Félag raungreinakennara
Íslenska stærðfræðafélagið

Keppni sem haldin var laugardaginn, 2. mars 2019
kl. 10:00–14:00

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2018-2019
Úrslitakeppni - Lausnir

Dæmi 1

Finnið allar jákvæðar heilar tölur x og y þannig að $\sqrt{xy+2019} = \sqrt{x} + \sqrt{2019}$.

Lausn

Hefjum báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi og einföldum:

$$\begin{aligned} xy + 2019 &= x + \sqrt{2019x} + 2019 \\ xy &= x + \sqrt{2019x} \end{aligned}$$

Einangrum rótina og hefjum aftur í annað veldi:

$$\begin{aligned} xy &= x + \sqrt{2019x} \\ x(y-1) &= 2\sqrt{2019x} \\ x^2(y-1)^2 &= 4 \cdot 2019x \end{aligned}$$

Þar sem x er ekki núll er óhætt að stytta og fá

$$x(y-1)^2 = 4 \cdot 2019$$

Ef hægri hliðin er frumþáttuð fæst $4 \cdot 2019 = 2^2 \cdot 3 \cdot 673$ (höfum að $29^2 > 673$, engin frumtala minni en 29 gengur upp í 673 og hún því frumtala). Einu ferningstölurnar sem eru þættir í tölunni eru 1 og 4 svo ferningstalan $(y-1)^2$ er 1 eða 4. Ef $y - 1 = 1$ fæst $y = 2$ og þá $x = 8076$ en fyrir $y - 1 = 2$ fæst $y = 3$ og þá $x = 2019$. Við höfum þá fundið allar (báðar) jákvæðar heiltölulausnir jöfnunnar, $(x, y) = (2019, 3)$ og $(x, y) = (8076, 2)$.

Dæmi 2

Ef n er jákvæð heiltala þá táknar $s(n)$ heiltöluna sem fæst með því að snúa við röð tölustafanna sem mynda n. Til dæmis er $s(2019) = 9102$. Hve margar jákvæðar tveggja stafa heiltölur n eru þannig að $n + s(n)$ er ferningstala?

Látum n vera jákvæða tveggja stafa heiltölu n með tölustöfum a og b sem þýðir að $n = 10a+b$. Þá er $s(n) = 10b + a$ og við fáum $n + s(n) = 11a + 11b = 11(a + b)$. Til þess að $11(a + b)$ sé ferningstala þarf frumtalan 11 að vera þáttur í $a + b$. Þar sem a og b eru tölustafir gildir að $a + b \leq 18$. Augljóslega er $a + b$ ekki núll svo eini möguleikinn er $a + b = 11$. Fáum þá að n getur verið $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ eða 92 og því alls átta möguleikar fyrir töluna n.

Dæmi 3

Þríhyrningur ABC hefur hliðarlengdir 7, 8 og 9. Lína, sem inniheldur miðju innritaðs hrings og liggur samsíða skemmstu hlið þríhyrningsins, sker hinar tvær hliðar þríhyrningsins í punktum D og E. Hver er lengd striksins DE?

Lausn I

Gerum ráð fyrir að BC sé stysta hlið þríhyrningsins ABC, punkturinn D sé á hliðinni AB og punkturinn E á hliðinni AC. Miðja innritaðs hrings M liggur á skurðpunkti helmingalína þríhyrningsins og við táknum geisla (radíus) innritaða hringsins með r. Þar sem $BC \parallel DE$ gildir að $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (þríhyrningarnir eru einslaga).
Táknum hæð á stystu hlið þríhyrningsins BC með h. Hlutföll milli hliða þríhyrninganna eru jöfn hlutfallinu milli hæða þeirra:

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{h-r}{h} = 1 - \frac{r}{h}$$

Þá er $\frac{|DE|}{7} = \left(1 - \frac{r}{h}\right)$ og því $|DE| = 7\left(1 - \frac{r}{h}\right)$. Til að finna hlutfallið $\frac{r}{h}$ nýtum við þekktar jöfnur sem gilda um flatarmál þríhyrningsins ABC

$$F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = s \cdot r$$

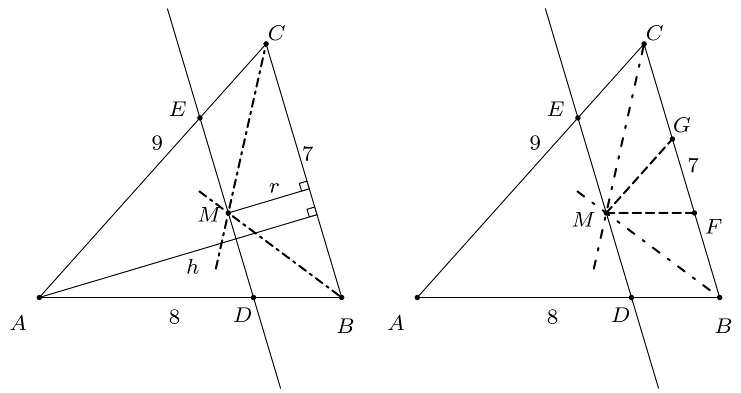
Þar sem g táknar grunnlínu, h táknar hæð á grunnlínu, s táknar hálft ummál þríhyrningsins og r táknar geisla (radíus) innhringsins. Fáum þá að

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot h = \frac{1}{2}(7+8+9) \cdot r$$

og því

$$\frac{r}{h} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 24} = \frac{7}{24}$$

En þar með fæst að $|DE| = 7\left(1 - \frac{7}{24}\right) = 7 \cdot \frac{17}{24} = \frac{119}{24}$



Lausn II

Miðja innritaðs hrings M liggur á skurðpunkti helmingalína þríhyrningsins. Þar sem $BC \parallel DE$ gildir að $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Lína gegnum M samsíða AB sker BC í F og lína gegnum M samsíða AC sker BC í G. Þar sem MB er helmingalína hornsins $\angle ABC$ og jafnframt hornalína samsíðungsins $BFMD$ þá er $BFMD$ tigull. Eins gildir þar sem MC er helmingalína hornsins $\angle ACB$ og hornalína samsíðungsins $CEMG$ að $CEMG$ er tigull. Getum því reiknað ummál þríhyrningsins $\triangle ADE$ sem $|AD| + |DM| + |ME| + |EA| = |AD| + |DB| + |CE| + |EA| = |AB| + |CA| = 8 + 9 = 17$ og ummál $\triangle ABC$ er $7 + 8 + 9 = 24$. Hlutfall milli ummála þríhyrninganna er jafnt hlutfalli milli hliða þríhyrninganna svo hér fæst

$$\frac{|DE|}{7} = \frac{17}{24} \Leftrightarrow |DE| = \frac{119}{24}$$

Dæmi 4

Meðal 25 hesta viljum við finna þrjá þá fljótustu. Við höfum enga klukku en hlaupabraut þar sem við getum látið fimm hesta hlaupa í einu og séð í hvaða röð þeir koma í mark. Gerum ráð fyrir að sérhver hestur hlaupi á föstum hraða og að allir séu þeir misfljótir. Sýnið að hægt er að finna þrjá fljótustu hestana og innbyrðis röð þeirra í sjö hlaupum.

Lausn

Skiptum hestunum í fimm hópa og látum alla hópana hlaupa. Því næst notum við sjötta hlaupið til að láta sigurvegara hvers hóps hlaupa saman. Röðum nú hestunum í töflu og merkjum hvern hest í töflunni með a_{ij} þar sem i er númer línu og j er númer dálks í töflunni. Hestarnir sem tóku þátt í sjötta hlaupinu raðast í efstu línu töflunnar þannig að sá hestur sem lenti í fyrsta sæti í sjötta hlaupinu er merktur a_{11}, sá sem lenti í öðru sæti er a_{12} og svo framvegis, þannig að sá sem lenti í fimmta sæti í sjötta hlaupinu er merktur a_{15}. Ennfremur raðast þeir hestar sem hlupu með hestinum í efstu línu í dálkinn fyrir neðan tilsvarandi hest í þeirri röð sem þeir komu í mark. Til dæmis er hestur a_{35} sá sem lenti í fimmta sæti í fyrsta hlaupi hests a_{13}, hestsins sem lenti í þriðja sæti í sjötta hlaupinu.

$$\begin{array}{|ccccc|cccc|}
\hline
a_{11} & > & \mathbf{a_{12}} & > & \mathbf{a_{13}} & > & a_{14} & > & a_{15} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\mathbf{a_{21}} & & \mathbf{a_{22}} & & a_{23} & & a_{24} & & a_{25} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\mathbf{a_{31}} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & a_{35} \\
\hline
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & a_{45} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
a_{51} & & a_{52} & & a_{53} & & a_{54} & & a_{55} \\
\hline
\end{array}$$

Þá er ljóst að hestur a_{11} er sá allra fljótasti. Enn fremur er ljóst að enginn hestur úr dálki fjögur og fimm kemur til greina því þeir hlaupa hægar en sigurvegari síns hóps og það eru að minnsta kosti þrír hestar sem hlaupa hraðar en hann. Að auki er kemur enginn hestur í línu fögur og fimm til greina því það eru þrír hestar sem hlaupa hraðar í þeirra hópum. Hestar a_{23} og a_{33} hlaupa hægar en a_{11}, a_{12} og a_{13} og koma því ekki til greina og hestur a_{32} kemur ekki til greina af því hann hleypur hægar en a_{11}, a_{12} og a_{22}. Það eru því bara fimm hestar sem koma til greina í annað og þriðja sæti og það eru a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22} og a_{31}. Við getum ákvarðað hver annar og þriðji fjótasti hesturinn eru með því að láta þá alla hlaupa í sjöunda hlaupinu.

Dæmi 5

Finnið öll föll $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ þannig að $f(1) = 2$ og $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}$.

Lausn

Setjum $y = 1$. Þá fæst fyrir öll $x \in \mathbb{Q}$

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x+1) + 1$$

$$\text{svo} \qquad f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1$$

$$\text{og þá} \qquad f(x+1) = f(x) + 1$$

Af $f(x+1) = f(x) + 1$ fæst með þrepun að

$$f(x+n) = f(x) + n \text{ fyrir öll } n \in \mathbb{N}$$

og $f(x) = f(x-n+n) = f(x-n) + n$ svo að $f(x-n) = f(x) - n$ og þar með er ljóst að

$$f(x+n) = f(x) + n \text{ fyrir öll } n \in \mathbb{Z}$$

Sér í lagi fæst að $f(n) = f(0) + n = n + 1$ fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$.
Ef við setjum $x = \frac{m}{n}, y = n$ fyrir einhver $m, n \in \mathbb{Z}$ og $n \neq 0$ í jöfnuna sem var gefin fæst

$$
\begin{aligned}
& & f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) f(n) - f\left(\frac{m}{n} + n\right) + 1 \\
&\text{svo} & f(m) &= f\left(\frac{m}{n}\right) f(n) - \left(f\left(\frac{m}{n}\right) + n\right) + 1 \\
&\text{og þá} & m + 1 &= f\left(\frac{m}{n}\right)(n+1) - f\left(\frac{m}{n}\right) - n + 1 \\
&\text{sem gefur} & m &= f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n - n \\
&\text{og þá} & \frac{m}{n} &= f\left(\frac{m}{n}\right) - 1 \\
&\text{svo að} & f\left(\frac{m}{n}\right) &= \frac{m}{n} + 1.
\end{aligned}
$$

Þetta sýnir að $f(x) = x + 1$ er eina fallið sem kemur til greina. Prófun leiðir í ljós að það uppfyllir upphaflegu skilyrðin.

Dæmi 6

Þú stendur fyrir framan 31 hæða hús með tvær nákvæmlega eins glerkúlur. Þú veist að ef þú kastar svona glerkúlum af 31. hæð hússins niður á jörð þá brotna þær. Í húsinu er hæð n sem er þannig að sé kúlunum kastað niður af hæð n þá brotna þær og einnig sé þeim kastað af öllum hæðum þar fyrir ofan (ef einhverjar eru), en sé þeim kastað niður af hæðum fyrir neðan hæð n (ef einhverjar eru) þá brotna þær ekki. Verkefni þitt er að lýsa aðferð sem tryggir að þú finnir n í sem fæstum köstum sama hvar í húsinu hæð n er.
Ath. Þú mátt kasta hvorri kúlu eins oft og þú vilt af hvaða hæð hússins sem er þar til hún brotnar en brotin kúla er úr leik.

Lausn

Ef við byrjum á að henda fyrri kúlunni af k. hæð og hún brotnar gæti þurft að kasta síðari kúlunnni frá öllum hæðum fyrir neðan k, fjöldi kasta getur því orðið k. Við lýsum nú aðferð til að finna rétta hæð í 8 köstum. Byrjum á áttundu hæð. Ef fyrri kúlan brotnar þar, þarf skv. framansögðu mest 8 köst. Ef fyrri kúlan brotar ekki, þá færum við okkur upp um sjö hæðir og köstum næst af fimmtándu hæð. Ef fyrri kúlan brotar þar gæti þurft 6 köst til viðbótar, alls 8 köst, en ef fyrri kúlan brotnar ekki færum við okkur nú upp um fimm hæðir og reynum næst að kasta af 20. hæð. Þannig má halda áfram upp, koll af kolli, meðan fyrri kúlan brotar ekki. Þar sem $8+7+6+5+4+3+2+1 > 31$ er tryggt að við finnum rétta hæð í 8 köstum (eða færri). Rökstyðjum nú að 7 köst dugi ekki. Þá mættum við ekki fara ofar en á sjöundu hæð í fyrstu tilraun, ekki ofar en á hæð númer $7 + 6 = 13$ í annarri tilraun og svo framvegis. Að lokum gætum við ekki farið ofar, í sjöundu tilraun, en á hæð númer $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ og það dugar ekki.