Félag raungreinakennara
Íslenska stærðfræðafélagið

Laugardagur, 13. mars 2021
kl. 10:00–14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2020-2021
Úrslitakeppni – Lausnir

Dæmi 1
Gutti ætlar að lita sérhverja hlið tenings annaðhvort rauða eða bláa. Hversu marga ólíka teninga getur Gutti endað með?

Dæmi 1 – Lausn
Nú getur fernt gilt:

(i) *Allar hliðar eru eins á litinn*. Allir albláir (0R6B) teningar eru eins (og alrauðir líka).

(ii) *Ein hlið rauð og fimm bláar (eða öfugt)*. Ef ein hlið er rauð þá er mótlæg hlið hennar blá og aðlægar hliðar þeirra mótlægu sömuleiðis bláar. Hér er því aðeins um 1 (1R5B) tening að ræða. Sama gildir um 5R1B tening. Alls eru því tveir teningar af þessari gerð.

(iii) *Tvær rauðar hliðar og fjórar bláar. (eða öfugt)*. Ef tvær hliðar eru rauðar (2R4B) þá eru þær annaðhvort mótlægar eða aðlægar. Gerð teningsins ræðst fullkomlega af þeirri staðreynd. Því eru tveir 2R4B teningar og tveir 4R2B teningar, alls fjórir teningar mögulegir af þessari gerð.

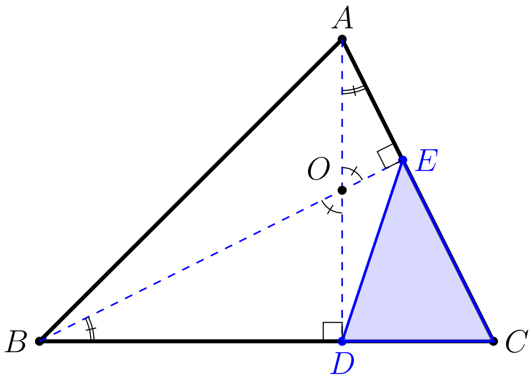
(iv) *Þrjár rauðar, þrjár bláar*. Ef þrjár hliðar eru rauðar þá eru þrjár blár (3R3B). Lítum á þessa þrennd. Nú er annaðhvort eitt par hliðanna mótlægar eða ekki. a) Ef svo: þá liggur hin á milli þeirra og þær mynda þá aðlæga ræmu. b) Ef ekki: Þá liggja allar rauðu hliðarnar að sameiginlegum hornpunkti og ræðst teningurinn fullkomlega af því. Teningar í a) og b) eru ljóslega ólíkir, alls tveir.

Það má því lita teninginn á samtals $2 + 2 + 4 + 2 = 10$ vegu.

Dæmi 2

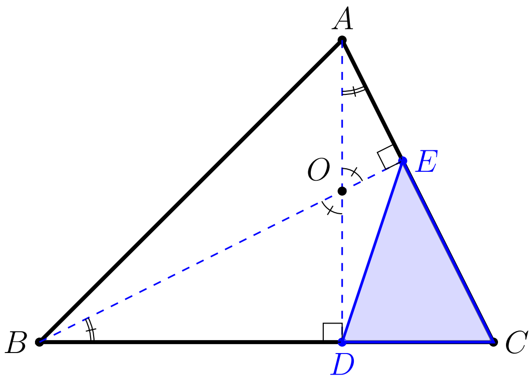
Í hvasshyrndum þríhyrningi ABC er D fótpunktur hæðarinnar úr A og E fótpunktur hæðarinnar úr B. Sýnið að þríhyrningarnir ABC og DEC séu einslaga.

Dæmi 2 – Lausn



Aðferð I

Táknum skurðpunkt hæðanna tveggja með O. Það er ljóst að rétthyrndu þríhyrningarnir AEO og ODB eru einslaga; sér í lagi er $\angle DBO = \angle EAO$. Því eru rétthyrndu þríhyrningarnir BEC og ADC einslaga. Þess vegna er $CD/CE = CA/CB$ og þríhyrningarnir ABC og DEC því einslaga.

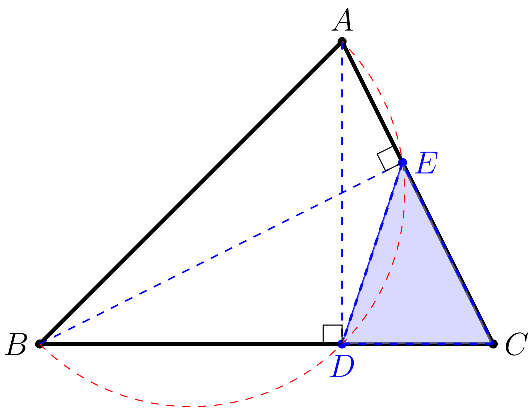


Aðferð II

Táknum skurðpunkt hæðanna tveggja með O. Það er ljóst að rétthyrndu þríhyrningarnir AEO og ODB eru einslaga svo $OE/OA = OD/OB$ og þarmeð eru þríhyrningarnir OAB og OED einslaga. Sér í lagi er $\angle BED = \angle BAD$. Þar sem

$$\angle BED + \angle DEC = 90^\circ = \angle BAD + \angle DBA$$

fæst að $\angle DEC = \angle DBA$. Þríhyrningarnir ABC og DEC eru því einslaga.



Aðferð III

Takið eftir að AEB og ADB eru rétthyrndir þríhyrningar með sameiginlega langhlið AB. Ferhyrningurinn $AEDB$ er því rásaður og summa mótlægra horna hans 180°.

Þá er $\angle BAC = \angle EDC$ og þarmeð eru þríhyrningarnir ABC og DEC einslaga

Dæmi 3
Hversu margar fjögurra stafa tölur $n = abcd$ (a, b, c og d eru tölustafir n) eru þannig að $a > d$ og mismunurinn $abcd - dcba$ er spegiltala?

Dæmi 3 – Lausn
Finnum fyrst allar fjögurra stafa spegiltölur sem fást á þennan máta.
Látum $abcd - dcba = xyyx$ eða

$$\begin{array}{ccccc} & d & c & b & a \\ + & x & y & y & x \\ \hline & a & b & c & d \end{array}$$

Þar sem $a > d$ hlýtur að vera geymt í einingasætinu og $a + x = 10 + d$. Einnig sést af þúsundasætinu að $d + x < 10$ og því er $a = d + x$ eða $a = d + x + 1$ eftir þvi hvort það er geymt í hundraðasætinu eða ekki. Með því að setja seinni jöfnurnar inn í þá fyrri fæst:

$$10 = a + x - d = \begin{cases} 2x & \text{ef ekki var geymt í hundraðasætinu} \\ 2x + 1 & \text{ef geymt var í hundraðasætinu} \end{cases}$$

Þar með er ljóst að $x = 5$ því seinna tilfellið gefur enga lausn.

Einnig vitum við að það var geymt í einingasætinu og það er ekki geymt í hundraðasætinu. Þar sem ekki er geymt í hundraðasætin gildir $b \geq c$.

Athugum nú hvort $b = c$ geti gengið. Þá gefur tugasætið $b + y + 1 = 10 + c = 10 + b$ eða $y = 9$ þar sem geymt er í einingasætinu. Þá er geymt í tugasætinu. Hundraðasætið gefur þá $c + y + 1 = 10 + c$ sem þýðir að geymt er í hundraðasætinu sem er mótsögn því við höfum þegar sýnt að ekki var geymt í hundraðasætinu. Þar með gildir að $b > c$.

Þar sem $b > c$ hlýtur að vera geymt í tugasætinu og $b + y + 1 = 10 + c$. Þar sem geymt er í tugasætinu og ekki í hundraðasætinu þá gildir að $c + y + 1 = b$. Með því að setja seinni jöfnuna inn í þá fyrri fæst:

$$10 = b + y + 1 - c = 2y + 2$$

sem gefur $y = 4$. Einnig er ljóst að $a = d+5$ og $b = c+5$ og þar að auki er $a \leq 9, b \leq 9, c \geq 0$ og $d \geq 1$. Sem gefur valmöguleikana $d = 1, 2, 3, 4$ og $c = 0, 1, 2, 3, 4$.

Ef $(a - d) = 1$ og $c \geq b$ er $abcd - dcba = 999 - 10(c - b)$

Heildarfjöldi fjögurra stafa talna $abcd$ þannig að $a > d$ og $abcd - dcba$ er fjögurra stafa spegiltala er því $5 \cdot 5 = 25$. Til dæmis ef valið er $c = 0$ og $d = 1$ fæst $6501 - 1056 = 5445$.

Fyrir tilfellið þar sem n er þriggja stafa spegiltala skoðum við

$$\begin{aligned} n := abcd - dcba &= (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) - (d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a) \\ &= (a - d) \cdot 10^3 + (b - c) \cdot 10^2 + (c - b) \cdot 10 + (d - a) \\ &= (a - d) \cdot 10^3 + (b - c) \cdot 10^2 - (b - c) \cdot 10 - (a - d) \\ &= (a - d) \cdot (10^3 - 1) + (b - c) \cdot (10^2 - 10) \\ &= (a - d) \cdot 999 + (b - c) \cdot 90 \end{aligned}$$

Við fáum þriggja stafa tölu ef fyrsti stuðullinn $a - d = 1$. Þá er $n = 999 + (b - c) \cdot 90$. Síðasti stafur n er þá 9 svo fremsti stafurinn þarf að vera það líka. Ef $0 < b - c \leq 10$ þá er $90 \leq (b - c) \cdot 90 \leq 9 \cdot 90 = 810$. Þá er $n \geq 999 + 90 = 1089$ og $n \leq 999 + 810 = 1809$ svo

n er fjögra stafa tala með 1 sem fremsta tölustaf. Þar sem aftasti tölustafurinn er $9 \neq 1$ þá er n ekki speglitala.

Ef $b - c = 0$ þá er $n = 999 + 0 \cdot 90 = 999$ sem er vissulega spegiltala. Þetta þýðir að $b = c$ og þar sem $0 \leq b, c \leq 9$ þá má velja b og c saman á 10 vegu.

Ef $b - c = -1$ þá er $n = 999 - 1 \cdot 90 = 909$ sem einnig er spegiltala. Þetta þýðir að $c = b + 1$ og því má velja c úr menginu $\{0, 1, \ldots 8\}$ á samtals 9 vegu og þá $b = c + 1$

Ef $-9 \leq b - c \leq -2$ þá er $-810 = (-9) \cdot 90 \leq (b - c) \cdot 90 \leq (-2) \cdot 90 = -180$. Því er $n \geq 999 - 810 = 189$ og $n \leq 999 - 180 = 819$ en þá er n þriggja stafa tala og því er fremsta tala n ein af $1, 2, \ldots, 8$ og því ekki 9. Því er n ekki spegiltala.

Nú má velja $a, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ þ.a. $a - d = 1$ á 9 vegu. þ.e.
(a, d) eru $(1, 0), (2, 1), \ldots, (9, 8)$. Við höfum sé að velja má (b, c) á $10 + 9 = 19$ vegu og því má velja (a, b, c, d) í þessu tilviki á $9 \cdot 19 = 171$ vegu þ.a. n sé spegiltala.

Dæmi 4
Gefið er að margliðan

$$P(x) = 30x^4 + 17x^3 - 137x^2 + 13x + 60$$

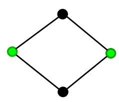
hefur rætur r_1, r_2, r_3 og r_4. Hvert er gildi margfeldisins $(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4)$?

Dæmi 4 – Lausn
Þar sem $P(x)$ hefur núllstöðvar r_1, r_2, r_3, r_4 þá er $P(x) = 30(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$. Sér í lagi er $P(-1) = 30(-1-r_1)(-1-r_2)(-1-r_3)(-1-r_4) = 30(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)$. Höfum því að

$$(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4) = \frac{P(-1)}{30} = \frac{30 - 17 - 137 - 13 + 60}{30} = \frac{-77}{30}.$$

Dæmi 5
Í sléttunni eru 2021 punktar, sumir svartir og aðrir grænir. Sérhver svartur punktur er í fjarlægðinni 2021 frá nákvæmlega tveimur grænum punktum. Hver er minnsti mögulegi fjöldi grænna punkta?

Dæmi 5 – Lausn
Fyrir sérhvert par af grænum punktum eru nákvæmlega tveir svartir punktar sem eru í fjarlægðinni 2021 frá báðum grænu punktanna. Því eru í hæsta lagi tveir svartir punktar fyrir sérhvert par af grænum punktum.

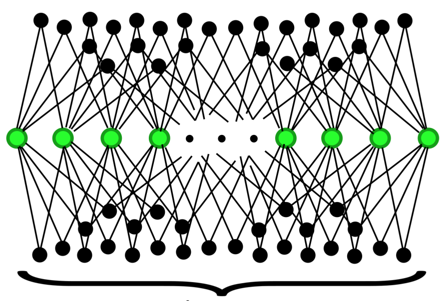


Látum g tákna fjölda grænna punkta. Fjöldi para af grænum punktum er $\binom{g}{2} = \frac{g!}{(g-2)!2!} = \frac{g(g-1)}{2}$. Þá eru í hæsta lagi $g(g-1)$ svartir punktar. Látum s tákna fjölda svartra punkta, svo $s \leq g(g-1)$. Við viljum þá lágmarka g með $s + g = 2021$. Fáum að

$$2021 = s + g \leq g(g-1) + g = g^2$$

Minnsta ferningstalstalan stærri en 2021 er $45^2 = 2025$, svo við setjum $g = 45$.
Finnum nú uppsetningu sem virkar. Röðum 45 grænum punktum á strik styttra en $2 \cdot 2021 = 4042$. Við getum þá fyllt upp með svörtum punktum sem svara til para af þeim.

Við athugum að í þessari uppsetningu skerast svartir punktar sem svara til mismunandi para ekki.



$\ell = 4041$

Dæmi 6
Fyrir hvaða frumtölur p er $1+p+p^2+p^3$ ferningstala?

Dæmi 6 – Lausn
Aðferð 1 Tökum eftir að $p=2$ gengur ekki því $9=3^2<1+2+4+8=15<4^2=16$. Gerum ráð fyrir að p sé oddatölu frumtala þannig að $1+p+p^2+p^3=n^2$ fyrir jákvæða heiltölu n. Þá má umrita jöfnuna í $p(1+p+p^2)=(n-1)(n+1)$ svo jóst er að p gengur upp í $n-1$ eða p gengur upp í $n+1$. Svo annað hvort má skrifa $n-1=pk$ eða $n+1=pk$ fyrir jákvæða heiltölu k. Í báðum tilfellum gildir $k<p$ þar sem $p=k$ getur ekki gilt því þá gengur p oftar upp í hægri hliðina en þá vinstri og ef $p<k$ þá er

$$(n-1)\cdot(n+1)\geq(kp-2)\cdot(kp)\geq((p+1)p-2)\cdot(p+1)p$$

$$=p^4+2p^3-p^2-2p-p>p^4>p(1+p+p^2).$$

Gerum ráð fyrir að p gangi upp í $n-1$ og skrifum $n-1=pk$ fyrir jákvæða heiltölu k. Þá er $n+1=pk+2$ og við höfum $p(1+p+p^2)=pk(pk+2)=p(pk^2+2k)$ sem gefur $1+p+p^2=pk^2+2k$. Ef við skoðum þess jöfnu mod p fæst $1\equiv 2k \pmod p$ sem hefur lausnina $k\equiv\frac{p+1}{2} \pmod p$. Þar sem $k<p$ gildir $k=\frac{p+1}{2}$. Við höfum því

$$1+p+p^2=pk^2+2k=p\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+2\left(\frac{p+1}{2}\right)=p\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+p+1$$

sem er jafngilt

$$p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2$$

Þetta hefur augljóslega enga lausn fyrir frumtölu p.

Gerum þá ráð fyrir að p gangi upp í $n+1$ og skrifum $n+1=pk$ fyrir jákvæða heiltölu k. Þá er $n-1=pk-2$ og við höfum $p(1+p+p^2)=pk(pk-2)=p(pk^2-2k)$ sem gefur $1+p+p^2=pk^2-2k$. Ef við skoðum þess jöfnu mod p fæst $-1\equiv 2k \pmod p$ sem hefur lausnina $k\equiv\frac{p-1}{2} \pmod p$. Þar sem $k<p$ gildir $k=\frac{p-1}{2}$. Við höfum því

$$1+p+p^2=pk^2-2k=p\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-2\left(\frac{p-1}{2}\right)=p\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-p+1$$

sem er jafngilt

$$p+2=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

svo

$$4p+8=p^2-2p+1$$

sem gefur

$$0=p^2-6p-7=(p-7)(p+1)$$

Sem hefur frumtölulausn $p=7$.

Eini frumtalan sem uppfyllir skilyrðið er því $p=7$ og þá er

$$1+7+7^2+7^3=400=20^2.$$

Aðferð 2 Við höfum þegar sýnt að $p=2$ er ekki lausn svo gerum ráð fyrir að p sé oddatala. Einnig þáttast $1+p+p^2+p^3=(1+p)(1+p^2)$. Ef $1+p$ og $1+p^2$ hafa samdeili d. Þá gengur d upp í allar línulegar samantektir af $1+p$ og $1+p^2$. Sér í lagi gengur d upp í

$1(p^2+1)-(p-1)(p+1)=p^2+1-(p^2-1)=2$. Stærsti samdeilir $1+p$ og $1+p^2$ er því 2. Við getum því skrifar $p+1=2m$ og $p^2+1=2n$ þar sem m og n eru ósamþáta. Einnig er $(1+p)(1+p^2)=4mn$ fernings tala. Þar sem 4 er ferningstala og m og n eru ósamþáta þá hljóta bæði m og n að vera ferningstölur. Skrifum $p+1=2m=2a^2$ og $p^2+1=2n=2b^2$ fyrir einhverjar jákvæðar heiltölur a og b.

Athugum núna jöfnuna $p(p-1)=p^2+1-(p+1)=2b^2-2a^2=2(a+b)(b-a)$. Í fyrsta lagi gildi $2a^2=p+1<p^2+1=2b^2$ svo $a<b$. Einnig gildir $2p^2>p^2+1=2b^2$ svo $p>b$ og þar með $a<b<p$. Fyrst $p(p-1)=2(a+b)(b-a)$ gengur p upp í einhverja talnanna $2, b-a$ eða $a+b$. En $p>2$ og $b-a<a<p$ svo p hlýtur að ganga upp í $a+b$. Einnig er $a+b<2b<2p$ svo eini möguleikinn er að $a+b=p$. Þá er $p-1=2(b-a)$ eða $\frac{p-1}{2}=b-a$. Ef við drögum nú seinni jöfnuna frá þeirri fyrri fæst

$$2a=a+b-(b-a)=p-\frac{p-1}{2}=\frac{p+1}{2}$$

en $p+1=2a^2$ svo

$$2a=\frac{p+1}{2}=\frac{2a^2}{2}=a^2$$

Þar með er $a=2$ sem gefur $p=7$.

Eina lausnin er því $p=7$ sem er lausn samanber aðferð 1.