Félag raungreinakennara — Laugardagur, 3. mars 2012
Íslenska stærðfræðafélagið — 10:00 – 14:00

# Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2011–2012
# Lausnir á dæmum í úrslitakeppni

**Dæmi 1**

Finnið öll pör af rauntölum $p$ og $r$ sem leysa jöfnurnar:

$$p + pr + pr^2 = 28$$
$$p^2r + p^2r^2 + p^2r^3 = 224$$

**Lausn:** Þáttum báðar jöfnurnar

$$p(1 + r + r^2) = 28$$
$$p^2r(1 + r + r^2) = 224$$

og þá sést með því að deila þeirri fyrri í þá seinni að $pr = 224/28 = 8$. Nú margföldum við fyrri jöfnuna með $r$ og fáum

$$pr(1 + r + r^2) = 28r \quad \Leftrightarrow \quad 8(1 + r + r^2) = 28r$$

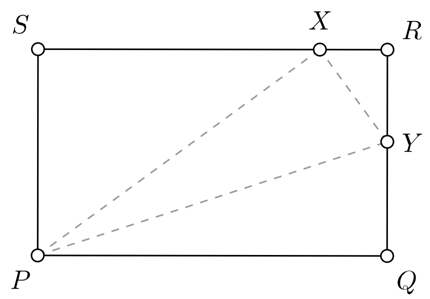
svo að

$$0 = 8r^2 - 20r + 8 = 4(2r^2 - 5r + 2) = 4(2r - 1)(r - 2)$$

og því $r = 1/2$ eða $r = 2$. Það eru því tvær lausnir: $p = 16$, $r = 1/2$ og $p = 4$, $r = 2$.

**Dæmi 2**

Rétthyrningurinn $PQRS$ táknar A4-blað, það er $PQ : PS = \sqrt{2} : 1$ . Rétthyrningurinn (blaðið) er brotinn þannig að hornið $Q$ leggst í punktinn $X$ á hliðinni $SR$ og brotalínan $PY$ liggur um punktinn $P$. Lengd hliðarinnar $PS$ er 1. Finnið hliðarlengdir þríhyrningsins $RXY$.




**Lausn A:** Þar sem $PS = 1$ þá er $PQ = \sqrt{2}$. Rétthyrndi þríhyrningurinn $PSX$ hefur skammhlið $PS = 1$ og langhlið $PX = PQ = \sqrt{2}$. Því verður skammhliðin $SX$ að vera af lengd 1. Þríhyrningurinn $PSX$ er því jafnarma, með tvö 45° horn. Þar sem hornið $PXY$ er rétt horn þá er þríhyrningurinn $RXY$ einnig jafnarma með skammhliðar $YR = XR = \sqrt{2} - 1$ og langhlið $XY = \sqrt{2} \cdot XR = 2 - \sqrt{2}$.

**Lausn B:** Þar sem $PS = 1$ þá er $PQ = \sqrt{2}$. Ef við táknum $SX = y$ og $RY = x$ þá er $XY = YQ = 1 - x$ og $XR = \sqrt{2} - y$. Í rétthyrnda þríhyrningnum $PSX$ er langhliðin $PX = PQ = \sqrt{2}$ og því gildir jafnan

$$1^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2.$$

Því er $y = 1$ og þar með er $XR = \sqrt{2} - 1$. Í rétthyrnda þríhyrningnum $RXY$ gildir jafnan

$$(\sqrt{2} - 1)^2 + x^2 = (1 - x)^2$$

Ef margfaldað er upp úr svigum fæst

$$3 - 2\sqrt{2} + x^2 = 1 - 2x + x^2$$

og því er $x = \sqrt{2} - 1$ og $XY = 1 - x = 2 - \sqrt{2}$.

**Lausn C:** Þar sem $PS = 1$ þá er $PQ = \sqrt{2}$. Þar sem þríhyrningarnir $PQY$ og $PXY$ eru jafnir þá gildir eftirfarandi:

$$\begin{aligned}
\angle SXP &= \angle XPQ \\
&= 2\angle YPQ = 2(90^\circ - \angle PYQ) \\
&= 180^\circ - 2\angle PYQ \\
&= 180^\circ - (\angle PYQ + \angle PYX) \\
&= \angle XYR
\end{aligned}$$

Þríhyrningarnir $XRY$ og $XSP$ eru því einslaga. Köllum $RY = x$. Þá er $XY = YQ = 1 - x$. Nú er $PX = PQ = \sqrt{2}$ og því fæst:

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{1 - x}{x}$$

svo $\sqrt{2}x = 1 - x$ og því $x = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$. Þá er $XY = 1 - x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$. Loks fæst

$$XR = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

### Dæmi 3

Sannið að fyrir sérhverjar fimm heiltölur sé alltaf hægt að finna tvær þeirra, sem eru annað hvort þannig að summa þeirra eða mismunur sé deilanlegur með 7.

**Lausn:** Skoðum leifaflokka þegar deilt er með 7 í heiltölurnar. Leifarnar geta þá verið á bilinu frá 0 til 6, þ.e.a.s. skrifa má sérhverja heiltölu $n$ sem $n = 7q + r$ þar sem $q$ er heiltala og $r$ er ein af tölunum $0, 1, \ldots, 6$. Ef tvær af tölunum fimm lenda í sama leifaflokki (hafa sömu leif $r$) þá er mismunur þeirra deilanlegur með 7. Ef hins vegar engar þeirra eru í sama leifaflokki þá skoðum við eftirfarandi fjórar grúppur af leifaflokkum

(a) 1 og 6 (b) 2 og 5 (c) 3 og 4 (d) 0

en samkvæmt skúffureglunni verða einhverjar tvær af tölunum fimm að lenda í sömu grúppu og þá er summa þeirra tveggja deilanleg með 7. (T.d. ef þær eru í grúppu (b) þá er önnur af gerðinni $7q_1 + 5$ en hin $7q_2 + 2$, svo summan er $7q_1 + 7q_2 + 7$.)

**Dæmi 4**

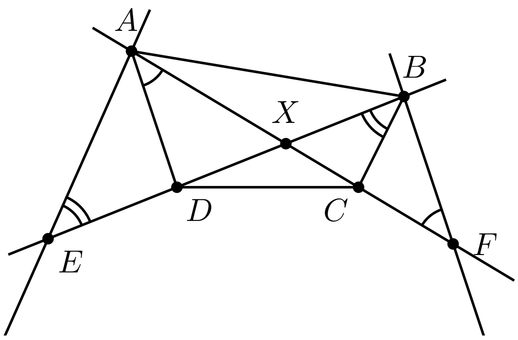
Finnið allar jákvæðar heiltölur $m$ og $n$ þannig að $m$ gengur upp í $2n-1$ og $n$ gengur upp í $2m-1$.

**Lausn A:** Þar sem $m$ gengur upp í $2n-1$ og $n$ gengur upp í $2m-1$ eru til jákvæðar heiltölur $i$ og $j$ þannig að $im = 2n-1$ og $jn = 2m-1$. Ef við leysum fyrri jöfnuna fyrir $n$ og stingum inn í seinni fæst $ijm < ijm+j = 4m-2 < 4m$ svo $ij < 4$. Ljóst er að annað hvort $i$ eða $j$ þarf að vera 1 og hin er minni en 4. Vegna samhverfu megum við gera ráð fyrir að $j = 1$. Þá gefur $ijm + j = 4m - 2$ lausnirnar $(n, m) = (1, 1)$ og $(n, m) = (5, 3)$ fyrir $i = 1$ og $i = 3$ en $i = 2$ gefur enga lausn. Allar lausnir á $(n, m)$ sem uppfylla skilyrðin eru því $(1, 1), (3, 5), (5, 3)$.

**Lausn B:** Athugum fyrst að $m$ og $n$ verða að vera oddatölur, því sléttar tölur geta ekki gengið upp í oddatölurnar $2n-1$ og $2m-1$. Margfeldið $mn$ gengur upp í margfeldið $(2n-1)(2m-1) = 4mn - 2n - 2m + 1$ og þar með gengur $mn$ upp í $2n + 2m - 1$. Þar sem $m$ og $n$ eru jákvæðar, þá leiðir af þessu að $mn \leq 2n + 2m - 1$, sem jafngildir $mn - 2n - 2m + 4 \leq 3$, það er $(m-2)(n-2) \leq 3$. Ef $m = 1$ þá gengur $n$ upp í $2 \cdot 1 - 1 = 1$, svo að $n = 1$. Þetta gefur eina lausn $m = n = 1$. Annars þurfa bæði $m$ og $n$ að vera $\geq 3$ og þá líka $\leq 5$. Ef $m = 3$ þá gengur $n$ upp í $2 \cdot 3 - 1 = 5$ svo $n = 5$, en ef $m = 5$ þá gengur $n$ upp í $2 \cdot 5 - 1 = 9$ svo $n = 3$. Fáum því þrjú pör $(m, n)$ sem uppfylla skilyrði dæmisins: $(1, 1)$, $(3, 5)$ og $(5, 3)$.

**Dæmi 5**

Í ferhyrningi $ABCD$ eru hornin $\angle ADC$ og $\angle BCD$ stærri en $90°$, $F$ er skurðpunktur línunnar $AC$ og línu gegnum $B$ samsíða $AD$ og $E$ er skurðpunktur línunnar $BD$ og línu gegnum $A$ samsíða $BC$. Sannið að $EF$ er samsíða $CD$.




**Lausn:** Látum $X$ vera skurðpunkt línanna $AC$ og $BD$. Þar sem línurnar $AE$ og $BC$ eru samsíða þá er $\angle AEX = \angle CBX$. Þríhyrningarnir $AEX$ og $CBX$ eru því einslaga. Á sama hátt sést að $\angle DAX = \angle BFX$ svo þríhyrningarnir $DAX$ og $BFX$ eru einnig einslaga.

Af þessu leiðir að eftirfarandi jöfnur hlutfalla gilda:

$$\frac{XE}{XB} = \frac{XA}{XC} \quad \text{og} \quad \frac{XD}{XB} = \frac{XA}{XF}$$

Ef fyrri jöfnunni er deilt í þá síðari fæst:

$$\frac{XD}{XE} = \frac{XC}{XF}$$

Þríhyrningarnir $DXC$ og $EXF$ eru þá einslaga og því er $DC$ samsíða $EF$.

**Dæmi 6**

100 lampar mynda ferning sem er 10 lampar á breidd og 10 lampar á hæð. Á sérhverjum lampa er hnappur. Ef ýtt er á hnappinn á einhverjum lampa breyta allir lampar í sama dálki og allir lampar í sömu línu auk lampans sjálfs um ástand, þ.e. það kviknar á þeim sem slökkt var á og það slökknar á þeim sem kveikt var á. (Lampar sem hvorki eru í sömu línu né sama dálki haldast óbreyttir á meðan.)

Fyrir hvaða upphafstöður er hægt að kveikja á öllum lömpunum? M.ö.o. á hvaða lömpum má vera kveikt og slökkt á í upphafi, svo að hægt sé með því að ýta á rofana að enda með ljós á öllum lömpunum?

**Lausn:** Fyrir hnapp á ákveðnum lampa $L$ athugum við hvað gerist ef við ýtum á hnappana á öllum lömpunum sem breyta um ástand þegar ýtt er á hnappinn á $L$, þ.e. við ýtum við á hnappan á öllum lömpunum sem mynda kross í gegnum $L$.

- Lampar sem eru ekki krossinum breyta nákvæmlega tvisvar um ástand því þeir koma fyrir fyrir einum dálki sem breytist og einni línu sem breytist. Þeir enda því í sama ástandi og þeir byrjuðu í.
- Lamparnir í krossinum fyrir utan $L$ breyta nákvæmlega tíu sinnum um ástand þegar ýtt er á takkana í línunni eða dálkinum sem þeir eru í. Þeir enda því í sama ástandi og þeir byrjuðu í.
- Lampinn $L$ breytir nákvæmlega nítján sinnum um ástand: Níu sinnum þegar ýtt er á hnappa lampanna í sama dálki, níu sinnum þegar ýtt er á hnappa lampanna í sömu línu og einu sinni þegar ýtt er á hnappinn á $L$. Hann endar því breyttu ástandi frá því sem hann byrjaði í.

Þessi aðgerð breytir því bara ástandinu á $L$ en allir aðrir lampar enda í sama ástandi og fyrir aðgerðina. Þar með er ljóst að ef við endurtökum þessa aðgerð fyrir alla lampa sem slökkt er á er hægt að enda með alla lampana kveikta hvernig sem upphafstaðan er.

**Ath:** Með þessari aðferð er hugsanlega oft verið að ýta á sama hnappinn og þetta er ekki fljótvirk leið. En um það er ekki spurt, heldur bara hvort það sé yfirhöfuð hægt að kveikja á öllum lömpunum. Áhugasamir geta reynt að finna fljótvirkustu leiðina, en minnsti fjöldi skrefa er auðvitað háður upphafsstöðunni.

Í þessari lokakeppni tóku þátt 25 nemendur úr fimm framhaldsskólum. Meðalstigafjöldi fyrir hvert dæmi var eins og eftirfarandi tafla sýnir:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | alls |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,16 | 8,88 | 6,04 | 4,48 | 2,16 | 0,64 | 30,36 |