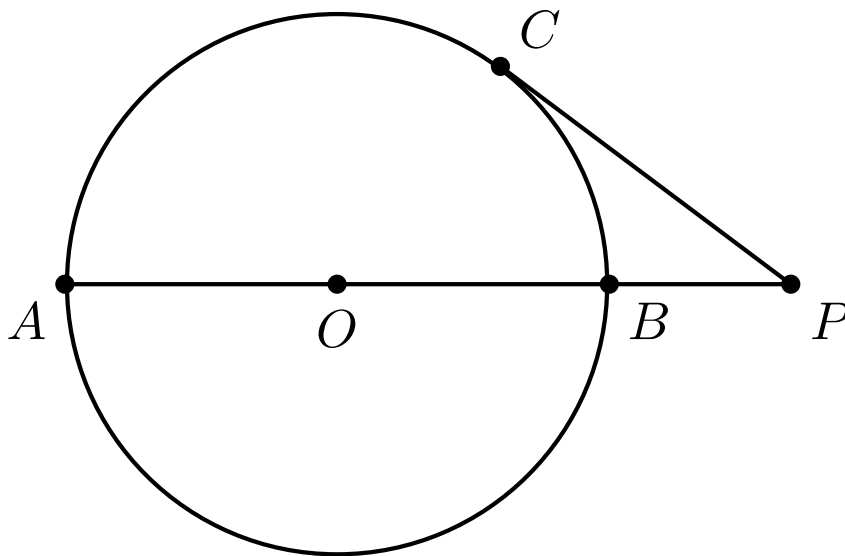


Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2010-2011

Svör og lausnir

Neðra stig



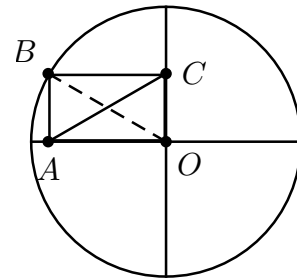
Fyrsti hluti

1. Talan $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ er jöfn

1 $2 - \sqrt{2}$ $\sqrt{8} - 1$ 2

Skýring: $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} - 1 = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$

2. Hringurinn á myndinni hefur þvermálið 10 cm og miðja hans er í O . $OABC$ er rétthyrningur þar sem B er á hringnum. Hver er lengd striksins AC ?



$\frac{5}{\sqrt{2}}$ cm $2\sqrt{6}$ cm 5 cm $5\sqrt{2}$ cm

Skýring: Hornalínur rétthyrnings eru jafnlangar, svo að $AC = OB$. En OB er geisli (radíus) hringins sem er jafn hálfu þvermálinu og því 5 cm.

3. Jón bjó á hinum ýmsu stöðum meðan hann lifði. Í þessari röð þá bjó Jón 1/3 æfi sinnar á Íslandi, 1/6 á Indlandi, tólf ár í Egyptalandi og helming tímans sem hann átti þá ólifað bjó Jón í Ástralíu. Jón dó í Kanada en þar bjó hann jafn lengi og á Indlandi. Í hvaða landi hélt Jón upp á 40 ára afmælið?

Indlandi Egyptalandi Ástralíu Kanada

Skýring: Fyrri helming æfi sinnar bjó Jón á Íslandi og Indlandi. Seinni helminginn, x ár, bjó Jón í þremur öðrum löndum, þar sem

$$12 + \frac{1}{2}(x - 12) + \frac{1}{6}(2x) = x, \quad \text{og því} \quad x = 36.$$

Svo að hann flutti til Egyptalands þegar hann varð 36 ára og hélt þar upp á 40 ára afmælið.

4. Ójafnan $(x - 1)(x + 1) \geq x^2$ er sönn fyrir

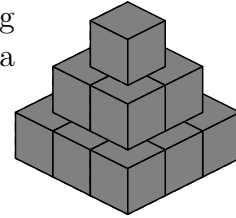
öll $x > 1$ öll $x < 0$ allar rauntölur x enga rauntölu x

Skýring: Ef margfaldað eru upp úr svigum fæst ójafnan

$$x^2 - 1 \geq x^2 \quad \text{og því} \quad -1 \geq 0$$

sem er ómögulegt. Ójafnan er því aldrei sönn.

5. Listaverk úr fjórtán teningum með hliðarlengd 1 m er eins og myndir sýnir. Nú er listaverkið málað að utan. Hversu marga fermetra þarf að mála?



21

24

33

37

Skýring: Lóðréttir fletir listaverksins eru $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 24$ talsins. Láréttur flötur er samtals $3 \cdot 3 = 9$ fermetrar (ef litið er beint ofan á listaverkið sést sléttur flötur sem er jafn stór neðsta lagi ferninga). Heildarfjöldi fermetra sem þarf að mála er því $24 + 9 = 33$.

6. Í 100 manna úrtaki segjast 60 fylgjast með fréttum með því að horfa á sjónvarpsfréttir og 70 segjast lesa fréttir í dagblöðum. Af þeim sem lesa fréttir í dagblöðum segjast 70% horfa á sjónvarpsfréttir. Hve margir í úrtakinu fylgjast hvorki með fréttum í sjónvarpi né dagblöðum?

15

19

23

27

Skýring: 70% þeirra 70 sem lesa dagblöð, eða 49, horfa einnig á sjónvarp og því $(70 - 49) = 21$ sem eingöngu lesa blöð. Eins horfa $(60 - 49) = 11$ eingöngu á sjónvarp. Alls $11 + 49 + 21 = 81$ fylgjast því með fréttum í sjónvarpi eða dagblöðum. Hinir $100 - 81 = 19$ lesa hvorki blöðin né horfa á sjónvarp til að fylgjast með fréttum.

7. Meðalaldur ömmu, afa og barnabarnanna sjö er 28 ár. Meðalaldur barnabarnanna sjö er 15 ár. Hve gamall er afinn ef vitað er að hann er þremur árum eldri en amman?

75 ára

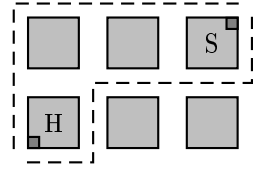
73 ára

70 ára

68 ára

Skýring: Samanlagður aldur afa, ömmu og barnabarna er $9 \times 28 = 252$ ár og samanlagður aldur barnabarna er $7 \times 15 = 105$ ár. Því er samanlagður aldur afans og ömmunnar $252 - 105 = 147$ ár. Ef afinn er x ára þá er amman $(x - 3)$ ára og $x + (x - 3) = 147$. Þá er $x = 75$. Afinn er því 75 ára.

8. Stysta leið Jónu í skólann (S) heiman frá sér (H) liggur meðfram fimm húsaröðum. Tvær slíkar leiðir eru sýndar á mynd. Á hve marga mismunandi vegu getur Jóna farið stystu leið í skólann að heiman?



- 6 12 10 8

Skýring: Til að komast stystu leið í skólann fer Jóna tvær húsaröðir í norður, n , og þrjár í austur, a . Á myndinni eru leiðir (n, n, a, a, a) og (a, n, a, a, n) sýndar. Heildarfjöldi stystu leiða er því jafn fjölda möguleika á að raða í röð þremur a og tveimur n , en sá fjöldi er

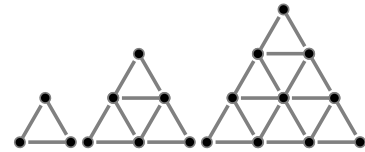
$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \quad \text{eða} \quad \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

9. Ef $A * B = AB + 1$ og $A \odot B = (A + B)/2$ hvert er gildið á $3 * ((7 \odot 3) \odot (3 * 4))$

- 20 23 25 28

Skýring: $(7 \odot 3) = (7+3)/2 = 5$ og $(3 * 4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$. Því er $(7 \odot 3) \odot (3 * 4) = 5 \odot 13 = (5+13)/2 = 9$. Þá fæst loks að $3 * ((7 \odot 3) \odot (3 * 4)) = 3 * 9 = 3 \cdot 9 + 1 = 28$.

10. Á myndinni sést hvernig raða má eldspýtum og mynda þríhyrningslaga mynstur með hliðarlengdir 1, 2 og 3 eldspýtur. Hversu margar eldspýtur þarf ef mynda á samskonar mynstur með hliðarlengd sem samanstendur af 6 eldspýtum?



- 57 60 63 69

Skýring: Ef fjöldi eldspýtna í hliðarlengd er aukinn úr n í $(n + 1)$ þá eykst heildarfjöldi eldspýtna um $3(n + 1)$. Til að ná hliðarlengd með sex eldspýtum er byrjað með hliðarlengd eina eldspýtu og svo aukið um eina eldspýtu í einu þar til sex eldspýtum er náð. Heildarfjöldi eldspýtna er því

$$3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 63.$$

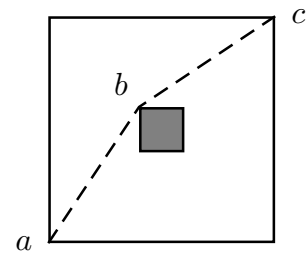
Annar hluti

11. Ferningslaga garður er af stærðinni 10×10 m. Í miðjum garðinum er ferningslaga blómabeð með hliðarlengd 2 m. Miðja blómabeðsins er nákvæmlega í miðjum garðinum og hliðar blómabeðsins eru samsíða hliðum garðsins. Ef bannað er að ganga yfir blómabeðið, hver er stysta leiðin frá einu horni garðsins í mótlægt horn?

- $10\sqrt{2}$ m $8\sqrt{3}$ m $2\sqrt{13}$ m $4\sqrt{13}$ m $(8\sqrt{2} + 4)$ m

Skýring: Stysta leiðin er brotna línan abc í gegnum horn blómabeðsins eins og sýnt er á myndinni. Leiðir ab og bc eru jafn langar, hvor um sig er langhlið rétthyrnds þríhyrnings með skammhliðar 4 og 6. Stysta leiðin er því

$$2 \cdot \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$$



12. Brúnir tenings eru litaðar rauðar eða svartar. Ef sérhver hlið teningsins hefur a.m.k. eina svarta brún, hver er minnsti mögulegur fjöldi svartra brúna?

2

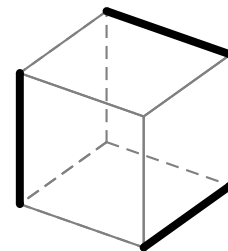
3

4

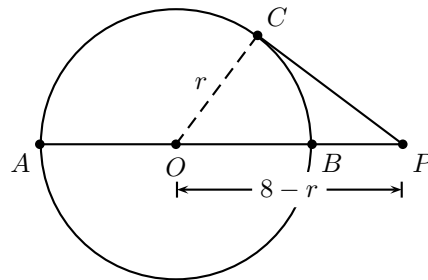
5

6

Skýring: A.m.k. ein brún topphliðarinnar þarf að vera svört og einnig a.m.k. ein brún botnhliðarinnar. En hver af brúnum topp- og botnhliðanna liggur að einungis einni lóðréttri hlið og þær eru fjórar, svo ekki dugir að hafa tvær svartar brúnir. En hins vegar dugir að hafa 3 svartar brúnir ef þær eru valdar eins og myndin sýnir.



13. Miðstrengur hrings er framlengdur í punkt P og CP er snertill hringsins eins og sýnt er á mynd. Ef $AP = 8$ cm og $CP = 4$ cm hvert er þvermál hringsins?



6 cm

$4\sqrt{2}$ cm

$5\sqrt{2}$ cm

8 cm

$4\sqrt{3}$ cm

Skýring: Táknum geisla (radíus) hringsins með r . Þríhyrningurinn OCP er réttur þríhyrningur með skammhliðar r og 4 og langhlið $8 - r$. Samkvæmt jöfnu Pýþagórasar gildir að

$$(8 - r)^2 = r^2 + 4^2 \quad \text{þ.e.} \quad 64 - 16r + r^2 = r^2 + 16$$

Þá fæst að $16r = 64 - 16 = 48$ og því er $r = 3$. Þvermál hringsins er þá $2r = 6$.

14. Hver er mismunurinn á summu allra sléttra talna og summu allra oddatalna frá 1 til 2010?

980

1005

1078

1101

1150

Skýring: Mismunurinn er $(2 + 4 + \dots + 2010) - (1 + 3 + \dots + 2009)$. Það eru 1005 tölur í hvorru summu og með umröðun fæst

$$(2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \dots + (2010 - 2009) = 1005 \cdot 1 = 1005.$$

15. Á hringlaga hlaupabraut hleypur Jón hringinn á 40 sekúndum. Siggi hleypur í gagnstæða átt og mætir Jóni á 15 sekúndna fresti. Ef báðir hlaupa á jöfnum hraða, hversu margar sekúndur er Siggi að hlaupa hringinn?

 18

 24

 25

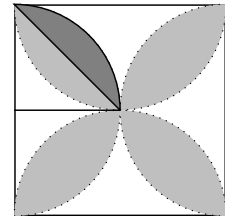
 27

 32

Skýring: Á 15 sekúndum hleypur Jón 15/40 úr hring en Siggi 25/40 (því samanlagt hafa þeir hlaupið einn hring í fyrsta skiptið sem þeir mætast). Siggi hleypur því einn hring (eða 40/40 úr hring) á $15 \cdot (40/25) = 24$ sekúndum.

Þriðji hluti

16. Í ferning með hliðarlengd 8 eru innritaðir fjórir hálfhringar með miðjur á hliðum ferningsins. Hvert er flatarmál fjögurra blaða smárans sem hálfhringarnir fjórir mynda?



Svar: $32\pi - 64$

Skýring: Laufum smárans má skipta í átta hálflauf (þar sem hverju laufi er skipt langsum í tvo jafna hluta). Flatarmál hvers hálflausis er jafnt mismun á flatarmáli fjórðungs úr disk með geisla (radius) 4 og flatarmáli rétthyrnds jafnarma þríhyrnings með skammhliðar 4. Hálflaufið hefur því flatarmálið

$$\frac{1}{4}\pi 4^2 - \frac{1}{2}4^2 = 4\pi - 8$$

og flatarmál fjögurra blaða smárans er þá $8 \cdot (4\pi - 8) = 32\pi - 64$.

17. Fyrir hversu margar tölur x í menginu $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ er talan $x^3 + x^2$ ferningstala (annað veldi af heiltölu)?

Svar: 9

Skýring: Til að $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$ sé ferningur þá verður $x + 1$ að vera ferningur, $x + 1 = z^2$. Þá er $x = z^2 - 1$. Þar sem x er í tiltekna menginu eru einu möguleikarnir á x þessir:

$$2^2 - 1, \quad 3^2 - 1, \quad 4^2 - 1, \quad 5^2 - 1, \quad 6^2 - 1, \quad 7^2 - 1, \quad 8^2 - 1, \quad 9^2 - 1 \quad \text{og} \quad 10^2 - 1.$$

Þetta eru níu tölur alls.

18. Í rétthyrndum þríhyrningi er summa hliðarlengda 18. Summa ferninga (2. velda) hliðanna er 128. Hvert er flatarmál þríhyrningsins.

Svar: 9

Skýring: Köllum skammhliðar þríhyrningsins a og b og langhliðina c . Þá er $c^2 = a^2 + b^2$. Nú er gefið að $a^2 + b^2 + c^2 = 128$ og því er $a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) = 128$. Þá fæst að $a^2 + b^2 = 64 = c^2$ og $c = 8$. Þar sem $c = 8$ þá er $a + b = 18 - 8 = 10$. Flatarmál þríhyrningsins er því

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) = \frac{1}{4}(10^2 - 64) = 9.$$

19. Hópur málara, sem allir afkasta jafn miklu, vann við að mála tvo veggj. Annar veggurinn er tvöfalt stærri en hinn. Málarnir unnu allir við að mála stærri vegginn í hálfan dag en þá hóf helmingur málara að mála minni vegginn meðan hinn helmingur málara hélt áfram að mála stóra vegginn. Í lok dags hafði tekist að mála allan stærri vegginn en einn málari var allan næsta dag að ljúka við að mála minni vegginn. Hvað voru málarnir margir?

Svar: 8

Skýring: Táknum dagsverk eins málara með a og fjölda málara með x . Þá er gefið að stærri veggurinn er $\frac{a}{2} \cdot x + \frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2}$ dagsverk og minni veggurinn er $\frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2} + a$ dagsverk. Þar sem stærri veggurinn er tvöfalt stærri en hinn þá gildir að

$$\frac{a}{2} \cdot x + \frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2} = 2\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2} + a\right)$$

sem gefur að $x = 8$.

20. Hver er tölustafurinn x ef $(3(a + 134))^2 = 1x8921$, þar sem a er heiltala?

Svar: 6

Skýring: Ef jafnan gildir verður talan $1x8921$ að vera margfeldi af 9 og það er vel þekkt regla að þá gengur 9 upp í þversummunni $1 + x + 8 + 9 + 2 + 1 = 21 + x$. Eini möguleikinn er að $x = 6$.

Ath: Þó $x = 6$ sé eini möguleikinn er ekki sjálfgefið að hann virki; dæmið gæti verið plat. En svo er ekki því ef $a = 3$ fæst

$$(3(a + 134))^2 = (3 \cdot 137)^2 = 411^2 = 168921.$$

Fjórði hluti

21. Ef a , b , c og d eru fjórir mismunandi jákvæðir tölustafir, enginn þeirra núll, þá má mynda 24 mismunandi fjögurra stafa tölur úr þeim. Er hægt að velja a , b , c og d þannig að allar þessar 24 tölur séu frumtölur (prímtölur)?

Lausn: Nei, það er ekki hægt. Ef tölustafirnir fjórir eiga að mynda 24 frumtölur þá eru tölustafirnir 2, 4, 5, 6 og 8 útilokaðir vegna þess að fjögurra stafa tölur sem enda á þessum tölustöfum eru ekki frumtölur (eru deilanlegar með 2 eða 5). Eftir eru þá tölustafirnir 1, 3, 7 og 9 til að mynda tölurnar 24.

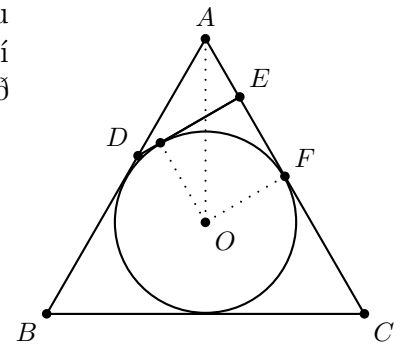
Þar sem tala er deilanleg með 11 ef víxlsumma hennar er deilanleg með 11, þ.e. summan af tölustöfum í oddatölusætum (aftanfrá) að fráðreginni summu hinna tölustafanna, þá eru allar sex tölurnar

$$1397, \quad 1793, \quad 3179, \quad 3971, \quad 7139 \quad \text{og} \quad 7931$$

deilanlegar með 11 þar sem þessar tölur hafa víxlsummu 0.

Önnur leið er að skoða lægstu töluna 1379, en hún er deilanleg með 7.

22. Í jafnhliða þríhyrningi ABC er innritaður hringur með miðju í O . Strikið DE er snertill við hringinn og sker hliðina AB í D og hliðina AC í E undir réttu horni. Strikið AE er 1 að lengd. Hver er lengd AC ?



Lausn: Táknum geisla hringins með r og látum F vera snertipunkt hringins og hliðarinnar AC . Þá er $EF = OF = r$ vegna þess að þetta eru tvær hliðar í sama ferningi. Þríhyrningurinn OFA hefur 30° horn í A , 60° horn í O og 90° horn í F . Því er $OA = 2r$ og $AF = \sqrt{3}r$. En við vitum líka að $AF = AE + EF = 1 + r$ svo að $\sqrt{3}r = 1 + r$. Þetta gefur að

$$r = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

og þar með að $AC = 2 \cdot AF = 2(1 + r) = 2 + 2r = 2 + (\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$.

Alls tóku þátt 399 nemendur frá 19 skólum, 248 á neðra stigi og 151 á efra stigi. Við þökkum þeim fyrir þátttökuna og einnig öllum þeim aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson

Friðrik Diego

Guðbjörn Freyr Jónsson

Gunnar Freyr Stefánsson

Jóhanna Eggertsdóttir

Marteinn Þór Harðarson