Félag raungreinakennara | Laugardagur, 8. mars 2014
Íslenska stærðfræðafélagið | kl. 10:00–14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2013–2014
Úrslitakeppni

Dæmi 1
Látum P, Q, R og S vera fjóra punkta á línu (í þessari röð) þannig að $PQ = RS$. Ofan línunnar eru dregnir hálfhringir með miðstrengi PQ, RS og PS. Neðan línunnar er dreginn hálfhringur með miðstreng QR. Þessir fjórir hálfhringir afmarka svæði sem kallast *salinon*. Látum samhverfuás salinonsins skera jaðar þess í punktunum M og N. Sýnið að þá sé flatarmál salinonsins jafnt flatarmáli hrings með miðstrenginn MN.

Dæmi 2
Hvað má koma mörgum biskupum fyrir á venjulegu 8×8 skákborði þannig að engir tveir séu í sömu skálínu?

Dæmi 3
Finnið allar rauntölulausnir jafnanna:

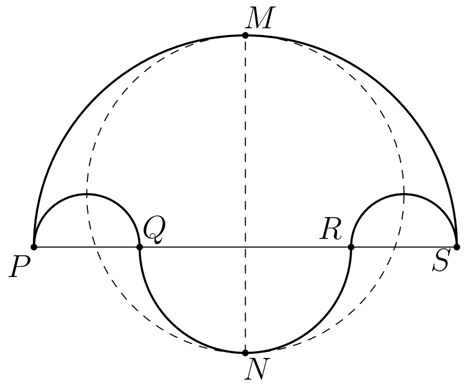
$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2 \\ y^2 - z &= x^2 \\ z^2 - x &= y^2 \end{aligned}$$

Dæmi 4
Ákvarðið allar frumtalnatvenndir (p, q) þannig að $p^q + q^p$ sé frumtala.

Dæmi 5
Ferhyrningurinn $ABCD$ hefur hornpunkta sína á hring. Hornalínurnar AC og BD skerast í punkti Q. Hálflínan frá D í gegnum A og hálflínan frá C í gegnum B skerast í P. Gefið er að $CD = CP = DQ$. Finnið hornið $\angle CAD$.

Dæmi 6
Sýnið að ef n er jákvæð heiltala og tölurnar 4^n og 5^n byrja á sama tölustaf í tugakerfi þá verði sá tölustafur að vera 2 eða 4.

Lausn 1



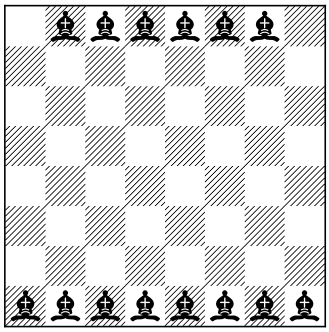
Látum R vera radíus hringsins með miðþveril PS og r vera radíus hringsins með miðþveril QR. Þá er $\frac{R-r}{2}$ radíus hringanna með miðþverla PQ og RS. Fáum að flatarmál salinonsins er

$$\frac{1}{2}R^2\pi + \frac{1}{2}r^2\pi - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2\pi = \frac{2R^2 + 2r^2 - R^2 + 2Rr - r^2}{4}\pi = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2\pi$$

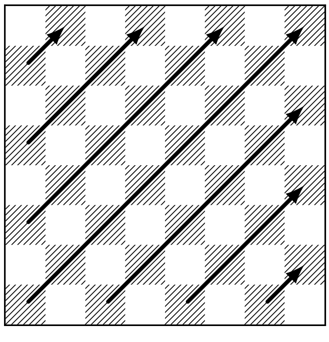
en hringurinn með miðþveril MN hefur einmitt radíus $\frac{R+r}{2}$ svo flatarmál hans er því $\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\pi$ og jafnt flatarmáli salinonsins.

Lausn 2

Það má koma 14 biskum fyrir eins og sýnt er á myndinni:



Ljóst er að biskup á svörtum reit getur aldrei verið á sömu skálínu og biskup á hvítum reit svo það nægir að líta á svörtu reitina. Í aðra áttina skiptist taflborðið í 7 skálínur. Því má í mesta lagi hafa 7 biskupa á svörtu reitunum þannig að engir tveir lendi í sömu skálínu. Á sama hátt fæst að í mesta lagi má koma fyrir 7 biskupum á hvítu reitunum þannig að engir tveir séu í sömu skálínu. Saman gefur þetta að mesti fjöldi biskupa sem koma má fyrir á 8×8 skákborði þannig að engir tveir lendi á sömu skálínu er 14.



Lausn 3

Vegna samhverfu megum við gera ráð fyrir að x sé stærst, það er $x \geq y, z$.

Ef við einangrum y^2 í seinni tveimur jöfnunum og leysum þær saman fæst:

$$x^2 + z = z^2 - x$$

$$z + x = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$$

svo annað hvort er $z + x = 0$ eða $z - x = 1$, sem gengur ekki þar sem $x \geq z$. Þar með er $z = -x$. Athugum nú að ef við leggjum saman allar jöfnurnar fæst $x + y + z = 0$ og þar sem $z = -x$ fæst $y = 0$. Setjum nú $y = 0$ og $z = -x$ inn í síðustu jöfnuna og fáum:

$$x^2 - x = 0$$

Þar með er ljóst að $x = 0$ eða $x = 1$ og við fáum lausnirnar $(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 0, -1)$. Með því að láta svo y og z vera stærst fást svo tvær lausnir til viðbótar $(x, y, z) = (-1, 1, 0), (0, -1, 1)$.

Önnur lausn

Leggjum saman jöfnurnar þrjár og fáum að $x+y+z = 0$. Setjum svo $z = -x-y$ inn í fyrstu jöfnuna:

$$x^2 - y = (-x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 2xy + y^2 + y$$

svo við sjáum að $y = 0$ eða $0 = 2x + y + 1$. Ef $y = 0$ þá gefur $x + y + z = 0$ að $z = -x$ og þar með $x^2 = y^2 - z = x$ svo annaðhvort er $x = 0$ eða $x = 1$. Þetta gefur lausnirnar $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ og $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Ef hins vegar $y = -2x - 1$ þá er $z = -x - y = x + 1$ og önnur jafnan í jöfnuhneppinu verður

$$x^2 = (-2x - 1)^2 - (x + 1) = 4x^2 + 4x + 1 - x - 1 = 4x^2 + 3x$$

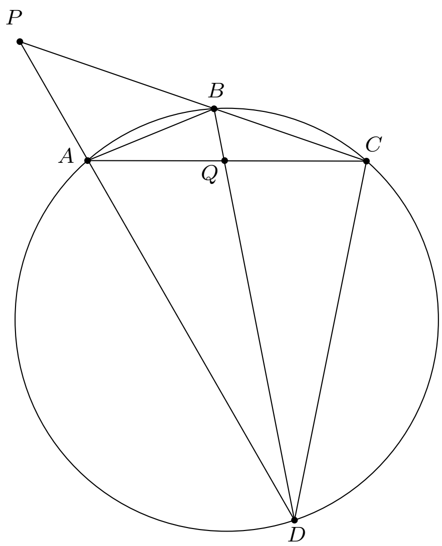
svo $0 = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1)$ og því $x = 0$ eða $x = -1$. Þetta gefur tvær lausnir til viðbótar $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ og $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$. Alls eru því lausirnar (x, y, z) fjórar: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ og $(-1, 1, 0)$, en auðvelt er að staðfesta að þær uppfylla jöfnurnar.

Lausn 4

Gerum ráð fyrir að p og q séu frumtölur. Ef bæði p og q eru oddatölur þá er $p^q + q^p$ slétt tala en eina slétta frumtalan er 2 og $p^q + q^p = 2$ er fráleitt. Sama má segja ef bæði p og q eru sléttar tölur. Til að $p^q + q^p$ sé frumtala verður því önnur talnanna p og q að vera slétt og hin að vera oddatala. Gerum ráð fyrir að p sé slétt og q sé oddatala. Þetta þýðir þá að $p = 2$.

Við athugum því tölu af gerðinni $2^q + q^2$ þar sem $q > 2$ er frumtala. Við notum leifareikning og reiknum $\bmod 3$. Nú er q oddatala og því fæst $2^q \equiv (-1)^q = 1 \pmod 3$. Ef $q = 3$ þá er $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ sem er frumtala. En þetta er eini möguleikinn, því ef $q > 3$ þá er q ekki deilanleg með 3 svo $q \equiv 1 \pmod 3$ eða $q \equiv 2 \pmod 3$. Í báðum tilvikum er $q^2 \equiv 1 \pmod 3$. Því er $2^q + q^2 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Þetta þýðir, með öðrum orðum, að $2^q + q^2$ er margfeldi af 3 og því ekki frumtala. Einu lausnirnar eru því $(p, q) = (2, 3)$ og $(p, q) = (3, 2)$.

Lausn 5



Látum $\angle CPD = \theta$. Þar sem $CP = CD$ gildir að $\angle PDC = \theta$ og $\angle DCP = 180^\circ - 2\theta$. Setjum $\angle CQD = \phi$. Höfum að $DC = DQ$ svo $\angle DCQ = \phi$ og $\angle QDC = 180^\circ - 2\phi$. Einnig sést að $\angle CBD = \angle CAD$ þar sem þau spanna sama boga. Loks gildir að $\angle PAC = \theta + \phi$ þar sem það er ytra horn í þríhyrningnum $\triangle ADC$. Því er $\angle CBD = 180^\circ - \theta - \phi$. Hornasumma þríhyrningsins $\triangle BDC$ er 180° svo

$$180^\circ - 2\phi + 180^\circ - 2\theta + 180^\circ - \theta - \phi = 180^\circ$$

og þá fæst $\theta + \phi = 120^\circ$ sem gefur $\angle CAD = 60^\circ$.

Lausn 6

Látum k tákna upphafstölustaf talnanna 4^n og 5^n. Þá gilda ójöfnurnar:

$$k \cdot 10^r \leq 4^n < (k+1) \cdot 10^r,$$
$$k \cdot 10^s \leq 5^n < (k+1) \cdot 10^s$$

þar sem r og s eru jákvæðar heiltölur. Umritum fyrri ójöfnuna og setjum þá síðari í annað veldi:

$$k \cdot 10^r \leq 2^{2n} < (k+1) \cdot 10^r,$$
$$k^2 \cdot 10^{2s} \leq 5^{2n} < (k+1)^2 \cdot 10^{2s}$$

og margföldum síðan ójöfnurnar saman í eina ójöfnu:

$$k^3 \cdot 10^{r+2s} \leq 10^{2n} < (k+1)^3 \cdot 10^{r+2s}.$$

Deilum í gegn með 10^{r+2s} og athugum að þar sem k er tölustafur þá er $1 \leq k \leq 9$ og þá

$$1 \leq k^3 \leq 10^{2n-r-2s} < (k+1)^3 \leq (9+1)^3 = 1000.$$

Sjáum þar með að $0 \leq 2n - r - 2s < 3$.

Ef $2n - r - 2s = 0$ þá verður $k = 1$ og þá $10^r = 4^n$. Þetta gengur augljóslega ekki fyrir $n > 0$ því að þá yrði $r > 0$ en 4^n er ekki deilanleg með 5.

Ef $2n - r - 2s = 1$ þá verður $k^3 \leq 10 \leq (k+1)^3$ og þar með $k = 2$.

Ef $2n - r - 2s = 2$ þá verður $k^3 \leq 100 \leq (k+1)^3$ og þar með $k = 4$.

Því verður k að vera 2 eða 4.

Athugasemd:
Tölurnar 4^{52} og 5^{52} byrja báðar á tölustafnum 2.
Ennfremur byrja bæði 4^{11} og 5^{11} á tölustafnum 4.