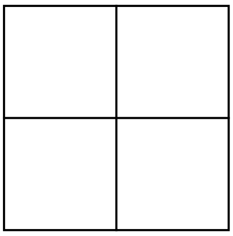
Félag raungreinakennara | Laugardagur, 6. mars 2010
Íslenska stærðfræðafélagið | 10:00 - 14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2009–2010
Lausnir á dæmum í úrslitakeppni

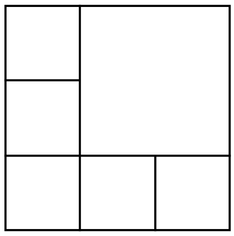
Dæmi 1

Látum n vera einhverja jákvæða heiltölu aðra en 2, 3 eða 5. Sýnið að ferning megi klippa sundur í nákvæmlega n minni ferninga (sem geta verið misstórir).

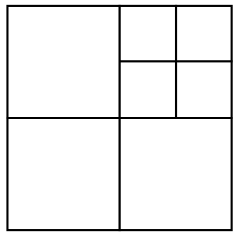
Lausn: Fyrir $n = 1$ þarf augljóslega ekkert að klippa og $n = 4$ fæst auðveldlega með því að klippa í fjóra jafnstóra ferninga. Eftirfarandi mynd sýnir einnig hvernig klippa má í 6 eða 7 minni ferninga.



$n = 4$

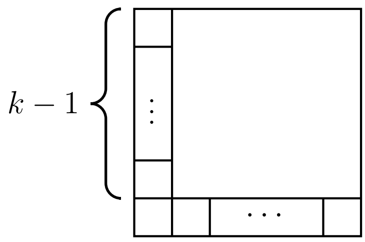


$n = 6$

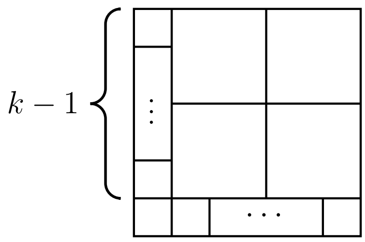


$n = 7$

Fyrir alla sléttar tölur n stærri en 2 má nota svipaða aðferð og fyrir $n = 6$, þ.e.a.s. með einu stórum og $n - 1$ litlum meðfram tveimur köntum.



$n = 2k, \quad k \geq 2$



$n = 2k + 3, \quad k \geq 2$

Og síðan með því að skipta einum ferningnum í fjóra hluta má alltaf fjölga ferningunum um 3 og þannig fá allar oddatölur stærri en 5.

Dæmi 2

Fall f uppfyllir

$$f(x) + xf(1 - x) = x$$

fyrir allar rauntölur x. Ákvarðið $f(2)$ og finnið formúlu fyrir f.

Lausn: Setjum $1-x$ inn fyrir x og fáum

$$f(1-x)+(1-x)f(1-(1-x))=1-x$$

það er $f(1-x)+(1-x)f(x)=1-x$, sem má leysa fyrir $f(1-x)$ og stinga inn í upphaflegu jöfnuna:

$$f(x)+x\,(1-x-(1-x)f(x))=x \quad\Leftrightarrow\quad (1-x+x^2)f(x)=x^2$$

og þar sem $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ fyrir allar rauntölur x, fæst að

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-x+1}$$

fyrir öll x, og sér í lagi að $f(2)=4/3$.

Dæmi 3

Finnið fjóra frumþætti tölunnar $3^{32}-2^{32}$ sem eru lægri en 100.

Lausn: Með endurtekinni þáttun fæst

$$\begin{aligned}
3^{32}-2^{32} &= (3^{16}-2^{16})(3^{16}+2^{16})\\
&= (3^8-2^8)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})\\
&= (3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})\\
&= (3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})\\
&= 5\cdot 13\cdot 97\cdot (3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})
\end{aligned}$$

Nú eru 5, 13 og 97 frumtölur og fjórði frumþátturinn undir 100 fæst með því að athuga að $3^8+2^8=6817=17\cdot 401$. Svo að frumtölurnar 5, 13, 17 og 97 eru þættir í $3^{32}-2^{32}$.

Ath: Aðrir frumþættir $3^{32}-2^{32}$ en þessir fjórir eru allir stærri en 100, því 401 er frumtala og $3^{16}+2^{16}=43112257=3041\cdot 14177$ er frumþáttun á restinni.

Dæmi 4

Ef x, y og z eru rauntölur á bilinu $[-2,1]$ og $x+y+z=0$, sýnið að

$$x^2+y^2+z^2\leq 6.$$

Lausn: Ef $x=y=z=0$ er ójafnan augljós. Annars eru tvær talnanna með ólík formerki. Skiptum í tilfelli eftir fjölda neikvæðra talna:

Tvær neikvæðar tölur, segjum x og y. Þá er z jákvæð og þar sem $x + y + z = 0$ gildir

$$z = -(x + y) = |x + y| = |x| + |y|$$

þar sem x og y hafa sama formerki. Því fæst að $1 \geq z \geq |x|, |y|$ og þar með er

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + 1 + 1 = 3.$$

Ein neikvæð tala, segjum z. Þá eru x og y jákvæðar (eða önnur þeirra núll) og liggja þá á bilinu $[0, 1]$, en z uppfyllir $|z| \leq 2$, svo að

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + 1 + 4 = 6.$$

Dæmi 5

Í þríhyrningi ABC er $\angle ABC = 2\angle ACB$. Sannið að

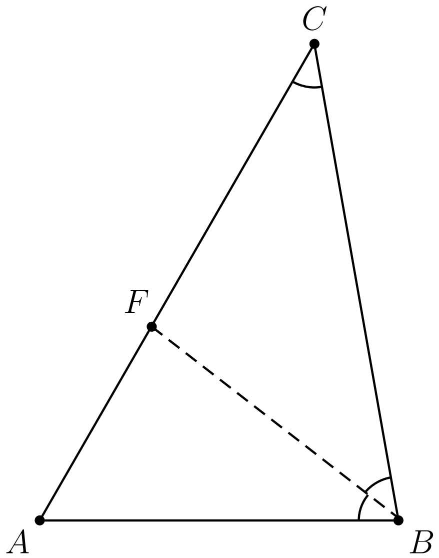
(a) $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$

(b) $AB + BC < 2AC$

Lausn: Teiknum punktalínu BF sem helmingar hornið $\angle ABC$. Þá eru þríhyrningarnir AFB og ABC einslaga, svo

$$\frac{AF}{AB} = \frac{FB}{BC} = \frac{AB}{AC}$$

og ennfremur er BFC jafnarma með $FC = FB$. Þá fæst:



(a)
$$\begin{aligned} AC^2 &= AC \cdot (AF + FC) \\ &= AC \cdot AF + AC \cdot FC \\ &= AC \cdot AF + AC \cdot FB \\ &= AB^2 + AB \cdot BC \end{aligned}$$

(b) Notum jöfnuna úr lið (a):

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + AB \cdot BC \\ &= AB \cdot (AB + BC) \\ \Longrightarrow \quad AB + BC &= \frac{AC}{AB} \cdot AC \\ &= \frac{BC}{FB} \cdot AC \\ &< 2AC \end{aligned}$$

þar sem síðasta ójafnan er afleiðing af þríhyrningsójöfnunni: $BC < FB + FC = 2FB$.

Dæmi 6

Sýnið, fyrir allar heiltölur $n > 1$, að summan

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

sé ekki heiltala.

Lausn A: Látum 2^k vera hæsta veldið af 2 sem gengur upp einhvern af nefnurunum, þ.e.a.s. einhverja af tölunum frá 1 upp í n. Það er reyndar jafngilt hæsta veldinu af 2 sem er jafnt eða minna en n, sem þýðir að k er heiltala þannig að $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Athugum síðan að þá er aðeins ein tala á meðal $1, 2, \ldots, n$ sem er deilanleg með 2^k, nefnilega talan 2^k sjálf, því næst minnsta jákvæða heiltalan sem er deilanleg með 2^k er $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ sem er stærri en n.

Látum nú m vera minnsta samnefnara fyrir brotin, þ.e. minnsta samfeldi $1, 2, \ldots, n$. Þá er $m = 2^k \cdot d$ þar sem d er oddatala. Lengjum öll brotin þannig að þau hafi m sem nefnara og tökum eftir að teljarinn verður slétt tala fyrir öll brotin nema eitt, því það þarf að lengja öll brotin með sléttri tölu til að ná veldinu af 2 upp í 2^k nema fyrir brotið $1/2^k$, sem verður $(d \cdot 1)/(d \cdot 2^k) = d/m$. Leggjum nú saman teljarana, en þar sem einn er oddatala en allir hinir sléttir er summa teljaranna oddatala. Summa brotanna er því jöfn s/m þar sem s er oddatala og m er slétt tala og getur þá ekki verið heiltala því slétt tala gengur aldrei upp í oddatölu.

Lausn B: Látum p vera stærstu frumtöluna minni en eða jafna n. Það er vel þekkt að það er frumtala milli k og $2k$ fyrir heilar tölur $k > 1$. Þess vegna er $2p > n$, og p gengur því ekki upp í neinni tölu í $\{1, \ldots, n\}$ annarri en sjálfri sér. Skoðum $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, og leggjum fyrst saman alla liði nema $1/p$ og látum a/b vera þá summu fullstytta. p gengur þá ekki upp í b. Þá sjáum við að p gengur upp í nefnara $a/b + 1/p = (pa + b)/(pb)$, en ekki teljara. Þetta er upphaflega summan, og hún er því ekki heil tala.

Ath: Nokkrir reyndu þrepun og ætluðu þá að sýna að næsta tala í röðinni sé ekki heiltala ef sú á undan er það ekki, en sú forsenda dugar alls ekki.

Í þessari lokakeppni tóku þátt 30 nemendur úr átta framhaldsskólum. Meðalstigafjöldi fyrir hvert dæmi var eins og eftirfarandi tafla sýnir:

1	2	3	4	5	6	alls
7,67	4,57	5,23	3,17	1,50	0,53	22,67

Við þökkum öllum þeim sem tóku þátt og aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson	Friðrik Diego
Guðbjörn Freyr Jónsson	Gunnar Freyr Stefánsson
Jóhanna Eggertsdóttir	Marteinn Þór Harðarson