, þ.e.a.s. 79 verður að vera deilanlegt með $4a + 9$. Þar sem 79 er frumtala eru einu jákvæðu tölurnar sem ganga upp í 79 tölurnar 1 og 79, en hvorug þessara talna er á forminu $4a + 9$ fyrir einhverja jákvæða heiltölu a.

Öll pörin eru því í menginu $\{(11, 1), (49, 1), (7k^2, 7k); k = 1, 2, 3, \dots\}$.

Lausn dæmis 5: (Sveinn B. Sigurðsson) Athugum eftirfarandi mynd:



Þar sem $MK \parallel RS$ og $BM = BK$ þá er $\angle SBK = \angle BKM = \angle BMK = \angle RBM$. Einnig er $\angle BRM = \angle KML = \angle LKC$ (spanna bæði bogann KL) sem síðan er jafnt $\angle SKB$. Þar með eru þríhyrningarnir $\triangle KSB$ og $\triangle RMB$ einshyrndir (og raunar eins!) og við fáum því

$$\frac{KB}{BS} = \frac{BR}{BM} = \frac{BR}{BK}$$

og þar með fáum við $BR \cdot BS = BK^2$. Nú er IK hornrétt á BC svo við fáum nú samkvæmt reglu Pýþagorasar að $BI^2 = BK^2 + KI^2 > BK^2 = BR \cdot BS$.

Af samhverfuástæðum er BI hornrétt á MK og því einnig á RS. Ef við nú athugum $\triangle RIS$ fáum við því

$$\begin{aligned} IR^2 + IS^2 &= (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BS^2) \\ &= BR^2 + 2 \cdot BI^2 + BS^2 \\ &> BR^2 + 2 \cdot BR \cdot BS + BS^2 \\ &= (BR + BS)^2 \\ &= RS^2, \end{aligned}$$

svo hornið $\angle RIS$ er hvasst.