Ójöfnur

Hjalti Þór Ísleifsson

28. júní 2021

1 Kúpni

Skilgreining 1. Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall þar sem $I \subseteq \mathbb{R}$ er bil. Við segjum að f sé *kúpt* ef um sérhverja tvo punkta $a, b \in I$ og öll $\lambda \in [0, 1]$ gildir að

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Við segjum að f sé *íhvolft* eða *hveflt* ef $-f$ er kúpt.

Athugasemd 2. Með því að nota meðalgildissetninguna má sýna að ef f er diffranlegt þá gildir:

- f er kúpt þá og því aðeins að f' sé vaxandi.
- f er íhvolft þá og því aðeins að f' sé minnkandi.

Af því leiðir að ef f er tvídiffranlegt þá er

- f kúpt þá og því aðeins að $f'' \geq 0$.
- f íhvolft þá og því aðeins að $f'' \leq 0$.

Þetta gefur okkur þægilega leið til að sýna að fall sé kúpt eða hvelft.

Dæmi 3. Eftirfarandi föll eru kúpt:

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$.
- $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$, $p \geq 1$.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

Eftirfarandi föll eru íhvolf:

- $]0, +\infty[$, $x \mapsto \ln x$.
- $[0, +\infty[$, $x \mapsto x^p$, $0 \leq p \leq 1$.

Æfing 4. Sýnið að ef f og g eru kúpt föll og $a \geq 0$ þá eru af, $f + g$ og $\max\{f, g\}$ kúpt.

Eftirfarandi ójafna er gríðarlega gagnleg líkt og við munum sjá á eftir.

Setning 5 (Ójafna Jensen)**.** *Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera kúpt, $x_1, \ldots, x_n \in I$ og $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ þannig að $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Þá gildir:*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Ef f er hvelft gildir öfuga ójafnan.

Sönnun. Þar eð f er kúpt getum við fundið tölur $a, b \in \mathbb{R}$ þannig að um fallið $\varphi(x) := ax + b$ gildi:

- $\varphi(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$.
- $\varphi \leq f$.

Fáum svo

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) &= \varphi(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \\ &= \lambda_1 \varphi(x_1) + \cdots \lambda_n \varphi(x_n) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \end{aligned}$$

□

2 Hölder og Minkowski

Nú skulum við skoða tvær mikilvægar ójöfnur sem koma víða fyrir.

Skilgreining 6. Látum $1 \leq p \leq +\infty$. Sú ótvírætt ákvarðaða tala q að $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kallast *aðokatala* tölunnar p. Við segjum að p og q séu aðoka.

Fyrst skulum við sanna eftirfarandi hjálparsetningu:

Hjálparsetning 7 (Ójafna Young)**.** *Ef $a, b \geq 0$ og $1 < p, q < +\infty$ eru aðoka þá er*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

og jafnaðarmerkið gildir þá og því aðeins $a^p = b^q$.

Sönnun. Niðurstaðan er ljós ef $ab = 0$. Gerum því ráð fyrir að $ab \neq 0$. Þá fæst:

$$\ln ab = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \geq \ln(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q)$$

þar sem við notuðum í síðasta skrefi að ln er íhvolft. Nú fæst niðurstaðan með því að taka exp af báðum hliðum. □

Setning 8 (Ójafna Hölders)**.** *Látum $1 \leq p, q \leq +\infty$ vera aðoka, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Þá gildir:*

$$|x_1||y_1| + \cdots + |x_n||y_n| \leq \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Athugasemd 9. Fyrir $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og $1 \leq p < +\infty$ skilgreinum við

$$\|x\|_p := \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

og fyrir $p = +\infty$ skilgreinum við

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Talan $\|x\|_p$ kallast p-norm vigursins x. Með þessum rithætti verður ójafna Hölders svona:

$$|x_1||y_1| + \cdots + |x_n||y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Sönnun. Niðurstaðan er ljós ef $p = 1$ eða $p = +\infty$ og eins ef $\|x\|_p = 0$ eða $\|y\|_q = 0$. Við gerum því ráð fyrir að $1 < p < +\infty$ og $\|x\|_p \neq 0$ og $\|y\|_q \neq 0$. Með því að skipta á x og $x/\|x\|_p$ og y og $y/\|y\|_q$ getum við gert ráð fyrir að $\|x\|_p = 1$ og $\|y\|_q = 1$. Fáum nú með ójöfnu Young:

$$|x_i||y_i| \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$$

og summum því næst yfir i og fáum:

$$|x_1||y_1| + \cdots + |x_n||y_n| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Önnur sönnun. Gerum aftur ráð fyrir að $1 < p < +\infty$ og $\|x\|_p, \|y\|_q \neq 0$. Með því að nota að x^p er kúpt og Jensen fáum við:

$$\begin{aligned}
|x_1||y_1| + \cdots + |x_n||y_n| &= \|y\|_q^q \left(\left(|x_1||y_1|^{1-q}\frac{|y_1|^q}{\|q\|_q^q} + \cdots + |x_n||y_n|^{1-q}\frac{|y_n|^q}{\|q\|_q^q}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|y\|_q^q \left(|x_1|^p|y_1|^{p(1-q)}\frac{|y_1|^q}{\|q\|_q^q} + \cdots + |x_n|^p|y_n|^{p(1-q)}\frac{|y_n|^q}{\|q\|_q^q}\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p\|y\|_q.
\end{aligned}$$

□

Setning 10 (Ójafna Minkowski)**.** *Látum* $1 \leq p \leq +\infty$*,* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$*. Þá gildir:*

$$(|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

þ.e.

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Athugasemd 11. Ójafna Minkowski er þríhyrningsójafnan fyrir p-normið (og sýnir því að $\|\cdot\|_p$ er í raun norm).

Sönnun. Við eftirlátum lesanda tilfellin $p = 1, +\infty$. Athugum að við getum gert ráð fyrir að $\|x + y\|_p \neq 0$. Fáum nú:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\,\|x + y\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Deilum svo í gegn með $\|x + y\|_p^{\frac{p}{q}}$ og fáum niðurstöðuna. □

3 Cauchy-Schwarz

Fyrir $x, y \in \mathbb{R}^n$ skilgreinum við innfeldi vigranna x og y með

$$\langle x, y \rangle \coloneqq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Athugið að $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.
Eftirfarandi ójafna er gríðarlega mikilvæg.

Setning 12 (Ójafna Cauchy-Schwarz)**.** *Um alla $x, y \in \mathbb{R}^n$ gildir*

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \|y\|$$

þ.e.

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \le (x_1^2 + \cdots x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Jafnaðarmerkið gildir þá og því aðeins að til sé $\lambda \in \mathbb{R}$ þannig að $x = \lambda y$.

Sönnun. Við fáum með $p = q = 2$ í Hölder að

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \le |x_1||y_1| + \cdots + |x_n||y_n| \le \|x\| \|y\|.$$

□

Önnur sönnun. Látum $\lambda \in \mathbb{R}$. Við höfum að

$$0 \le \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \lambda^2.$$

Hægri hliðin er annars stigs margliða í λ og þar eð hún hefur í mesta lagi eina núllstöð vitum við að greinir hennar er ≤ 0, þ.e.

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \le 0$$

þ.e.

$$\langle x, y \rangle^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2.$$

□

Athugasemd 13. Seinni sönnunin sýnir að ójafna Cauchy-Schwarz gildir um öll innfeldi.

4 Meðaltalsójöfnur

Eftirfarandi ójöfnur er gott að hafa á takteinum.

Setning 14. *Látum $x_1, \ldots, x_n > 0$. Þá gildir:*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

og jafnaðarmerkin gilda þá og því aðeins að tölurnar séu allar jafnar.

Athugasemd 15. Stærðin lengst til vinstri kallast *þýtt meðaltal talnanna*, sú næsta *rúmfræðilegt meðaltal*, því næst kemur *venjulegt meðaltal* og loks *ferningsmeðaltal.* Á útlensku er jafnan vísað til ójöfnunnar í miðjunni sem *AM-GM ójöfnunnar.*

Sönnun. Byrjum á að sanna ójöfnuna í miðjunni. Við beitum Jensen á ln:

$$\frac{1}{n}\ln(x_1\cdots x_n) = \frac{1}{n}\ln x_1 + \cdots + \frac{1}{n}\ln x_n \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Tökum svo exp af báðum hliðum.

Sönnum því næst síðustu ójöfnuna. Til þess beitum við Cauchy-Schwarz:

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 = (x_1 \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 1)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(1^2 + \cdots + 1^2) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)n.$$

Deilum loks með n^2 og drögum rót.

Til að sanna fyrstu ójöfnuna notum við þá í miðjunni:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

Þessi ójafna er jafngild þeirri fyrstu. □

5 Umröðunarójafnan

Ein skemmtileg ójafna sem getur komið að gagni er *umröðunarójafnan* (e. rearrangement inequality). Hún er svohljóðandi.

Setning 16. *Látum $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ og $b_n \leq \cdots \leq b_n$ vera rauntölur og $x_1, \ldots, x_n$ vera einhverja umröðun á $b_1, \ldots, b_n$. Þá gildir:*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$