Félag raungreinakennara
Íslenska stærðfræðafélagið

Laugardagur, 2. mars 2013
10:00–14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2012–2013
Úrslitakeppni – Lausnir

Dæmi 1

Látum a, b, c, d, e, f og g vera ólíkar jákvæðar heiltölur minni en eða jafnar 7. Finnið allar frumtölur (prímtölur) sem hægt er að rita á forminu:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d + e \cdot f \cdot g$$

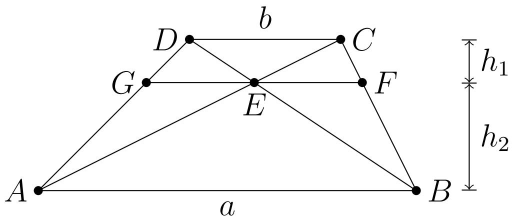
Lausn á dæmi 1

Athugum að ef tölur með sameiginlegan þátt eru sín í hvorum liðnum þá verður útkoman deilanleg með þeim þætti. Því er ljóst að 2, 4 og 6 verða að vera í sama lið (þær hafa allar þáttinn 2). Ennfremur verða 3 og 6 að vera í sama lið því báðar hafa þáttinn 3. Þá sést að 2, 3, 4 og 6 verða að vera í sama lið. Í hinum liðnum eru þá 1, 5 og 7 (þær tölur sem eftir eru). Vegna víxlreglu margföldunar er sama hvernig tölunum er raðað innan liða og því er eina mögulega frumtalan $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 7 = 179$.

Dæmi 2

Í trapisu $ABCD$ eru mótlægu hliðarnar AB og CD samsíða, $|AB| = a$, $|CD| = b$ og hornalínurnar AC og BD skerast í punkti E. Strikið FG liggur gegnum E samsíða AB og hefur endapunkta sína á hliðunum BC og AD. Táknið $|FG|$ út frá a og b.

Lausn á dæmi 2



Táknum hæð trapisunnar $GFCD$ með h_1 og hæð trapisunnar $ABFG$ með h_2. Þá er summan $h_1 + h_2$ jöfn hæð trapisunnar $ABCD$. Samanlagt flatarmál $GFCD$ og $ABFG$ er jafnt flatarmáli $ABCD$, svo

$$h_1 \cdot \frac{b + |FG|}{2} + h_2 \cdot \frac{|FG| + a}{2} = (h_1 + h_2) \cdot \frac{a+b}{2}$$

$$\text{og því} \quad |FG| = \frac{h_1 a + h_2 b}{h_1 + h_2}$$

Nú eru þríhyrningarnir ABE og CDE einslaga svo $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{b}{a}$. Því er

$$|FG| = \frac{(h_1/h_2) \cdot a + b}{(h_1/h_2) + 1} = \frac{(b/a) \cdot a + b}{(b/a) + 1} = \frac{2ab}{a+b}$$

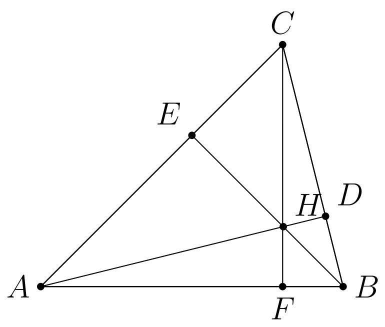
Dæmi 3
Hring er skipt í n jafnstóra boga. Tölunum $1, 2, \ldots, n$ er dreift á bogana (einni tölu á hvern boga) þannig að fjöldi boga milli talnanna a og $a+1$ er alltaf sá sami, fyrir öll a frá 1 til $n-1$. Tölurnar 11, 4 og 17 falla í þessari röð á samliggjandi boga. Finnið hver talan n er og rökstyðjið hvers vegna þetta er eini möguleikinn.

Lausn á dæmi 3
Þar sem fjöldi boga milli a og $a+1$ er alltaf sá sami þá gildir að mismunur talnanna á samliggjandi bogum er ávallt k eða $n-k$ þar sem $n, k \in \mathbb{N}$. Fram kemur að 17 og 4 eru á samliggjandi bogum og einnig að 11 og 4 eru á samliggjandi bogum. Látum nú $k = 17 - 4 = 13$. Ljóst er að $11 - 4 \neq 13 = k$ og þar sem 11 og 4 eru á samliggjandi bogum er þá $11 - 4 = n - k$. Þá fæst að $11 - 4 = n - 13$ sem gefur $n = 20$.

Dæmi 4
Í hvasshyrndum þríhyrningi ABC eru AD, BE og CF hæðirnar á tilsvarandi hliðar og H skurðpunktur þeirra. Sýnið að eftirfarandi jafna gildi:

$$\frac{|AH|}{|AD|} + \frac{|BH|}{|BE|} + \frac{|CH|}{|CF|} = 2$$

Lausn á dæmi 4



Táknum flatarmál þríhyrnings XYZ með $F(XYZ)$. Við tökum eftir því að

$$\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{|HD|}{|AD|} \cdot \frac{\frac{1}{2}|CB|}{\frac{1}{2}|CB|} = \frac{F(BHC)}{F(ABC)}$$

Sömuleiðis er

$$\frac{|HE|}{|BE|} = \frac{F(AHC)}{F(ABC)} \quad \text{og} \quad \frac{|HF|}{|CF|} = \frac{F(AHB)}{F(ABC)}$$

Því er

$$\begin{aligned} \frac{|HD|}{|AD|} + \frac{|HE|}{|BE|} + \frac{|HF|}{|CF|} &= \frac{F(BHC)}{F(ABC)} + \frac{F(AHC)}{F(ABC)} + \frac{F(AHB)}{F(ABC)} \\ &= \frac{F(BHC) + F(AHC) + F(AHB)}{F(ABC)} = 1 \end{aligned}$$

Þá fæst jafnan

$$\begin{aligned} \frac{|AH|}{|AD|} + \frac{|BH|}{|BE|} + \frac{|CH|}{|CF|} &= \frac{|AD| - |HD|}{|AD|} + \frac{|BE| - |HE|}{|BE|} + \frac{|CF| - |HF|}{|CF|} \\ &= 3 - \left(\frac{|HD|}{|AD|} + \frac{|HE|}{|BE|} + \frac{|HF|}{|CF|} \right) \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Dæmi 5
Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að

$$\sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

verði ræð tala.

Lausn á dæmi 5
Það nægir að finna hvenær til eru jákvæðar heiltölur a, b þannig að

$$\frac{9n-1}{n+7} = \frac{a^2}{b^2}$$

þar sem brotið $\frac{a^2}{b^2}$ er fullstytt. Athugum að

$$\frac{9n-1}{n+7} = 9 - \frac{64}{n+7}$$

Þá fæst

$$\begin{aligned} 9 - \frac{64}{n+7} &= \frac{a^2}{b^2} \\ 9 - \frac{a^2}{b^2} &= \frac{64}{n+7} \\ (n+7)(9b^2 - a^2) &= 64b^2 \\ (n+7)(3b-a)(3b+a) &= 64b^2 \end{aligned}$$

Þar sem brotið a^2/b^2 er fullstytt gildir að $ssd(a, b) = 1$.
Látum p vera frumtölu. Ef $p \mid 3b - a$ og $p \mid b^2$ þá gildir að $p \mid 3b - a$ og $p \mid b$ sem mundi gefa að $p \mid a$ og $p \mid b$, mótsögn. Því verður að gilda að $ssd(3b - a, b^2) = 1$ og eins verður að gilda að $ssd(3b + a, b^2) = 1$. Þetta þýðir að $3b - a \mid 64$ og $3b + a \mid 64$.
Þá er $3b - a = 2^r$ og $3b + a = 2^s$ með $r < s$ og $r + s \leq 6$. $r = 0$ gengur ekki (enda $3b - a + 3b + a = 6b$ slétt). Möguleikarnir sem fást fyrir (r, s) eru $(1, 2), (1, 3), (1, 4)$ og $(2, 3)$. Könnum þessi tilvik.

$(r, s) = (1, 2)$:

$$\begin{aligned} 3b - a &= 2 \\ 3b + a &= 4 \end{aligned}$$

þá væri $b = 1, a = 1$ sem gefur $n + 7 \cdot 2 \cdot 4 = 64 \cdot 1$ svo $n + 7 = 8$ og þá $n = 1$.

$(r, s) = (1, 3)$:

$$\begin{aligned} 3b - a &= 2 \\ 3b + a &= 8 \end{aligned}$$

þá væri $6b = 10$ sem gengur ekki.

$(r, s) = (1, 4)$:

$$\begin{aligned} 3b - a &= 2 \\ 3b + a &= 16 \end{aligned}$$

þá væri $b = 3, a = 7$ sem gefur $n + 7 \cdot 2 \cdot 16 = 64 \cdot 9$ svo $n + 7 = 18$ og þá $n = 11$.

$(r,s)=(2,3)$:

$$\begin{aligned} 3b-a &= 4 \\ 3b+a &= 8 \end{aligned}$$

þá væri $b=2, a=2$ sem er í mótsögn við að $ssd(a,b)=1$.

Af ofantöldu er ljóst að einu lausnirnar eru $n=1$ og $n=11$.

Dæmi 6

Látum $f_1=f_2=1$ og $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ fyrir $n\geq 1$. Sýnið að þá gildi:

$$1-\frac{1}{10^{300}}<\frac{f_1}{f_2f_3}+\frac{f_2}{f_3f_4}+\cdots+\frac{f_{2011}}{f_{2012}f_{2013}}<1$$

Lausn á dæmi 6

Höfum

$$\frac{f_i}{f_{i+1}f_{i+2}}=\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{f_{i+1}f_{i+2}}=\frac{f_{i+2}}{f_{i+1}f_{i+2}}-\frac{f_{i+1}}{f_{i+1}f_{i+2}}=\frac{1}{f_{i+1}}-\frac{1}{f_{i+2}}$$

svo að

$$\frac{f_1}{f_2f_3}+\frac{f_2}{f_3f_4}+\cdots+\frac{f_{2011}}{f_{2012}f_{2013}}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_{2013}}=1-\frac{1}{f_{2013}}$$

Þurfum að sýna að

$$1-\frac{1}{10^{300}}<1-\frac{1}{f_{2013}}<1$$

Seinni ójafnan er augljós og fyrri ójafnan er jafngild

$$10^{300}<f_{2013}$$

Nú gildir $f_{n+1}>f_n$ ef $n\geq 2$, svo að $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n>2f_n$ fyrir öll $n\geq 2$. Af því fæst

$$f_{2013}>2f_{2011}>2^2f_{2009}>\cdots>2^{\frac{2010}{2}}f_3=2^{1005}\cdot 2>2^{1000}=(2^{10})^{100}>1000^{100}=10^{300}$$

Ath: Við getum fengið betra mat á f_{2013} með

$$\begin{array}{rr} f_2=1, & f_7=13>10=10f_2, \\ f_3=2, & f_8=21>20=10f_3, \\ f_4=3, & f_9=f_8+f_7>10f_3+10f_2=10f_4, \\ f_5=5, & f_{10}>10f_5, \\ f_6=8, & f_{11}>10f_6, \\ \cdots & \end{array}$$

Svo fyrir $n\geq 2$ gildir $f_{n+5}>10f_n$. Þá fæst loks

$$f_{2013}>10f_{2008}>10^2f_{2003}>\cdots>10^{\frac{2010}{5}}f_3=10^{402}\cdot 2>10^{400}$$