Félag raungreinakennara
Íslenska stærðfræðafélagið

Laugardagur, 5. mars 2016
kl. 10:00–14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2015–2016
Úrslitakeppni

Athugið: Notið aðskilin blöð eða arkir fyrir hvert dæmi. Þetta skiptir máli við yfirferð.

Dæmi 1
Sýnið að margfeldi tveggja aðliggjandi talna í rununni $t_n = n(n+1)$ með $n \in \mathbb{N}$ gefi útkomu sem einnig tilheyrir rununni.

Dæmi 2
Þríhyrningur ABC er innritaður í hring með radíus R. Sýnið að

$$|AB| \cdot |AC| = 2R \cdot h_{BC}$$

þar sem h_{BC} er hæð þríhyrningsins á hliðina BC.

Dæmi 3
Á fremsta bekk í bíósal eru 10 sæti fullskipuð. Allir fara fram í hléi og eftir hlé gildir að annað hvort sest fólk í sitt fyrra sæti eða í sæti við hlið síns fyrra sætis. Á hve marga vegu getur fólkið á fremsta bekk sest í sæti eftir hlé?

Dæmi 4
Sýnið að til séu óendanlega margar þrenndir náttúrlegra talna (a, b, c) þannig að

$$a^2 + b^2 + 1 = c^2.$$

Dæmi 5
Finnið stærsta gildið á $\frac{x}{y}$ ef jafnan

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$$

gildir um rauntalnaparið (x, y).

Dæmi 6
Gutti velur jákvæðar heiltölur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ með $n > 1$ og heldur þeim leyndum. Jörmunrekur vill komast að gildi þeirra. Gutti leyfir Jörmunreki að velja einhverjar n jákvæðar heiltölur $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eins oft og hann vill og segir Gutti honum þá útkomu summunnar $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ í hvert skipti. Hversu oft þarf Jörmunrekur að velja nýjar tölur að minnsta kosti til þess að takast ætlunarverk sitt um að ákvarða tölurnar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ burtséð frá því hvaða tölur Gutti valdi?

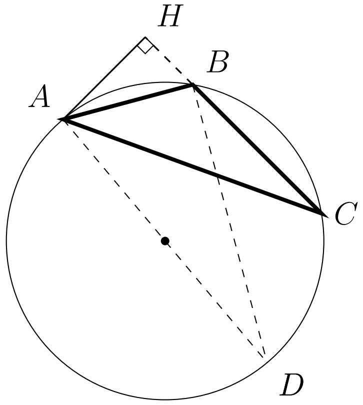
Lausn 1

Tölurnar $k(k+1)$ og $(k+1)(k+2)$ með $k \in \mathbb{N}$ eru samliggjandi í rununni. Margfeldi þeirra er

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+1)(k+2) &= k(k+2)(k+1)(k+1) \\ &= (k^2+2k)(k^2+2k+1) \\ &= m(m+1) \end{aligned}$$

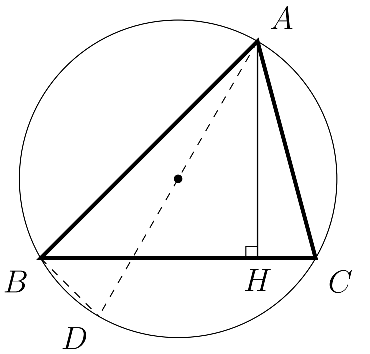
þar sem $m = k^2 + 2k$ er náttúrleg tala og því fæst að margfeldi samliggjandi talna í runnunni tilheyrir henni sjálfri.

Lausn 2



Táknum hæð þríhyrningsins ABC á hliðina BC með AH. Þríhyrningurinn AHC er þá rétthyrndur þríhyrningur.

Teiknum miðstreng AD. Þríhyrningurinn ABD er þá rétthyrndur og ferilhornin $\angle ADB$ og $\angle ACH$ eru jöfn þar sem þau spanna sama boga. Þríhyrningarnir ABD og AHC eru því einslaga.



Þá fæst

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \quad \text{svo} \quad AB \cdot AC = AH \cdot AD$$

Með öðrum orðum $AB \cdot AC = 2hR$.

Einnig má leysa þetta dæmi með því að nota reglu um flatarmál þríhyrnings:

$$F = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AB| \cdot \sin(A) = \frac{1}{2}h_{BC} \cdot |BC|$$

sem gefur að

$$|AC| \cdot |AB| = \frac{h_{BC}|BC|}{\sin(A)}. \qquad (*)$$

Athugum því næst að $\frac{|BC|}{2} = R\sin(A)$ og þá $|BC| = 2R\sin(A)$ og með því að setja það inn í $(*)$ fæst niðurstaðan

$$AB \cdot AC = 2R \cdot h_{BC}.$$

Lausn 3

Ef einhver skiptir um sæti eftir hlé þá lítum við á sætin við hlið sætanna tveggja sem hann sat í fyrir og eftir hlé. Þá er ljóst að sá sem sat öðru megin við sætin tvö getur ekki sest í sætin hinu megin þeirra og öfugt. Þar sem fjöldi þeirra sem sitja á hvora hlið þess sem færir sig breytist um einn (fjölgar um einn þeim megin sem sætið losnar og fækkar um einn þeim megin sem sæti er tekið) þá verður sá sem missti sitt sæti að setjast í það sæti sem losnaði við flutninginn.

Látum nú f_n tákna fjölda möguleika fyrir n menn til að setjast í n samliggjandi sæti þannig að annað hvort skipti tveir hvor við annan um sæti fyrir og eftir hlé eða menn setjast aftur í sitt sæti.

Lítum á endasæti. Ef sá sem þar sat sest aftur í sætið sitt þá þurfum við að telja á hve marga vegu má koma hinum $n-1$ mönnunum í $n-1$ samliggjandi sæti sem eru eftir og það eru f_{n-1} möguleikar á því. Ef aftur á móti hann skiptir um sæti við næsta mann þá þurfum við að telja á hve marga vegu má koma hinum $n-2$ mönnunum í $n-2$ samliggjandi sæti sem eftir eru og það eru f_{n-2} leiðir til þess. Við fáum sem sagt rakninguna $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Það er bara ein leið til að koma einum manni í eitt sæti svo $f_1 = 1$ en aftur á móti eru tvær leiðir til að koma tveimur í tvö sæti (annað hvort skipta þeir um sæti eða sitja áfram í sínum sætum) svo $f_2 = 2$. Rakningin gefur þá

$$\begin{aligned}
f_3 &= f_2 + f_1 = 2 + 1 = 3, & f_7 &= f_6 + f_5 = 13 + 8 = 21,\\
f_4 &= f_3 + f_2 = 3 + 2 = 5, & f_8 &= f_7 + f_6 = 21 + 13 = 34,\\
f_5 &= f_4 + f_3 = 5 + 3 = 8, & f_9 &= f_8 + f_7 = 34 + 21 = 55,\\
f_6 &= f_5 + f_4 = 8 + 5 = 13, & f_{10} &= f_9 + f_8 = 55 + 35 = 89.
\end{aligned}$$

Það er því hægt að koma 10 mönnum á 89 vegu í aftur í sætin þannig sérhver setjist annað hvort í sitt sæti eða næsta sæti við það.

Einnig er hægt að telja fjölda möguleika þegar engir skipta um sæti, eitt par skiptir um sæti, tvö, þrjú, fjögur og fimm pör skipta um sæti og leggja svo allt saman. Hvert par myndar sætablokk úr tveimur sætum sem líta má á sem eitt *stórt* sæti og sætunum fækkar þá sem svarar fjölda para. Dæmið hefur þá verið umritað yfir í að velja staði fyrir stóru sætin. Möguleikarnir verða því fyrir ekkert par $\binom{10}{0} = 1$, eitt par $\binom{9}{1} = 9$, tvö pör $\binom{8}{2} = 28$, þrjú pör $\binom{7}{3} = 35$, fjögur pör $\binom{6}{4} = 15$ og fimm pör $\binom{5}{5} = 1$. Samtals verða því $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$ möguleikar.

Lausn 4

Sem dæmi um lausn á jöfnunni má nefna $18^2 + 6^2 + 1 = 19^2$ og $22^2 + 46^2 + 1 = 51^2$. Skiptum í þrjú tilvik:

1. a og b eru báðar oddatölur. Þá er summan í vinstri hlið jöfnunnar samleifa 3 mátað við 4. Þar sem hægri hliðin er ferningsstærð þá gengur það ekki upp.

2. a og b eru önnur oddatala og hin slétt tala. Þá er summan í vinstri hlið jöfnunnar samleifa 2 mátað við 4. Þar sem hægri hliðin er ferningsstærð þá gengur það ekki upp.

3. a og b eru báðar sléttar tölur. Þá verður c að vera oddatala til að jafnan gangi upp. Setjum $a = 2n, b = 2m$ og $c = 2k + 1$ með $n, m, k \in \mathbb{N}$ og fáum:

$$\begin{aligned}
(2n)^2 + (2m)^2 + 1 &= (2k + 1)^2\\
4(n^2 + m^2) + 1 &= 4(k^2 + k) + 1
\end{aligned}$$

svo að $n^2 + m^2 = k^2 + k$. Þetta getur ávallt staðist ef k er ferningstala; $k = d^2$ og $k^2 = d^4$ með $d \in \mathbb{N}$ og þá er

$$(2d^2)^2 + (2d)^2 + 1 = (2d^2 + 1)^2$$

Velja má hvaða $d \in \mathbb{N}$ sem er og því eru lausnirnar óteljandi margar.

Lausn 5

Gerum okkur grein fyrir eftirfarandi:

- Jafnan $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ lýsir hring með miðju $(3,3)$ og radíus $\sqrt{6} < 3$; hring sem liggur alfarið í fyrsta fjórðungi hnitakerfisins.
- Ef punktur (x,y) er á þessum hring og hlutfallið x/y er táknað með k þá liggur (x,y) einnig á línunni $y = (1/k)x$.

Spurningin verður nú:

> Hver er minnsti halli línu $y = mx$ sem sker hringinn $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$?

Lausnaleið 1 Svarið er nokkuð augljóslega halli þeirrar línu sem er snertill við hringinn; sú lína $y = mx$ sem er þannig að hún hefur aðeins einn punkt sameiginlegan með hringnum; sú lína $y = mx$ sem er þannig að jafnan

$$(x-3)^2 + (mx-3)^2 = 6$$

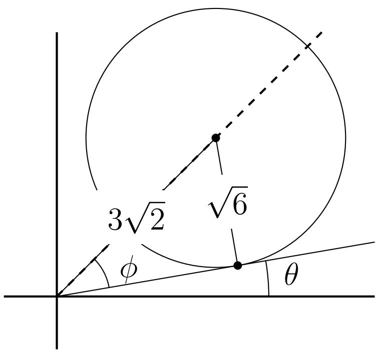
hefur **aðgreini** ($b^2 - 4ac$) núll. Sú lína sem er þannig að

$$(1+m^2)x^2 - 6(1+m)x + 12 = 0$$

hefur stærðina $36(1+m)^2 - 4 \cdot (1+m^2) \cdot 12 = 0$, þ.e. $3(1+m)^2 - 4(1+m^2) = 0$ svo $m^2 - 6m + 1 = 0$. Þá er $m = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Minnsti hallinn er því $m = 3 - 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{k}$ og því er $k = \dfrac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$.

Lausnaleið 2 Notum að hallatala línu er $m = \tan\theta$ þar sem θ er hornið sem línan myndar við lárétta línu:



Rétthyrndur þríhyrningur hefur þekktar hliðar $3\sqrt{2}$ og $\sqrt{6}$. Þriðja hlið reiknast $\sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}$. Hallatala snertils er

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(45^\circ - \phi) \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan\phi}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan\phi} \\ &= \frac{1 - \sqrt{6}/2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{6}/2\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Þá er stærsta gildi kvótans x/y jafnt $1/(3 - 2\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$.

Lausn 6
Til að leysa þetta notum við eftirfarandi hjálparsetningu sem liggur tugakerfinu til grundvallar.

Hjálparsetning. *Látum N og k vera jákvæðar heiltölur. Þá er hægt á nákvæmlega einn hátt að skrifa $N = c_0k^0 + c_1k^1 + c_2k^2 + \cdots$ þannig að $0 \le c_i < k$ fyrir $i \in \mathbf{N}$.*

Sönnun: Skilgreinum $S_0 = N$ og $S_i = \dfrac{N - (c_0k^0 + c_1k^1 + \cdots + c_{i-1}k^{i-1})}{k^i}$, fyrir $i \ge 1$.
Þá er

$$S_i = c_ik^0 + c_{i+1}k^1 + c_{i+2}k^2 + \cdots$$

og afgangurinn þegar k er deilt í S_i er c_i. Ljóst er að það er til nákvæmlega einn slíkur afgangur c_i fyrir hvert S_i og þar með eru $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ótvírætt ákvörðuð. Enn fremur er alltaf hægt að ákvarða S_i og þar með c_i þegar öll c_k eru þekkt fyrir $k < i$. $\square$

Ef vitað er að $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eru allar minni en k þá getur Jörmunrekur valið tölurnar $a_i = k^{i-1}$ og Gutti reiknar og segir honum töluna

$$N = x_1k^0 + x_2k^1 + x_3k^2 + \cdots + x_nk^{n-1}$$

þar sem $0 \le x_i < k$. Þá getur Jörmunrekur reiknað allar tölurnar x_i eins og í sönnuninni á hjálparsetningunni og þau eru ótvírætt ákvörðuð. Nú þurfum við bara finna k nógu stórt til þess að $x_1, x_2, \ldots, x_n$ séu allar minni en k. Ef Jörmunrekur velur tölurnar $a_i = 1$ fyrir $1 \le i \le n$ og Gutti svarar k þá er ljóst að $x_i < k$ fyrir $1 \le i \le n$. Jörmunrekur þarf því ekki fleiri en tvær tilraunir til að komast að því hverjar tölurnar eru.

Sýnum nú að það er ekki hægt að komast að tölunum í einni ágiskun. Ef Jörmunrekur lætur $a_1 = j$ og $a_2 = k$ í sinni fyrstu ágiskun þá hvort sem Gutti valdi $x_1 = 2k$ og $x_2 = j$ eða $x_1 = k$ og $x_2 = 2j$ verður $a_1x_1 + a_2x_2 = 3jk$ og því ekki hægt að ákvarða x_1 og x_2 í öllum tilfellum.

Jörmunrekur þarf því í mesta lagi tvær ágiskanir til að komast að því hverjar tölurnar eru eða með öðrum orðum:

Jörmunrekur velur fyrst ása til að margfalda tölurnar með. Því næst velur hann tölu k sem er stærri en útkoman sem Gutti segir honum og margfaldar fyrstu töluna með k^0, aðra með k, þriðju með k^2 og svo framvegis. Loks skoðar hann útkomuna í talnakerfi tölunnar sem hann valdi og getur þá lesið tölurnar sem Gutti valdi hverja í sínu sæti.