Ramanujan og frumtölurnar[1]

Ragnar Sigurðsson

Nafn indverska stærðfræðingsins Ramanujans er sveipað miklum æfintýraljóma í sögu stærðfræðinnar. Verk hans eru mjög sérkennileg og er engu líkara en að þau séu af öðrum heimi. Hann fæddist árið 1887 í bænum Erode á Suður-Indlandi og lést árið 1920 aðeins 32 ára að aldri. Afburðahæfileikar hans í stærðfræði komu fram þegar í barnæsku, en hann hlaut takmarkaða formlega menntun, því hann vanrækti allar námsgreinar nema stærðfræði í menntaskóla, lauk aldrei prófi og komst þar af leiðandi aldrei í háskóla. Árið 1903 var Ramanujan byrjaður að stunda sjálfstæðar rannsóknir í stærðfræði og hann skráði hjá sér niðurstöður sínar í minnisbækur, sem síðar áttu eftir að verða þrjár talsins. Í minnisbókunum er engar sannanir að finna og enn er margt á huldu um það hvernig niðurstöðurnar eru fengnar. Á árunum 1903–1910 starfaði Ramanujan í algerri einangrun, en eftir að hann kvæntist árið 1909 varð það knýjandi fyrir hann að afla sér tekna. Þá fór hann að kynna verk sín fyrir stærðfræðingum á Suður-Indlandi í þeirri von að geta aflað sér styrkja til þess að geta séð fyrir sér og konu sinni og til þess að geta stundað rannsóknir sínar áfram. Hann komst í kynni við áhrifamikla menn árið 1910 og ári síðar birtist fyrsta grein hans í tímariti indverska stærðfræðifélagsins.

Bæði Indverjar og Englendingar, sem kynntust Ramanujan, hvöttu hann til þess að koma verkum sínum á framfæri í Englandi. Það tókst honum snemma árs 1913, þegar hann komst í bréfasamband við enska stærðfræðinginn Godfrey Harold Hardy. Í nokkrum bréfum sem hann sendi Hardy sagði hann deili á sjálfum sér og verkum sínum og er þar að finna mjög merkilega tilgátu um dreifingu frumtalnanna meðal náttúrlegra talna. Um síðir reyndist þessi tilgáta röng, en það er engu að síður áhugavert að rýna í hana, því hún varpar ljósi á þennan einstæða persónuleika í sögu stærðfræðinnar.

Í þessari grein er reynt að varpa ljósi á tilgátu Ramanujans um dreifingu frumtalnanna og setja hana í samhengi við þekkingu stærðfræðinga í Evrópu um þessi efni.

[1]Þessi grein byggir á fyrirlestri sem haldinn var á fundi í Íslenska stærðfræðafélaginu 12. október 1995. Höfundur þakkar Jóni Ragnari Stefánssyni fyrir margar góðar ábendingar.

Frumtölur

Náttúrleg tala stærri en 1, sem er einungis deilanleg með 1 og sjálfri sér, nefnist *frumtala*. Fyrstu frumtölurnar eru

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,$$
$$47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots .$$

Öldum saman hafa menn reynt að gera sér mynd af dreifingu frumtalnanna meðal náttúrlegra talna, en hún er mjög óregluleg. Ein leið til þess er að tölusetja frumtölurnar

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \ \ldots$$

og reyna að meta hversu stór talan p_n er miðað við n. Önnur leið er að skilgreina *frumtalnafallið* π með

$$\pi(x) \ = \ \text{fjöldi frumtalna } \leq x,$$

og reyna að meta $\pi(x)$ með einhverju falli af x. Athugið að

$$\pi(x) = n \qquad \Leftrightarrow \qquad p_n \leq x < p_{n+1}.$$

Þar með er hægt að yfirfæra upplýsingar sem við getum fundið um frumtalnafallið π yfir á rununa p_n.

Margir af helstu stærðfræðingum sögunnar hafa haft mikinn áhuga á frumtölunum og spreytt sig á því að rannsaka eiginleika þeirra. Má þar nefna Euler á átjándu öld, Gauss, Dirichlet, Tsébyséff og Riemann um miðja nítjándu öld, Hadamard og de la Vallée-Poussin um og eftir síðustu aldamót, Hardy og Littlewood á fyrri hluta tuttugustu aldar og að lokum Erdös og Selberg, en sá síðastnefndi er enn á lífi.

Allt voru þetta Evrópumenn í fremstu röð stærðfræðinga, sem náðu hver með sínum hætti langt í því að auka skilning manna á frumtölunum. Indverjinn Ramanujan kemur við þessa sögu með sérkennilegum hætti og til þess að skilja verk hans er nauðsynlegt að rekja helstu niðurstöður um dreifingu frumtalnanna. Áður en það er gert, þurfum við aðeins að huga að rithættinum, sem tíðkast í þessum fræðum. Við táknum summur og margfeldi, sem tekin eru yfir allar frumtölur $p \leq x$ með

$$\sum_{p \leq x} \qquad \text{og} \qquad \prod_{p \leq x}$$

og summur og margfeldi yfir allar frumtölur táknum við með

$$\sum_{p} \qquad \text{og} \qquad \prod_{p}.$$

Ef f og g eru föll á rauntalnamengi, sem er ótakmarkað að ofan, þá skrifum við $f(x) \sim g(x)$ ef hlutfallslega skekkjan af $f(x)$ miðað við $g(x)$ stefnir á 0 þegar x stefnir á óendanlegt, þ.e.

$$f(x) \sim g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Við skrifum $f(x) = O(g(x))$ ef til er jákvæður fasti C þannig að $|f(x)| \leq C|g(x)|$ fyrir öll nógu stór x og $f(x) = o(g(x))$ ef $f(x)/g(x) \to 0$ ef $x \to \infty$.

Evklíð

Í bókum Evklíðs er að finna sönnun á undirstöðusetningu reikningslistarinnar, en hún segir að hægt sé að þátta sérhverja náttúrlega tölu í margfeldi af veldum af frumtölum og að þáttunin sé ótvírætt ákvörðuð burtséð frá röð þáttanna.

Þar er einnig að finna elstu kunnu niðurstöðuna um dreifingu frumtalnanna, en það er sönnun á því að frumtölurnar séu óendanlega margar. Hún er einföld. Gerum ráð fyrir því að frumtalnarunan taki enda í frumtölu númer n og lítum síðan á töluna $Q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Hún er þá deilanleg með einhverri frumtölu p_j og því er talan $Q - p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = 1$ deilanleg með p_j. Þetta er mótsögn, sem sannar að frumtalnarunan er óendanleg.

Euler

Höfuðsnillingur átjándu aldarinnar í stærðfræði og raunar afkastamesti stærðfræðingur sögunnar var Leonard Euler (1707–1783). Hann varð fyrstur til að varpa ljósi á dreifingu frumtalnanna með því að sanna að

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log \log x$$

og þar með

$$\sum_{p} \frac{1}{p} = \infty.$$

Þetta segir okkur til dæmis að frumtölurnar liggi þéttar í mengi náttúrlegra talna en ferningstölur, því

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Önnur lykiluppgötvun Eulers um frumtölur var formúlan fyrir *Euler-margfeldinu*:

$$\prod_p \frac{1}{1-1/p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

en summan er greinilega samleitin ef $s > 1$. Þeir sem eru óvanir rithættinum eiga kannski erfitt með að átta sig á þessari formúlu, en í rauninni er hún sáraeinföld, því við getum liðað hvern þátt í margfeldinu í kvótaröð,

$$\frac{1}{1-1/p_j^s} = \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^{n_j s}}.$$

Þegar við margföldum saman endanlega margar af þessum óendanlegu röðum, þá fáum við

$$\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-1/p_j^s} = \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_m=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m})^s}.$$

Nú vitum við að sérhverja náttúrlega tölu n má skrifa á nákvæmlega einn veg sem $n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$, svo ef við látum m stefna á óendanlegt þá fæst summan af $1/n^s$, þar sem n hleypur um allar náttúrlegar tölur.

Eitt af helstu hjálpartækjunum í frumtalnafræðinni er Γ-fallið, en það var einmitt Euler sem fyrstur skilgreindi það. Formúlan

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n \, dt, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

er alþekkt. Euler innleiddi n sem raunbreytu í þessu heildi. Ef hún er táknuð með s, þá var það viðtekið í Þýskalandi á fyrri hluta síðustu aldar að tákna það heildi með $\Pi(s)$. Þessi ritháttur er raunar enn mikið notaður. Það var hins vegar franski stærðfræðingurinn Legendre sem innleiddi

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \, dt, \qquad \operatorname{Re} s \geq 0,$$

sem er nánast alls ráðandi á okkar dögum.

Legendre

Fyrsta prentaða heimildin um tilraun til þess að nálga frumtalnafallið með einhverju einföldu samfelldu falli kemur fram í bókinni *Théorie des Nombres* eftir franska stærðfræðinginn Adrien Marie Legendre (1752–1833), sem fyrst var gefin út um aldamótin 1800. Þar prófaði hann sig áfram með nálganir á frumtalnafallinu og komst að því að ein slík væri

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x - 1{,}08366},$$

þar sem log táknar náttúrlega lograrnn. Þessi nálgun var alkunn í stærðfræðiheiminum á fyrri hluta nítjándu aldar.

Gauss

Í bréfi sem Carl Friedrich Gauss (1777–1855) skrifaði árið 1849 segir hann frá því að árið 1792 eða 1793 hafi hann kannað þéttleika frumtalnanna í mengi náttúrlegra talna og komist að því að hann væri að meðaltali $1/\log x$. Hann sagði jafnframt að nýlegar töflur yfir frumtölurnar staðfestu þessa athugun sína, en um miðja síðustu öld náðu töflur yfir frumtölur upp að 3.000.000 eða þar um bil. Í bréfinu gerir hann enga tilraun til að skýra nákvæmlega hvað hann á við né heldur til að sanna staðhæfingu sína, en hann skrifaði upp töfluna:

x	fjöldi frumtalna $< x$	$\int \frac{dn}{\log n}$	mismunur
500.000	41.556	41.606,4	50,4
1.000.000	78.501	78.627,5	126,5
1.500.000	114.112	114.263,1	151,1
2.000.000	148.883	149.054,8	171,8
2.500.000	183.016	183.245,0	229,0
3.000.000	216.745	216.970,6	225,6

Gauss sagði ekki beinum orðum í bréfinu hvaða mörk ættu að vera á heildinu, en af samhenginu sést að þau eru 2 og x. Raunar vantaði nokkrar tölur í töfluna hjá Gauss auk þess sem aðrar voru taldar frumtölur í misgripum. Taflan hefur verið leiðrétt svona:

x	fjöldi frumtalna $< x$	$\int_2^x \frac{dt}{\log t}$	mismunur
500.000	41.538	41.606	68
1.000.000	78.498	78.628	130
1.500.000	114.155	114.263	108
2.000.000	148.933	149.055	122
2.500.000	183.072	183.245	173
3.000.000	216.816	216.971	155

Þessi tafla staðfestir tilgátu Gauss enn betur. Á fyrri hluta síðari aldar þróuðust þessar athuganir yfir í það sem kallað var *frumtalnatilgátan*, en það er staðhæfingin

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

sem jafngildir

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Jafngild tilgáta er

$$p_n \sim n \log n.$$

Tsébyséff

Fyrstu niðurstöðurnar sem leiddu menn í rétta átt við sönnun á frumtalnatilgátunni litu dagsins ljós á árunum 1849–1852. Þar var að verki Rússinn Pafnity Lvovits Tsébyséff (1821–1894). Niðurstöður hans voru margar og ákaflega merkilegar. Hann sannaði að hlutfallsleg skekkja í nálgun Gauss á frumtalnafallinu er minni en 11%, þ.e.

$$0{,}89 \int_2^x \frac{dt}{\log t} < \pi(x) < 1{,}11 \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

og að ef markgildið

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) \Big/ \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

er til, þá er það jafnt 1. Tsébyséff sannaði einnig að nálgun af gerð Legendres

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A \log x + B}$$

geti aldrei verið betri en nálgun Gauss. Hann innleiddi ný talningarföll sem tengjast frumtölunum,

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p, \qquad \psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p, \qquad x \in \mathbb{R},$$

en sambandið milli þessara falla er

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Tsébyséff sannaði að ef eitt markgildanna

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}$$

er til, þá eru hin einnig til og þau eru jöfn. Þetta gefur staðhæfingar, sem eru jafngildar frumtalnatilgátunni.

Riemann

Árið 1859 birtist ritgerð eftir Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) sem nefnist *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse*, þar sem hann fjallaði um niðurstöður athugana sinna á frumtalnafallinu. Ritgerð þessi olli straumhvörfum í talnafræði. Hún er full af nýjum hugmyndum og er vandséð hver þeirra er frumlegust. Margar staðhæfingar í ritgerðinni voru ekki sannaðar, en aðeins lauslega rökstuddar, og eru sumar þeirra ekki fullrannsakaðar enn þann dag í dag. Merkust af þessum ósönnuðu staðhæfingum er *tilgáta Riemanns*, en hún er ein af merkustu tilgátum stærðfræðinnar sem enn standa óhaggaðar. Í ritgerðinni beitir Riemann niðurstöðum úr tvinnfallagreiningu og Fourier-greiningu af mikilli leikni og innsæi. Það var alger nýjung í talnafræði. Við skulum nú reyna aðeins að glöggva okkur á helstu atriðum í þessari ritgerð og þá einkum tilgátu Riemanns.

Meginmarkmið Riemanns er að leiða út formúlu fyrir frumtalnafallinu, gera einhvers konar nálgun og reyna að meta skekkjuna. Þetta er miklu meira en það sem fólgið er í því að sanna frumtalnatilgátu Gauss. Hann byrjar á því að tákna Euler-margfeldið með $\zeta(s)$,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Hann bendir á að þetta er samleitið ef s er tvinntala með raunhluta $\mathrm{Re}\, s > 1$ og að ζ hafi engar núllstöðvar á þessu mengi. Nú þarf að taka logra af þessu falli og til þess þurfum við að skilgreina logra af tvinntölu. Það er gert með formúlunni

$$\log z = \log r + i\theta, \qquad z = re^{i\theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Hægt er að liða $\log(1-z)$ í veldaröð,

$$\log(1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \cdots, \qquad |z| < 1.$$

Ef við beitum þessari formúlu, þá fáum við

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - \frac{1}{p^s}) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}.$$

Röðin í hægri hliðinni er alsamleitin í jöfnum mæli á sérhverju hálfplani $\{s \mid \mathrm{Re}\, s \geq 1 + c\}$, $c > 0$, og þar með er sama í hvaða röð liðirnir eru lagðir saman. Því er

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_p p^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_p s \int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1}\, dx.$$

Út úr þessu fáum við síðan mjög merkilega formúlu

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1}\, dx,$$

þar sem fallið Π er gefið með formúlunni

$$\Pi(x) = \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \tfrac{1}{4}\pi(x^{\frac{1}{4}}) + \cdots.$$

Það er kannski ekki alveg ljóst að þessi formúla gildi, en það verður ljóst um leið og maður skrifar

$$\Pi(x) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} H(x - p^n),$$

þar sem H táknar *Heaviside-fallið*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Nú koma niðurstöður Fourier-greiningar til sögunnar. Heildi af gerðinni

$$\mathcal{M}f(s) = \int_1^\infty f(x)x^{-s-1}\,dx,$$

þar sem s er tvinnbreyta á einhverju hlutmengi í $\mathbb{C}$, nefnist *Mellin-ummyndun* fallsins f. Ef f er samfellt deildanlegt á köflum og $f(x) = O(x)$, þá er $\mathcal{M}f$ skilgreint á hálfplaninu $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\}$, og við höfum andhverfuformúlu Fouriers og Mellins. Hún segir að

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \mathcal{M}f(s)\,ds \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} x^{c+it}\mathcal{M}f(c+it)\,dt \end{aligned}$$

þar sem $c > 1$ getur verið hvaða tala sem er og

$$f^*(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{2}\big(f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)\big).$$

Við höfum því formúluna

$$\Pi^*(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \log\zeta(s)\,\frac{ds}{s}.$$

Með því að beita setningu sem kennd er við Möbius, getum við reiknað $\pi(x)$ út frá $\Pi(x)$,

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n}\Pi(x^{\frac{1}{n}}),$$

þar sem μ táknar fall Möbiusar,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & n \text{ er margfeldi } k \text{ ólíkra frumþátta,} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Þar með er

$$\pi(x) = \Pi(x) - \tfrac{1}{2}\Pi(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}\Pi(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}\Pi(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6}\Pi(x^{\frac{1}{6}}) - \cdots.$$

Við stingum heildinu inn í formúluna fyrir Π^* og fáum

$$\begin{aligned} \pi^*(x) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{2\pi n i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s/n}\log\zeta(s)\,\frac{ds}{s} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{2\pi n}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x^{(c+it)/n}\log\left(\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^{c+it}}\right)\frac{dt}{c+it}. \end{aligned}$$

Hér er komin formúla fyrir frumtalnafallinu. Hún er gagnslaus til útreikninga, því við verðum að hafa upplýsingar um frumþáttun allra náttúrlegra talna til þess að geta reiknað út fall Möbiusar. Við skulum nú snúa okkur aftur að heildinu fyrir Π^* og sjá hvernig Riemann tókst að fá út úr því nálgunarformúlu fyrir Π^*. Með hlutheildun fæst að

$$\Pi^*(x) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \frac{d}{ds}\left(\frac{\log \zeta(s)}{s}\right) ds.$$

Riemann komst að þeirri niðurstöðu að meginliðurinn í $\log \zeta(s)$ sé $-\log(1-s)$ og sýndi síðan fram á að

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \frac{d}{ds}\left(\frac{\log(1-s)}{s}\right) ds = \mathrm{Li}(x),$$

þar sem

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t} \right)$$

Við höfum að nálgun Gauss á frumtalnafallinu er

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(2) \quad \text{og} \quad \mathrm{Li}(2) \approx 1{,}04.$$

Riemann hefur sem sagt ályktað að

$$\Pi(x) = \mathrm{Li}(x) + r(x),$$

en eftir standa vandræðin með að meta leifarliðinn $r(x)$. Útreikningar á fallinu $\mathrm{Li}(x)$ benda til þess að leifin sé lítil miðað við $\mathrm{Li}(x)$. Það er raunar önnur vísbending sem Riemann hafði. Við höfum nefnilega að

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}}) \quad \text{og} \quad \pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\Pi(x^{\frac{1}{n}}).$$

Þar með ættum við að fá nálgunarformúluna

$$\begin{aligned}\pi(x) \approx R(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}}) \\ &= \mathrm{Li}(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{6}}) - \tfrac{1}{7}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{7}}) + \cdots.\end{aligned}$$

Það undraverða er að þetta er mjög góð nálgun á frumtalnafallinu eins og eftirfarandi tafla gefur til kynna:

x	$\pi(x)$	$\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$	$R(x)-\pi(x)$
100.000	9.592	+38	−5
1.000.000	78.498	+130	+30
2.000.000	148.933	+122	−9
3.000.000	216.816	+155	0
4.000.000	283.146	+206	+33
5.000.000	348.513	+125	−64
6.000.000	412.849	+228	+24
7.000.000	476.648	+179	−38
8.000.000	539.777	+223	−6
9.000.000	602.489	+187	−53
10.000.000	664.579	+339	+88
100.000.000	5.761.455	+755	+97
1000.000.000	50.847.478	+1758	−23

Sem fyrr segir voru á dögum Riemanns til töflur yfir frumtölur upp í töluna 3.000.000 eða þar um bil, og það er nokkuð ljóst að hann hefur vitað að fallið $R(x)$ er góð nálgun á $\pi(x)$, þó svo að það komi ekki fram með beinum orðum í ritgerð hans. Riemann lætur ekki staðar numið hér heldur vill takast á við skekkjuliðinn. Til þess þarf hann að átta sig betur á ζ-fallinu. Auðvelt er að sýna fram á að

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 + s\int_1^\infty \Big([x]-x\Big)x^{-s-1}\,dx,$$

þar sem $[x]$ táknar heiltöluhlutann af x. Heildið í hægri hliðinni er samleitið ef $\mathrm{Re}\, s > 0$ og þessi formúla gefur okkur því framlengingu á ζ yfir á mengið $\{s \mid \mathrm{Re}\, s > 0, s \neq 1\}$. Riemann heldur áfram og sýnir að hægt er að framlengja ζ yfir í fágað fall á öllu tvinntalnaplaninu utan við $s = 1$ og að ζ uppfylli jöfnuna

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}(1-s))\zeta(1-s), \qquad s \in \mathbb{C},$$

en hún er nefnd *fellajafna ζ-fallsins*. Nú er nauðsynlegt að komast að því hvar núllstöðvar ζ-fallsins liggja til þess að geta metið skekkjuliðinn í nálguninni $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$. Af Euler-margfeldinu sést að ζ hefur enga núllstöð s með $\mathrm{Re}\, s > 1$ og auðvelt er að sannfæra sig svo um að ζ hefur enga núllstöð s með $\mathrm{Re}\, s \geq 1$. Fellajafnan gefur síðan að ζ hefur núllstöðvar í punktunum $s = -1, -2, -3, \ldots$ og engar aðrar núllstöðvar s með $\mathrm{Re}\, s < 0$. Við margföldum fellajöfnuna með

$s(s-1)/2$, notfærum okkur að $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ og fáum þá

$$\pi^{-s/2}(s-1)\Gamma(\tfrac{1}{2}s+1)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}(-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}(1-s)+1)\zeta(1-s)$$

fyrir öll $s \in \mathbb{C}$. Við skilgreinum nú fallið ξ með

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}(s-1)\Gamma(\tfrac{1}{2}s+1)\zeta(s), \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Það er fágað á öllu $\mathbb{C}$ og núllstöðvar þess í ræmunni $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ eru þær sömu og núllstöðvar ζ. Athugum að fellajafnan segir ekkert annað en $\xi(s) = \xi(1-s)$, sem jafngildir því að

$$\xi(\tfrac{1}{2}+it) = \xi(\tfrac{1}{2}-it), \qquad t \in \mathbb{C}.$$

Með dálitlum reikningum kemst Riemann síðan að því að

$$\xi(\tfrac{1}{2}+it) = 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\frac{d\psi}{dx}\right)x^{-1/4}\cos\left(\tfrac{1}{2}t\log x\right)dx,$$

þar sem

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}, \qquad x > 0.$$

Í þessu samhengi segir Riemann að það sé mjög líklegt að allar núllstöðvar fallsins $t \mapsto \xi(\frac{1}{2}+it)$ séu rauntölur, en það jafngildir því að allar núllstöðvar ζ í ræmunni $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ liggi á línunni $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Þetta er sú staðhæfing, sem nefnd er *tilgáta Riemanns.*

Merkasta afleiðing tilgátu Riemanns, ef hún reynist vera rétt, væri að

$$\pi(x) = \operatorname{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$. Eins og fram hefur komið, þá hefur tilgáta Riemanns ekki ennþá verið sönnuð, og hún er almennt talin vera eitt merkilegasta óleysta vandamál stærðfræðinnar. Riemann setti fram matið

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

á fjölda núllstöðva ζ í menginu $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1, 0 < \operatorname{Im} s < T\}$ með hlutfallslegri skekkju sem er $O(1/T)$. Þetta var sannað löngu eftir daga hans.

Þeir sem áhuga hafa á að kynna sér grein Riemanns betur og afleiðingar hennar, ættu að líta í bók Edwards [3].

Hadamard og de la Vallée-Poussin

Frumtalnatilgátan var ekki sönnuð fyrr en árið 1896. Það gerðu Jacques Hadamard (1865–1963) og Charles de la Vallée-Poussin (1866–1962) óháð hvor öðrum, en nánast samtímis. Sannanir þeirra byggðu á mjög nákvæmu mati á hegðun ζ-fallsins. Upp frá þessu var frumtalnatilgátan nefnd *frumtalnasetningin*. Sannanir á henni hafa verið einfaldaðar verulega á þessari öld og nú er einfaldasta sönnunin ekki flóknari en svo, að þeir sem kunna Cauchy-formúluna fyrir fáguð föll eiga auðvelt með að skilja hana.[2]

Hardy og Littlewood

Á fyrri hluta tuttugustu aldar voru Englendingarnir Godfrey Harold Hardy (1877–1947) og John Edensor Littlewood (1885–1977) í fremstu röð stærðfræðinga sem fengust við rannsóknir í talnafræði. Þeir voru lengst af prófessorar á Þrenningargarði í Cambridge og áttu langt og farsælt samstarf. Árið 1914 sannaði Hardy að ζ hefur óendanlega margar núllstöðvar á línunni $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ og árið 1921 tókst þeim Hardy og Littlewood í sameiningu að sanna að fjöldi núllstöðva með þverhluta á bilinu $[0, T]$ væri að minnsta kosti kT þar sem k er jákvæður fasti. Þetta mat endurbætti Norðmaðurinn Atle Selberg (f. 1917) með því að sanna að fjöldi núllstöðva væri að minnsta kosti $kT \log T$. Árið 1914 sönnuðu Daninn Harald Bohr (1887–1951) og Þjóðverjinn Edmund Landau (1877–1938) í sameiningu að fjöldi núllstöðva fallsins $t \mapsto \xi(\frac{1}{2} + it)$ á menginu $\{t \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Re} t \le T, -\varepsilon \le \operatorname{Im} t \le \varepsilon\}$ sé nokkurn veginn

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

með hlutfallslegri skekkju af stærðargráðunni $O(1/T)$. Allt eru þetta merkar niðurstöður sem hníga í þá átt að tilgáta Riemanns sé rétt, en eru samt fjarri því að hafa tilgátuna í för með sér.

Ramanujan

Í upphafi ársins 1913 fékk Hardy bréf frá Indlandi sem dagsett var í Madras 16. janúar 1913 og hófst með orðunum: *Dear Sir, I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras on a salary of only £20 per annum. I am now about 23 years of age. I have had*

[2] Athugasemd ritstjóra: Sönnun á frumtalnasetningunni birtist í grein eftir Ragnar í vorhefti Fréttabréfsins 1999.

no University education but I have undergone the ordinary school course. After leaving school I have been employing the spare time at my disposal to work at Mathematics. I have not trodden through the conventional regular course which is followed in a University course, but I am striking out a new path for myself. I have made a special investigation of divergent series in general and the results I get are termed by the local mathematicians as "startling" ....

Sá sem bréfið skrifaði hét Srinivasa Iyengar Ramanujan og var fæddur 22. desember árið 1887. Tilgangur bréfsins var að koma á framfæri niðurstöðum á athugunum og rannsóknum í stærðfræði. Í bréfinu vitnar Ramanujan í bók Hardys, *Orders of Infinity*, þar sem stendur að *„fjöldi frumtalna minni en x sé jafn*

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} + \varrho(x),$$

þar sem röð $\varrho(x)$ hefur ekki verið ákvörðuð". Hann segist síðan hafa fundið formúlu sem nálgar $\pi(x)$ með hverfandi skekkju. (Sjá [7], bls. xxii eða [2] bls. 22.) Hann nefnir að fátækt og reynsluleysi hamli sér og biður Hardy um að fara yfir niðurstöður sínar, sem hann lætur fylgja bréfinu á sérstökum blöðum, í þeim tilgangi að kanna hvort þar leynist eitthvað sem vert er að gefa út. Á blöðunum stendur fjöldinn allur af formúlum, án sannana, og er þeim raðað í kafla. Í fyrsta kaflanum segir ([7], bls. 349 eða [2] bls. 22):

> *Ég hef fundið fall sem lýsir nákvæmlega fjölda frumtalna minni en x, „nákvæmlega" í þeim skilningi að mismunur þessa falls og hins raunverulega fjölda frumtalna er oftast 0 eða eitthvert lítið endanlegt gildi jafnvel þegar x verður óendanlegt. Ég hef fengið þetta fall fram sem óendanlega röð og hef sett það fram á tvo vegu:*
>
> (1) *Með Bernoulli-tölum. Út frá þessu getum við auðveldlega reiknað út fjölda frumtalna upp að 100 milljónum, oftast án skekkju og í sumum tilfellum með skekkju upp á 1 eða 2.*
>
> (2) *Sem ákveðið heildi, sem við getum reiknað út.*

Síðan kemur langur listi yfir formúlur sem innihalda ákveðin heildi, óendanlegar raðir og óendanleg keðjubrot. Þeir Hardy og Littlewood rannsökuðu bréf Ramanujans og komust samdægurs að þeirri niðurstöðu að hér væri snillingur á ferðinni.

Hardy svaraði bréfi Ramanujans þann 8. febrúar 1913. Hann segir þar að sér virðist hægt að skipta niðurstöðunum í þrjá flokka. Í fyrsta flokki eru niðurstöður, sem eru þekktar eða hægt er að leiða auðveldlega út frá þekktum setningum. Í öðrum flokki eru niðurstöður, sem eru bæði nýjar og áhugaverðar. Þær eru einkum áhugaverðar vegna þess að þær eru augljóslega erfiðar, frekar en að þær séu mikilvægar. Í þriðja flokki eru niðurstöður, sem virðast vera nýjar og mikilvægar, en mikilvægið sé háð nákvæmninni í sönnunaraðferðum Ramanujans.

Í bréfinu leggur Hardy mikla áherslu á mikilvægi sannana og segist ekki geta dæmt um niðurstöður Ramanujans fyrr en hann fái að sjá sannanir á þeim. Hann biður Ramanujan að senda sér formúluna fyrir frumtalnafallinu eins fljótt og hann geti. Hann lýkur bréfinu með hvatningarorðum og býðst til að hjálpa Ramanujan að koma verkum sínum á framfæri, ef tryggt sé að niðurstöðurnar byggi á traustum sönnunum. (Sjá [2] bls. 46-48.)

Það er ljóst af fyrsta bréfinu að Ramanujan ætlaði sér ekki að kynna bestu niðurstöður sínar fyrir Hardy fyrr en hann væri viss um að hann fengi jákvæðar viðtökur. Það er síðan greinilegt að Ramanujan var ánægður með svarið, því í næsta bréfi, sem dagsett er 27. febrúar 1913, segir hann: „ … *I have found a friend in you, who views my labours sympathetically. This is already some encouragement to me to proceed …* “. Í þessu bréfi segir Ramanujan frá því að hann þurfi á fé að halda til þess að geta einbeitt sér að stærðfræðinni og losnað við að stunda launavinnu. Hann biður Hardy um að skrifa meðmælabréf, sem geti greitt honum leið til þess að fá styrk frá indverskum yfirvöldum til þess að stunda stærðfræðirannsóknir sínar. Hann spilar síðan út trompunum sínum (sjá [7], bls. xxvii og 351 eða [2] bls. 53):

1. *Fjöldi frumtalna minni en e^a er jafn*

$$\int_0^\infty \frac{a^x\,dx}{xS_{x+1}\Gamma(x+1)},$$

þar sem

$$S_{x+1} = \frac{1}{1^{x+1}} + \frac{1}{2^{x+1}} + \frac{1}{3^{x+1}} + \cdots .$$

2. *Fjöldi frumtalna minni en n er jafn*

$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2}{B_2}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \frac{4}{3B_4}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right)^3 + \frac{6}{5B_6}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right)^5 + \cdots\right\}$$

þar sem $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, … , eru Bernoulli-tölurnar.

3. *Fjöldi frumtalna minni en n er jafn*

$$\int_\mu^n \frac{dx}{\log x} - \frac{1}{2}\int_\mu^{\sqrt{n}} \frac{dx}{\log x} - \frac{1}{3}\int_\mu^{\sqrt[3]{n}} \frac{dx}{\log x} - \frac{1}{5}\int_\mu^{\sqrt[5]{n}} \frac{dx}{\log x}\Bigg|$$
$$+\frac{1}{6}\int_\mu^{\sqrt[6]{n}} \frac{dx}{\log x} - \frac{1}{7}\int_\mu^{\sqrt[7]{n}} \frac{dx}{\log x}\Bigg| + \frac{1}{10}\int_\mu^{\sqrt[10]{n}} \frac{dx}{\log x}$$
$$-\frac{1}{11}\int_\mu^{\sqrt[11]{n}} \frac{dx}{\log x}\Bigg| - \frac{1}{13}\int_\mu^{\sqrt[13]{n}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{14}\int_\mu^{\sqrt[14]{n}} \frac{dx}{\log x}\Bigg|$$
$$+\frac{1}{15}\int_\mu^{\sqrt[15]{n}} \frac{dx}{\log x} - \frac{1}{17}\int_\mu^{\sqrt[17]{n}} \frac{dx}{\log x}\Bigg| - \frac{1}{19}\int_\mu^{\sqrt[19]{n}} \frac{dx}{\log x} + \cdots,$$

þar sem $\mu = 1{,}45136380$, nokkurn veginn. Tölurnar $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, \ldots$ hér að ofan innihalda ólíka frumþætti; þannig eru $4, 8, 9, 12, \ldots$ útilokaðar: jákvætt formerki stendur ef fjöldi frumþátta er slétt tala, og neikvætt formerki ef fjöldi frumþátta er oddatala. Um leið og að því kemur í reikningunum, að liður verður minni en 1, þá nemum við staðar við liðinn, þar sem lóðrétt strik er dregið, og ekki annars staðar; þar af leiðir að fyrstu fjórir liðirnir eru nauðsynlega slétt tala, þegar n er mjög lítið. Frumtölur byrja á 2 en ekki 1.

Þessi langa lýsing Ramanujans á formerkinu fyrir framan liðina er ekkert annað en skilgreiningin á falli Möbiusar sem við táknuðum með μ hér að framan og fallið sem út kemur er ekkert annað en fallið $R(x)$ sem við vorum með hér að framan:

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\operatorname{Li}(x^{\frac{1}{n}}) \\ &= \operatorname{Li}(x) - \tfrac{1}{2}\operatorname{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}\operatorname{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}\operatorname{Li}(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6}\operatorname{Li}(x^{\frac{1}{6}}) - \tfrac{1}{7}\operatorname{Li}(x^{\frac{1}{7}}) + \cdots \end{aligned}$$

(Nú er það smekksatriði hvort bókstafurinn R stendur fyrir Riemann eða Ramanujan.) Lýsingin á því hvernig röðin er stýfð er að sjálfsögðu komin frá Ramanujan. Staðhæfing Ramanujans var að $R(x)$ nálgi $\pi(x)$ með takmarkaðri skekkju.

Í bréfi sínu til Hardys var Ramanujan að biðja um stuðning til þess að geta haldið áfram að stunda stærðfræðina í heimalandi sínu Indlandi, en Hardy hafði önnur áform í huga. Hann ætlaði sér að fá þennan mann til Englands, hvað sem það kostaði. Það er heillöng saga að segja frá því hvernig þær málaleitanir gengu fyrir sig, en þessi áform tókust hjá Hardy með góðra manna hjálp og þann 14. apríl 1914 sigldi Ramanujan með skipinu Nervasa upp fljótið Thames og steig síðar um daginn í fyrsta skipti á enska grund.

Þeir Hardy og Ramanujan hófu nú rannsóknasamstarf sem bar ótrúlega mikinn árangur fyrir þá báða. Hróður Ramanujans fór víða og náði líklega hámarki þegar hann var kosinn félagi í *Konunglega vísindafélaginu*. Ramanujan átti einnig við mikla erfiðleika að stríða þau fimm ár sem hann dvaldist í Englandi. Hann var heittrúaður hindúi af æðstu stétt bramíta. Því fylgdu ströng siðalögmál sem hann fylgdi nákvæmlega. Hann neytti aðeins matar úr jurtaríkinu og raunar einungis mat sem bramíti af sömu stétt og hann hafði lagað. Hann varð því oftast að sjá um eldamennskuna sjálfur og það vafðist óskaplega fyrir honum. Vetrarveðráttan í Englandi er gerólík því sem hann þekkti frá sínum heimahögum á Indlandi og því fór svo að árið 1917 veiktist hann alvarlega. Sjúkdómsgreiningin var berklar, en ýmsir hafa dregið í efa að hún hafi verið rétt. Siðir og venjur manna í Englandi voru Ramanujan framandi og hann aðlagaðist þeim engan veginn. Hann lifði því ákaflega einangruðu lífi niðursokkinn í rannsóknir sínar.

Víkjum nú aftur að áðurnefndri staðhæfingu Ramanujans um að $\pi(x) = R(x) + O(1)$ og gefum okkur að hún sé rétt. Bein afleiðing væri þá að

$$\pi(x) = R(x) + O(x^{\delta})$$

fyrir sérhvert $\delta > 0$ og þá sérstaklega

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\delta})$$

sem er staðhæfingin sem stendur og fellur með tilgátu Riemanns. Við fáum

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) + O(x^{\frac{1}{3}+\delta})$$

og þannig áfram fyrir sérhvert $\delta > 0$. Af þessari formúlu leiðir sérstaklega að

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) \to -\infty \qquad \text{ef} \qquad x \to \infty$$

Nú er frá því að segja að allt frá fyrri hluta nítjándu aldar höfðu menn veitt því athygli að ójafnan

$$\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$$

gilti fyrir öll þekkt gildi á $\pi(x)$. Árið 1914 voru til töflur yfir frumtölur, sem náðu upp að 10 milljónum eða þar um bil og ójafnan gilti að minnsta kosti svo langt upp. Þá sýndi Littlewood hins vegar fram á að þessi ójafna gildir ekki.

Hann sannaði að til eru runur $x_1, x_2, \ldots$ og $y_1, y_2, \ldots$ af tölum sem stefna á óendanlegt þannig að

$$\pi(x_j) > \mathrm{Li}(x_j) \quad \text{og} \quad \pi(y_j) < \mathrm{Li}(y_j).$$

Auk þess sannaði hann að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til x hversu stórt sem vera skal þannig að

$$\pi(x) > \mathrm{Li}(x) + x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Sönnun Littlewoods þótti mikið afrek. Hún er hrein tilvistarsönnun og mönnum hefur ekki enn tekist að gefa dæmi um nógu stóra tölu x sem uppfyllir $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$. Niðurstaða Littlewoods kollvarpaði tilgátu Ramanujans.

Í skrifum Hardys um Ramanujan kemur fram að hann er sannfærður um að Ramanujan hafi sjálfur uppgötvað formúluna fyrir $R(x)$ og að það sé með öllu útilokað að hann hafi flett henni upp í verkum Riemanns. Ramanujan taldi sig hafa sannað að $R(x)$ væri góð nálgun á $\pi(x)$ og Hardy bendir af mikilli nákvæmni á staðinn í sönnuninni þar sem villan liggur. Í þessum skrifum er að finna mikla aðdáun á innsæi Ramanujans og leikni hans í útreikningum. (Sjá [4], kafla I og II.)

Hardy og Ramanujan

Það er ekki hægt að ljúka þessari frásögn án þess að nefna einhverja merkilega niðurstöðu sem er árangur af samstarfi þeirra Hardys og Ramanujans. Sú sem frægust er, fjallar um mat á fjölda skiptinga á náttúrlegum tölum. (Sjá [4], kafla VIII.)

Sérhverri náttúrlegri tölu stærri en 1 má skipta í summur af jákvæðum náttúrlegum tölum:

$$\begin{aligned} 2 &= 1+1, \\ 3 &= 2+1 = 1+1+1, \\ 4 &= 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1. \end{aligned}$$

Ekki er tekið tillit til röðunar liðanna og því getum við alltaf sett liðina í minnkandi röð. Við látum $p(n)$ tákna fjölda mögulegra skiptinga á tölunni n. Litið er á töluna sjálfa sem skiptingu og til hagræðis er sett $p(0) = 1$. Þannig verður

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 5, \quad \ldots .$$

Það er ljóst að $p(n)$ vex mjög hratt með n, en hversu hratt? Í skrifum sínum segir Hardy að líklega hafi enginn fengist við þessa spurningu fyrir 1917. Hins vegar hafði Euler leitt út formúlu fyrir $p(n)$, því hann benti á að tölurnar $p(n)$ eru stuðlarnir í veldaröðinni fyrir fallið F, sem gefið er með formúlunni

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} \cdots \\ &= p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \cdots \ , \end{aligned}$$

þar sem $0 < x < 1$. Þeir Hardy og Ramanujan unnu í sameiningu að því að finna hversu hratt $p(n)$ vex með n. Þeir sönnuðu að

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{24}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6\log(1/x)} \right) F(x'),$$

þar sem tölurnar x og x' uppfylla

$$\log \frac{1}{x} \log \frac{1}{x'} = 4\pi^2.$$

Síðan komust þeir að því að

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{\exp\left(\pi \sqrt{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})} \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) + O(e^{H\sqrt{n}}),$$

þar sem $H < \pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Þeir sönnuðu raunar miklu meira, nefnilega að

$$p(n) = P_1(n) + P_2(n) + \cdots + P_Q(n) + R(n),$$

þar sem

$$\begin{aligned} P_q(n) &= L_q(n)\phi_q(n), \\ \phi_q(n) &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{\exp\left(\frac{\pi}{q} \sqrt{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})} \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right), \\ L_q(n) &= \sum_{\substack{k<q \\ k \text{ ósamþátta } q}} \omega_{k,q} e^{2nk\pi i/q}, \end{aligned}$$

og $\omega_{k,q}$ er ákveðin 24. rót af 1. Leifin er

$$R(n) = O(e^{H_Q\sqrt{n}}), \qquad H_Q < \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{Q}}.$$

Þar með fæst að $H_Q \to 0$ ef $Q \to \infty$, svo þetta er góð formúla til þess að reikna út $p(n)$. Til dæmis þarf aðeins átta liði til þess að reikna út

$$p(200) = 3.972.999.029.388$$

með skekkju upp á 0,004. Því er svo við þetta að bæta að röðin

$$\sum_{q=1}^{\infty} L_q(n)\phi_q(n)$$

er ekki samleitin. Þýski stærðfræðingurinn Rademacher sýndi hins vegar fram á að hægt er að endurbæta formúluna. Hann sannaði að að $p(n)$ má setja fram með samleitinni röð,

$$p(n) = \sum_{q=1}^{\infty} L_q(n)\psi_q(n),$$

þar sem L_q er skilgreint eins og hér að framan og

$$\psi_q(n) = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right).$$

Eftirmáli

Eins og áður var getið veiktist Ramanujan alvarlega árið 1917 og snéri aftur heim til Indlands árið 1919. Hann lést þann 26. apríl 1920, aðeins 32 ára. Safn verka Ramanujans var gefið út árið 1927. Þar er að finna 37 vísindalegar ritgerðir og eru sjö þeirra skrifaðar ásamt Hardy. Í upphafi verksins eru tveir kaflar um æfi og störf Ramanujans. Þann fyrri skrifuðu Indverjarnir Seshu Aiyar og Ramachandra Rao, sem báðir voru áhrifamiklir stærðfræðingar í heimalandi sínu og þekktu Ramanujan persónulega. Seinni kaflinn er eftir Hardy. Auk þessa efnis er að finna útdrætti úr bréfum Ramanujans til Hardys svo og vandamál og lausnir á þeim eftir Ramanujan sem birtust í tímariti indverska stærðfræðifélagsins.

Þeir sem hafa áhuga á að kynna sér æfi Ramanujans og vísindalega lýsingu á verkum hans ættu að byrja á því að lesa inngangskafla Hardys í safni verka

Ramanujans og fyrsta kaflann í bók Hardys sem ber nafn Ramanujans. Árið 1991 gaf bandaríski blaðamaðurinn Robert Kanigel út æfisögu Ramanujans og er hún að mörgu leyti skemmtileg lesning.

Minnisbækur Ramanujans innihalda ótrúlegan fjölda af niðurstöðum. Hardy hafði uppi áform um að fá menn til þess að rannsaka þær og búa til birtingar. Þeir G. N. Watson og B. M. Wilson hófu það verk árið 1929, en þeim entist ekki aldur til þess að ljúka því. Það var ekki fyrr en árið 1957 að minnisbækurnar komu fyrir almenningssjónir, en þá lét *Tata Institute of Fundamental Research* í Bombay taka ljósrit af þeim og gefa út.

Bandaríski stærðfræðingurinn Bruce Berndt hefur starfað að því um alllangt skeið að rannsaka minnisbækurnar. Hann hefur gefið út fimm binda verk um þær [1]. Berndt gengur skipulega á allar niðurstöður Ramanujans í sömu röð og hann skrifaði þær niður, útskýrir þær og afleiðingar þeirra, skrifar tilvísanir í sannanir á þeim og sannar sjálfur þær niðurstöður sem ekki eru til þekktar sannanir á. Berndt hefur einnig ritað bók í félagi við Robert A. Rankin [2] um bréfasamskipti Ramanujans og annarra manna sem honum tengjast. Þar er að finna mjög ítarlega heimildaskrá og umfangsmiklar skýringar á bréfunum.

Heimildir

[1] Bruce C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks I-V*, Springer-Verlag, 1985, 1989, 1991, 1994, 1998.

[2] Bruce C. Berndt og Robert A. Rankin, *Ramanujan, Letters and Commentary*, Ameríska stærðfræðafélagið 1995.

[3] H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press 1974.

[4] G. H. Hardy, *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Chelsea 1940.

[5] G. H. Hardy, *Málsvörn stærðfræðings*, Hið íslenzka bókmenntafélag 1972.

[6] Robert Kanigel, *The man who knew infinity. A life of the genius Ramanujan*, Washington Square Press 1991.

[7] Srinivasa Ramanujan, *Collected Papers*, Chelsea 1927.

[8] Bernhard Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, 2. útg., Dover 1953.

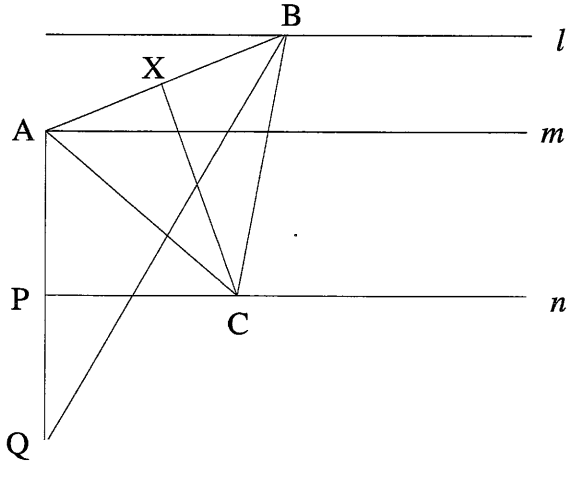
Þrautahorn

Robert Magnus

Ég þakka þeim sem sendu inn lausnir og hvet lesendur einnig til að senda þrautir sem verða síðan birtar í þessum dálki. Áður en við setjum fram nýjar þrautir birtum við lausnir á þrautunum úr síðasta fréttabréfi.

Þraut 1. Þrjár samsíða línur eru tilteknar. Finnið leið til að teikna (með reglustiku og hringfara) jafnhliða þríhyrning sem hefur hornpunktana á línunum þremur.

Lausn. Glöggir lesendur muna e.t.v. að þetta dæmi birtist ásamt lausn í Fréttabréfi stærðfræðafélagsins í júní 1990 í grein eftir höfundinn. Við birtum hér lausn eftir Braga Þorsteinsson, en hún barst í bréfi frá Jóni Hafsteini Jónssyni.



Í myndinni eru línurnar l, m, n samsíða, línan APQ er hornrétt á þær og $AP = PQ$. Frá Q er dregin lína sem myndar $30°$ horn við QA og sker l í punktinum B. Miðþverill striksins AB er síðan dreginn og sker n í punktinum C. Af þessu sést að C er ummiðja þríhyrningsins AQB en þar sem $\angle AQB = 30°$ sést að $\angle ACB = 60°$. Þar sem $AC = CB$ sjáum við að ABC er jafnhliða.

Í ofangreindu bréfi frá Jóni eru tvær aðrar lausnir sem hann fann ásamt Eiríki Jónssyni. Helgi Jónsson leysti einnig dæmið.

Þraut 2. Ákvarðið frumþætti tölunnar $3^{15} + 1$.

Lausn. (Eftir Helga Jónsson) Við höfum

$$3^{15}+1=(3^5)^3+1=(3^5+1)(3^{10}-3^5+1).$$

Ennfremur gildir

$$\begin{aligned}3^{10}-3^5+1=3^{10}+2\cdot 3^5+1-3\cdot 3^5&=(3^5+1)^2-3^6\\ &=(3^5+1+3^3)(3^5+1-3^3)=271\cdot 217.\end{aligned}$$

Nú fæst

$$3^{15}+1=244\cdot 271\cdot 217=2^2\cdot 7\cdot 31\cdot 61\cdot 271.$$

(Einnig leyst af Kristínu Bjarnadóttur.)

Þraut 3. Anna og Birna leika eftirfarandi talnaspil. Þær velja til skiptis náttúrlega tölu á bilinu 1 til 100. Reglurnar eru:

(i) Hverja tölu má aðeins velja einu sinni.

(ii) Velja má einungis tölu sem gengur upp í eða er margfeldi tölunnar sem valin var á undan.

(iii) Sú sem leikur fyrst verður að velja slétta tölu.

(iv) Sú vinnur sem velur tölu þannig að hin getur ekki fundið löglegan leik. Sýnið að sú sem leikur fyrst getur alltaf unnið og finnið vinningsleið.

Lausn. (Eftir RJM) Ef annar hvor keppandi velur 1 þá velur hinn 97 og vinnur. Það nægir því að neyða andstæðing til að velja 1. Segjum að keppandi A leiki fyrst. Stutt vinningsleið fyrir A hefst með því að velja 58. Nú má B velja annað hvort 2 eða 29. Ef B leikur 2 þá heldur A áfram með leikjarunu þar sem leikir B eru þvingaðir: (A og B til skiptis) 62, 31; 93, 3; 51, 17; 85, 5; 95, 19; 57 og A vinnur þar sem búið er að nota 3 og 19. Ef, hins vegar, B svarar 58 með 29 þá heldur A áfram með eftirfarandi runu þar sem leikir B eru þvingaðir: 87, 3; 51, 17; 85, 5; 95, 19; 57 og A vinnur þar sem búið er að nota 3 og 19.

Hægt er að greina spilið (og finna ofangreinda vinningsleið) með því að skoða net. Hornpunktar netsins eru frumtölurnar milli 1 og 100. Setjum legg milli tveggja hornpunkta p og q ef $50 < pq \le 100$. Ef A velur pq þá verður B að velja p, q eða 1. Við leitum síðan að eftirfarandi mynstri í netinu:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & p & & & & s & & \\ & / & & \backslash & & / & & \backslash & \\ 2 & & & & r & & & & u \\ & \backslash & & / & & \backslash & & / & \\ & & q & & & & t & & \end{array}$$

Einkenni þessa mynsturs er tvær rásir tengdar saman. A hefur leikinn með $2p$. Ef B svarar með p þá fer leikurinn pr, r; rs, s; su, u; ut, t; tr og A vinnur. Ef B svarar $2p$ með 2 þá heldur leikurinn áfram $2q$, q; qr r; o.s.frv. Í fyrrgreindri vinningsleið er $p = 29$, $q = 31$, $r = 3$, $s = 17$, $u = 5$ og $t = 19$.

Það er áhugavert að líta á alhæfingu spilsins þar sem önnur tala N kemur í stað fyrir 100. Við getum reynt að finna ofangreint mynstur þar sem $r = 3$ og $u = 5$. Það þýðir að frumtölurnar p, q eiga að liggja milli $N/6$ og $N/2$ en frumtölurnar s, t milli $N/10$ og $N/3$. Mér þykir það líklegt að slíkar frumtölur séu alltaf til ef N er nógu stór tala en hef ekki sönnun.

Þessu spili var lýst í dálkinum Mathematical Recreations eftir Ian Stewart í Scientific American frá mars 1997 en vinningsleið er ekki lýst. Eftir því sem ég veit best hefur þessi vinningsleið ekki birst í Scientific American. Helgi Jónsson sendi bréf með ítarlegri umfjöllun um ýmis leikmynstur.

Hér kemur nýr skammtur af þrautum. Ekki bárust neinar þrautir frá lesendum.

Þraut 4. Á pappírsblaði eru tvær ósamsíða línur en þær skerast ekki á blaðinu. Milli þeirra er tilgreindur punktur. Hvernig er hægt að teikna línu gegnum punktinn sem myndi liggja gegnum skurðpunkt línanna tveggja, með því að nota reglustiku eina saman og án þess að teikna neitt utan blaðsins?

Þraut 5. Einingarferningi er skipt í níu svæði með því að teikna fjóra $90°$ boga hvern með geisla 1 og þannig að miðjur þeirra eru sitt í hverjum hornpunkti ferningsins. Ákvarðið flatarmál hvers svæðis.

Þraut 6. Runa x_n uppfyllir $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$, $x_1 > 0$. Ákvarðið $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n + 1}$.

40. Alþjóðlegu Ólympíuleikarnir í Stærðfræði, Búkarest Rúmenía, júlí 1999

Geir Agnarsson

Hinir 40. alþjóðlegu ólympíuleikar í stærðfræði voru haldnir í Búkarest í Rúmeníu 10. - 22. júlí, 1999. Liðið að þessu sinni var

Alfreð Kjeld,
Bjarni Kristinn Torfason,
Guðni Ólafsson,
Ingvar Sigurjónsson,
Pawel Bartoszek,
Stefán Ingi Valdimarsson.

Allir 6 keppendurnir komu úr Menntaskólanum í Reykjavík, sem er ekki síst Áskeli Harðarsyni kennara þar að þakka, en hann var einnig liðstjóri að þessu sinni. Dómnefndarfulltrúi var ykkar einlægur Geir Agnarsson. Stefán Ingi Valdimarsson hlaut bronsverðlaun.

Fyrri dagur - Búkarest, 16. júlí, 1999

Dæmi 1. Ákvarðið öll endanleg punktamengi S í sléttunni, sem innihalda a.m.k. þrjá punkta og fullnægja eftirfarandi skilyrði: Fyrir sérhverja tvo ólíka punkta A og B úr S, þá er miðnormall línustriksins AB samhverfuás fyrir S.

Dæmi 2. Látum $n \geq 2$ vera fasta heiltölu.
(a) Ákvarðið minnsta fastann C þannig að

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \Big(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \Big)^4$$

gildi fyrir allar rauntölur $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.
(b) Fyrir þennan fasta C, ákvarðið hvenær jafnaðarmerkið gildir.

Dæmi 3. Athugum $n \times n$ ferningslaga borð, þar sem n er föst jákvæð slétt tala. Borðinu er skipt upp í n^2 einingareiti. Við köllum tvo slíka ólíka reiti *granna* ef þeir hafa sameiginlega hlið. Við merkjum N reiti á borðinu þannig að sérhver reitur á borðinu (merktur eða ómerktur) hafi merktan granna. Ákvarðið minnsta mögulega gildi N.

Seinni dagur - Búkarest, 17. júlí, 1999

Dæmi 4. Ákvarðið öll pör (n, p) af jákvæðum heiltölum þannig að p er frumtala, $n \leq 2p$, og $(p-1)^n + 1$ er deilanleg með n^{p-1}.

Dæmi 5. Tveir hringir Γ_1 og Γ_2 eru innan í hringnum Γ, og snerta Γ í tveimur ólíkum punktum M og N í þessari röð. Miðja Γ_2 liggur á Γ_1. Línan gegnum skurðpunkta Γ_1 og Γ_2 sker Γ í A og B. Línurnar MA og MB skera Γ_1 í C og D í þessari röð. Sýnið að CD er snertill Γ_2.

Dæmi 6. Ákvarðið öll föll $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sem fullnægja

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

fyrir öll $x, y \in \mathbf{R}$.

Hvert dæmi var 7 stiga virði, og leyfður tími hvorn dag fyrir sig var $4\frac{1}{2}$ klukkustund. Dæmin voru að þessu sinni margslungin, og náði enginn keppandi fullum 42 stigum, en það er frekar óvenjulegt. Kínverjar og Rússar deildu með sér efsta sætinu þetta árið.

Einn íslensku keppendanna, Stefán Ingi Valdimarsson, var vel yfir meðallagi, og náði þar með góðum bronsverðlaunum. Hann náði stigum í hverju einasta dæmi, og leysti fyrsta dæmið fullkomlega. Þessi lausn Stefáns var eina fullkomna lausnin sem kom fyrir hjá íslenska liðinu þetta árið. Þess má þó geta að Bjarni Kristinn Torfason var ansi nálægt því að finna hinu snotru opinberu lausn á fyrsta dæminu, og fékk hann fyrir það 5 stig af 7 mögulegum (sjá hina opinberu lausn hér fyrir neðan.)

Flestum stigum náði íslenska liðið í fyrsta dæminu. Hinar opinberu lausnir á síðustu dæmunum, hvorn daginn fyrir sig, dæmi 3 og 6, voru stuttar og einkar fallegar. Við látum hinar opinberu lausnir á dæmunum 1, 3 og 6 því fylgja hér á eftir.

Lausnir á þremur dæmum

Lausn dæmis 1: Látum r_{PQ} vera speglunina um miðnormal línustriksins PQ, og látum G vera massamiðja punktamengisins S. Þar sem $r_{AB}(S) = S$, fæst að $r_{AB}(G) = G$ fyrir sérhverja tvo ólíka punkta $A, B \in S$. Þetta gefur að allir punktar S eru jafn langt frá G, sem þýðir að punktarnir í S liggja á hringferli sem hefur G sem miðju.

Punktar S mynda því kúptan marghyrning $A_1A_2 \cdots A_n$. Þar sem $r_{A_1A_3}$ speglar hvorri hálfsléttu, sem línan A_1A_3 myndar, í sig sjálfa, þá verður A_2 að vera föst, þ.e.a.s. $r_{A_1A_3}(A_2) = A_2$ verður að gilda. Þar með er $|A_1A_2| = |A_2A_3|$. Með nákvæmlega sama hætti fæst $|A_2A_3| = |A_3A_4| = \cdots = |A_nA_1|$, sem sýnir að punktar S mynda reglulegan n-hyrning.

Það er hins vegar auðvelt að sannfæra sig um að sérhvert punktamengi S, sem samanstendur af hornpunktum reglulegs marghyrnings, er samhverft um sérhvern miðnormal tveggja ólíkra punkta úr S.

Lausn dæmis 3: Litum reitina á borðinu hvíta og svarta, eins og á venjulegu taflborði. Látum $\min\{N\} = f(n)$ vera töluna sem við viljum finna, það er minnsta fjöldann af reitum sem við þurfum að merkja. Látum $f_h(n)$ vera minnsta fjölda af hvítum reitum sem við þurfum að merkja til þess að sérhver svartur reitur eigi sér hvítan merktan granna. Látum $f_s(n)$ vera samsvarandi fyrir svörtu reitina. Þar sem $n = 2k$ er slétt, er borðið samhverft og við höfum $f_h(n) = f_s(n)$ og $f(n) = f_h(n) + f_s(n)$.

Höllum nú borðinu þannig að lengsta svarta hornalínan, með lengdina $n = 2k$, verði lárétt. Athugum nú hvítu hornalínurnar, alls $2k$ línur, sem eru láréttar frá okkar sjónarhorni. Fjöldi reita í þeim er 1, 3, 5, ... , $2k-3$, $2k-1$, $2k-1$, $2k-3$, ... , 5, 3, 1 þegar við teljum niður á við. Við ætlum að merkja einhverja hvítu reitanna eins og hér segir: Í annarri hvorri hvítri hornalínu merkjum við annan hvorn reit. Nánar tiltekið byrjum við í efstu hvítu hornalínunni, sem hefur 1 reit og við merkjum hann. Síðan hoppum við yfir næstu hvítu hornalínuna og lendum á hvítri hornalínu sem hefur 5 reiti. Í henni merkjum við 1., 3. og 5. reitinn. Þannig höldum við áfram niður borðið. Þegar við komum að lengstu svörtu hornalínunni í miðborðinu er fjöldi merktra hvítra reita jafn summu allra oddatalna sem eru minni eða jafnar k. Við höldum svo niður og bætum við fjölda allra sléttra talna sem eru minni eða jafnar k. Að lokum er fjöldi merktra hvítra reita jafn summu allra jákvæðra heilla talna sem eru minni eða jafnar k, og er sú summa jöfn $k(k+1)/2$.

Nú tökum við eftir tvennu. Í fyrsta lagi hefur sérhver svartur reitur merktan hvítan granna. Af því fæst að $f_h(n) \leq k(k+1)/2$. Í öðru lagi hafa engir tveir merktir hvítir reitir sameiginlegan svartan granna. Þetta þýðir að til þess að allir þessir hvítu reitir, sem við höfum merkt, eigi sér merktan granna, þurfum við að merkja a.m.k. $k(k+1)/2$ svarta reiti. Af þessu fæst að $f_s(n) \geq k(k+1)/2$. Að ofansögðu höfum við því að $f_h(n) = f_s(n) = k(k+1)/2$, og því $f(n) = k(k+1)$, þar sem $n = 2k$.

Lausn dæmis 6: Setjum $x = y = 0$ inn í jöfnuna, og látum $f(0) = c$. Þá fæst að $f(-c) = f(c) + c - 1$, og því er $c \neq 0$.

Setjum $x = f(y)$ inn í jöfnuna og fáum

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \tag{1}$$

fyrir öll $x = f(y) \in \mathrm{Im}(f)$.

Sýnum nú að sérhverja rauntölu megi skrifa sem mismun tveggja staka úr $\mathrm{Im}(f)$. Ef við setjum $y = 0$ í jöfnuna fáum við $f(x-c) = f(c) + cx + f(x) - 1$, og þar með

$$\{f(x-c) - f(x) : x \in \mathbf{R}\} = \{cx + f(c) - 1 : x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R},$$

þar sem $c \neq 0$.

Látum nú $x \in \mathbf{R}$. Þá er $x = y_1 - y_2$ þar sem $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Við fáum því

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y_2) \\ &= f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1 \\ &= \left(\frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2}\right) + y_1 y_2 + \left(\frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2}\right) - 1 \\ &= c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} \\ &= c - \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Þetta gildir fyrir öll $x \in \mathbf{R}$. Frá jöfnum (1) og (2) sjáum við að $c = 1$, og því að $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ fyrir öll $x \in \mathbf{R}$.

Öfugt sést að fallið $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ fullnægir fallajöfnuna í dæminu.