Dálítið um Fallajöfnur

Tekið saman af Erni Arnaldssyni

Hvaða föll $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ uppfylla $f(x + y) = f(x) + f(y)$ fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}$? Þetta verkefni er dæmi um svokallaða *fallajöfnu* en þær eru algeng dæmagerð á stærðfræðikeppnum. Hér verður fjallað um algengustu aðferðirnar sem notaðar eru til þess að leysa slíkar jöfnur og dæmi leyst sem skýra frá notkun þeirra. Flest dæmi sem koma fyrir á stærðfræðikeppnum má leysa með því að beita þessum aðferðum (ásamt smá hugviti). Í framhaldinu mun $\mathbb{N}$ tákna mengið $\{1, 2, 3, \ldots\}$ og $\mathbb{N}_0$ tákna $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ á meðan „jákvæðar" tölur eru tölur stranglega stærri en 0.

1 Helstu aðferðir

Hér verða taldar upp algengustu aðferðirnar sem koma við sögu í lausnum á fallajöfnum. Ekki hafa áhyggjur af því þó að aðferð skuli virðast dularfull við fyrstu sýn, þegar henni verður beitt í dæmunum hér á eftir þá ætti hún að skýrast betur (þegar aðferð er beitt verður vísað í hana með númeri hennar í eftirfarandi lista).

1. Að stinga raungildum inn fyrir breytistærðir: Algengt er að reynt sé að finna gildi fallsins í 0 og 1. Ef t.d. $f(x + y)$ kemur fyrir í fallajöfnunni og við höfum fundið $f(0)$ þá er hægt að setja $y = -x$. Rétta innsetningu verður erfiðara að finna því þyngra sem dæmið er.

2. Þrepun. Ef við vitum gildið $f(1)$ má oft nota þrepun til að finna $f(n)$ fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$. Því næst leiðum við út gildin $f(\frac{1}{n})$ og $f(r)$ fyrir ræð r. Þessi aðferð er algeng til að leysa fallajöfnur þar sem skilgreiningarmengi fallanna er $\mathbb{Q}$.

3. Að kanna hvort fallið sé eintækt eða átækt. Yfirleitt er einfalt að leiða þetta út en það getur verið mjög gagnlegt.

4. Að finna *fastapunkta*. Í þyngri dæmum getur verið gagnlegt að finna fastapunkta fallsins, þ.e.a.s. þá punkta x í skilgreiningarmenginu þannig að $f(x) = x$.

5. Fallajafna Cauchys. Sjá Dæmi 1.

6. Að kanna hvort fallið sé einhalla eða samfellt. Samfelldni er yfirleitt gefin í dæminu sem aukaskilyrði en sé fall einhalla má oft nota það til að beita fallajöfnu Cauchys.

7. Að gera ráð fyrir því að fallið sé, í einhverjum punkti, strangt stærra eða minna en fallið sem við viljum sanna að leysi fallajöfnuna, og leiða þannig út mótsögn. Oftast er þetta gert í framhaldi af þrepunarsönnun.

8. Að leiða út rakningarformúlu. Þetta er oftast gert þegar fallið er takmarkað og við getum fundið samband milli $f(f(n))$, $f(n)$ og n.

9. Að skoða mengið þar sem fallið er jafnt því falli sem við viljum sanna að leysi fallajöfnuna. Tilgangurinn er að sýna að þetta mengi er allt skilgreiningarmengið.

10. Að giska á lausn. Þetta getur verið mjög gagnlegt til þess að finna rétta innsetningu.

11. Að skrifa tölur í öðru talnakerfi en því með grunntöluna 10 (t.d. tvíundakerfi). Þetta er að sjálfsögðu einungis hægt ef skilgreiningarmengið er $\mathbb{N}$.

Að endingu minnumst við á að í lok lausnar VERÐUR að sýna að fallið sem við höfum leitt út leysi í raun fallajöfnuna.

2 Dæmi

Við merkjum dæmin eftir erfiðleikastigunum **A** fyrir „auðveldari“ (þar með er ekki sagt að dæmið sé auðvelt) og **E** fyrir „erfiðari“ (þar með er sagt að dæmið sé erfitt). Fyrsta fallajafnan sem við leysum kallast fallajafna Cauchys. Ástæða þess að hún er á listanum hér að ofan yfir aðferðir til að leysa fallajöfnur er sú að það kemur fyrir að það megi umrita fallajöfnu yfir í fallajöfnu Cauchys (sjá dæmi 9). Fyrst leiðum við út lausn fyrir skilgreingarmengið $\mathbb{Q}$ og í Dæmi 2 gefum við okkur aukaskilyrði til að leiða út lausn fyrir alla línuna, $\mathbb{R}$.

Dæmi 1 (A). Finnið öll föll $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ sem uppfylla

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}$.

Lausn. Ef við setjum $x = y = 0$ þá fáum við $f(0) = 2f(0)$, svo $f(0) = 0$ (aðferð 1). Sýnum því næst, með þrepun (aðferð 2), að $f(kx) = kf(x)$ fyrir $k \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{Q}$.

Þetta er augljóst fyrir $k = 0$. Gerum því ráð fyrir að þetta gildir fyrir eitthvað $k \in \mathbb{N}$. Þá fæst, með því að setja $y = kx$ í gefnu fallajöfnuna, að

$$f((k+1)x) = f(x + kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k+1)f(x).$$

Athugum næst að með því að setja $y = -x$ (aðferð 1) fæst $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ og því er $f(-x) = -f(x)$ svo að $f(-kx) = -f(kx) = -kf(x)$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{Q}$ svo að $f(kx) = kf(x)$ fyrir öll $k \in \mathbb{Z}$ og $x \in \mathbb{Q}$.

Athugum nú að fyrir $k \in \mathbb{Z}$ fæst

$$f(1) = f(k(1/k)) = kf(1/k)$$

svo að $f(1/k) = (1/k)f(1)$ og því fæst fyrir $m, n \in \mathbb{Z}$ að $f(m/n) = mf(1/n) = (m/n)f(1)$ svo að $f(x) = xf(1)$ fyrir öll $x \in \mathbb{Q}$. Lokaskrefið í öllum lausnum á fallajöfnum á að vera að athuga hvort lausnin sem hefur verið leidd út leysi í raun og veru gefnu fallajöfnuna; $f(x + y) = (x + y)f(1) = xf(1) + yf(1) = f(x) + f(y)$.

Áður en við leiðum út lausn á fallajöfnu Cauchys á $\mathbb{R}$ þurfum við eftirfarandi staðreynd um rauntölurnar.

Staðreynd. Á milli sérhverra ólíkra rauntalna má finna ræða tölu. Það er, ef $a < b$ þá er til tala $c \in \mathbb{Q}$ þannig að $a < c < b$.

Dæmi 2 (A). Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$ og $f(x) \geq 0$ fyrir $x \geq 0$.

Lausn. Við sýndum í seinasta dæmi að $f(x) = f(1)x$ fyrir öll $x \in \mathbb{Q}$. Nú viljum við sýna að $f(x) = f(1)x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Látum $x \geq y$, þá er $x - y \geq 0$ og $f(x - y) \geq 0$ og við fáum $f(x) = f(y + (x - y)) = f(y) + f(x - y) \geq f(y)$, svo f er vaxandi (aðferð 6). Athugum að ef $f(1) = 0$ þá verður f að vera núllfallið, fyrst f er vaxandi. Gerum því ráð fyrir að $f(1) \neq 0$.

Gerum nú ráð fyrir að $f(x) < xf(1)$, fyrir eitthvað $x \in \mathbb{R}$, og sýnum að það leiði til mótsagnar (aðferð 7). Nú má finna ræða tölu, $r < x$, þannig að $f(x) < rf(1) = f(r) < xf(1)$, sem er mótsögn, þar sem f er vaxandi. Eins leiðir það til mótsagnar að gera ráð fyrir að til sé $x \in \mathbb{R}$ þannig að $f(x) > xf(1)$. Því er $f(x) = xf(1)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Dæmi 3 (A). Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y),$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$.

Lausn. Athugum að fastaföllin $f = 0$ og $f = 2$ eru augljóslega lausnir á fallajöfnunni. Ef gert er ráð fyrir að f sé hvorugt fastafallana þá er einfalt að nota þrepun (aðferð 2) til þess að sanna að $f(x) = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{Q}$ (prófið að gera það). Einnig er einfalt að sanna að $f(r+x) = r + f(x)$ og $f(rx) = rf(x)$ fyrir $r \in \mathbb{Q}$ og $x \in \mathbb{R}$. Fyrir $r = -1$ fæst því að $f(-x) = -f(x)$, og því fæst, með því að setja $y = -x$ í upphaflegu fallajöfnuna að $f(x)^2 = f(x^2)$. Þetta þýðir að $f(x) \geq 0$ þegar $x \geq 0$. Nú, gerum ráð fyrir að $f(x) < x$ fyrir eitthvað $x \in \mathbb{R}$. Veljum þá ræða tölu r þannig að $f(x) < r < x$, þá fæst

$$r > f(x) = f(x - r) + r \geq r,$$

sem er mótsögn. Eins fæst mótsögn, sé gert ráð fyrir að $f(x) > x$. Því verður $f(x) = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Það er svo einfalt að ganga úr skugga um að þetta fall uppfylli gefnu fallajöfnuna.

Dæmi 4 (A). Fallið $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uppfyllir $x + f(x) = f(f(x))$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Finnið öll $x \in \mathbb{R}$ þannig að $f(f(x)) = 0$.

Lausn. Athugum að $f(f(x)) - f(x) = x$ svo að ef $f(x) = f(y)$ þá fæst $x = y$ svo að f er eintækt (aðferð 3). Nú er $f(f(0)) = f(0) + 0 = f(0)$ og þar sem f er eintækt fæst $f(0) = 0$ svo að $f(f(0)) = 0$. Ef til væri $x \neq 0$ þannig að $f(f(x)) = 0 = f(f(0))$ þá fæst, vegna þess að f er eintækt, að $f(x) = f(0)$ sem gefur okkur að $x = 0$.

Dæmi 5 (E). Finnið öll eintæk föll $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ sem uppfylla öll eftirfarandi skilyrði

$$f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad f(1) = 2 \quad \text{og} \quad f(2) = 4.$$

Lausn. Setjum fyrst $m = 1$ og svo $n = 1$ og fáum

$$f(f(1) + f(n)) = f(f(1)) + f(n), \quad f(f(m) + f(1)) = f(f(m)) + f(1).$$

Nú gilda báðar þessar jöfnur fyrir öll $m, n \in \mathbb{N}$ svo við getum látið $m = n$ í jöfnunni til hægri. Þá eru vinstri hliðarnar í þessum tveimur jöfnum eins og því þurfa hægri hliðarnar einnig að vera eins, en það gefur

$$f(f(1)) + f(n) = f(f(n)) + f(1),$$

sem er jafngilt

$$f(f(n)) = f(n) - f(1) + f(f(1)) = f(n) - 2 + f(2) = f(n) + 2 \quad \text{(aðferð 8)}.$$

Athugum nú að ef $f(n) = m$, þá er $f(m) = m + 2$ og þá er $f(m + 2) = m + 4$ o.s.frv. Þar sem $f(1) = 2$ fæst að $f(2n) = 2n + 2$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Nú er f eintæk vörpun og þar sem tölurnar $1, 2, 4, 6, \ldots$ varpast á allar sléttu tölurnar, þá verða oddatölur, aðrar en 1, að varpast í oddatölur. Látum p vera tölu þannig að til sé k þannig að $f(k) = 2p+1$. Þá fæst að $f(2p+2s+1) = 2p+2s+3$ fyrir $s \geq 0$. *Þá verða tölurnar* $3, 5, \ldots, 2p-1$ *að varpast í mengið* $\{1, 3, 5, \ldots, 2p+1\}$ (af hverju?). Nú, sé til tala t þannig að $f(t) = 1$ þá fæst, með því að setja $m = n = t$ í upphaflegu fallajöfnuna:

$$4 = f(2) = f(f(t) + f(t)) = f(f(t)) + f(t) = 3.$$

Sem er mótsögn, svo engin tala varpast í 1. Ef til er tala t þannig að $f(t) = 3$ þá fæst að $f(3 + 2k) = 5 + 2k$ í mótsögn við tilvist slíks t. Svo að engin tala varpast í 3. Þar sem tölurnar $1, 3, \ldots, 2p-1$ að varpast í mengið $\{1, 3, 5, \ldots, 2p+1\}$ en engin tala varpast í 1 eða 3, þá hljóta tölurnar $1, 3, \ldots, 2p-1$ að varpast í mengið $\{5, \ldots, 2p+1\}$ en þá er augljóst að $f(3) = 5, f(5) = 7, \ldots, f(2n+1) = 2n+3, \ldots$. Svo fallið sem leysir fallajöfnuna er fallið sem varpar 1 í 2 og $f(n) = n + 2$ fyrir $n \geq 2$. Einfalt er að ganga úr skugga um að þetta fall uppfylli skilyrði dæmisins.

Dæmi 6 (E). Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Lausn. Sýnum fram á að fallið f sé eintækt og átækt (aðferð 3). Setjum $x = 0$ og fáum $f(f(y)) = y + f(0)^2$. Nú er fallið hægra megin jafnaðarmerkis átækt svo fallið $f(f(y))$ hlýtur því einnig að vera átækt en þar með er f átækt. Nú, ef $f(x) = f(y)$, þá fæst $y + f(0)^2 = f(f(y)) = f(f(x)) = x + f(0)^2$ og því er $x = y$ og fallið f er eintækt. Þar sem fallið er átækt er til $t \in \mathbb{R}$ þannig að $f(t) = 0$. Ef við setjum $x = 0$ og $y = t$ þá fáum við $f(0) = t + f(0)^2$. Ef við setjum $x = t$ þá fáum við $f(f(y)) = y$. Því fæst að $t = f(f(t)) = f(0) = t + f(0)^2$ og því er $f(0) = 0$.

Nú, ef við setjum $x = f(x)$ í gefnu fallajöfnuna þá fæst $f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = y + x^2$ en það er jafngilt $f(f(x)x + f(y)) = y + x^2$ en vinstri hlið þessarar jöfnu er sú sama og vinstri hlið gefnu fallajöfnunnar og því eru hægri hliðar þeirra jafnar, en það gefur $y + x^2 = y + f(x)^2$ eða $f(x)^2 = x^2$ fyrir allar rauntölur x. Nú þurfum við að skipta í tvö tilfelli.

Tilfelli 1: Ef $f(1) = 1$ þá fæst með því að setja $x = 1$ að $f(1 + f(y)) = 1 + y$, með því að hefja í annað veldi fæst svo að $(1 + y)^2 = f(1 + f(y))^2 = (1 + f(y))^2 = 1 + 2f(y) + f(y)^2 = 1 + 2f(y) + y^2$ og þá höfum við að $f(y) = y$.

Tilfelli 2: Ef $f(1) = -1$ þá fæst með svipuðum reikningum að $f(y) = -y$.

Auðvelt er að ganga út skugga um að föllin $f(x) = x$ og $f(x) = -x$ uppfylla fallajöfnuna.

Dæmi 7 (E). Er til fall $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að $f(f(x)) = x^2 - 2$ fyrir sérhverja rauntölu x?

Lausn. Eftir nokkrar tilraunir til að beita fyrstu þremur aðferðunum sjáum við að engin þeirra virðist ætla að bera árangur. Reynum því næst fjórðu aðferðina, sem veltur á því að skoða fastapunkta. Röksemdarfærslan í þessu dæmi er ansi frumleg og það er lærdómsríkt að fara í gegnum hana.

Nú, fallið $g(x) = x^2 - 2$ hefur tvo ólíka fastapunkta a og b og fallið $g \circ g$ hefur fjóra ólíka fastapunkta a, b, c og d. Athugum hvert g varpar punktinum c. Ef $g(c) = y$ þá fæst $c = g(g(c)) = g(y)$ og því er $g(g(y)) = g(c) = y$ og y er því fastapunktur $g \circ g$ og er því einn af punktunum a, b, c og d. Ef $g(c) = a$ þá fæst $c = g(g(c)) = g(a) = a$ sem er mótsögn, eins fæst að $y \neq b$. Nú er $g(c) \neq c$ svo að $g(c) = d$. Eins fæst að $g(d) = c$.

Þá vitum við hvert g varpar fastapunktum fallsins $g \circ g$. En hvernig koma þær upplýsingar að notum við lausn dæmisins? Athugum að $g(f(x)) = f(f(f(x))) = f(g(x))$. Látum $x_0 \in \{a, b\}$. Þá fæst að $f(x_0) = f(g(x_0)) = g(f(x_0))$ svo að $f(x_0) \in \{a, b\}$. Eins fæst að ef $x_1 \in \{a, b, c, d\}$ þá er $f(x_1) \in \{a, b, c, d\}$. Við skulum sýna að þetta fái ekki staðist.

Ef $f(c) = a$ þá fæst $f(a) = f(f(c)) = g(c) = d$ sem stenst ekki. Eins stenst ekki að $f(c) = b$. Nú, $f(c) \neq c$ því þá fengjum við $c = f(f(c)) = g(c)$. Svo við vitum að $f(c) = d$. En þá fæst $f(d) = f(f(c)) = g(c) = d$ sem stenst ekki. Þetta sannar að ekkert $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ er til þannig að $f(f(x)) = g(x)$.

Dæmi 8 (A). Látum n vera einhverja heiltölu og $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vera samfellt fall þannig að $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ og $f^{(n)}(x) = x$ fyrir sérhvert $x \in [0, 1]$. Sannið að $f(x) = x$ fyrir sérhvert $x \in [0, 1]$.

Lausn. Athugum að ef $f(x) = f(y)$ fyrir $x, y \in [0, 1]$ þá er $x = f^{(n)}(x) = f^{(n)}(y) = y$ svo f er eintækt á $[0, 1]$ (aðferð 3). Nú er það svo að eintæk samfelld föll eru stranglega einhalla (prófið að sanna það) og þar sem $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$ þá hlýtur f að vera stranglega vaxandi á $[0, 1]$. Látum $x \in [0, 1]$ og athugum að ef $x < f(x)$ (aðferð 7) þá fæst, þar sem $f(x) \in [0, 1]$, að $f(x) < f(f(x))$. Ef við höldum svona áfram n sinnum þá fáum við $x < f(x) < f(f(x)) < \cdots < f^{(n)}(x) = x$, sem er mótsögn. Eins fengist mótsögn ef við gerðum ráð fyrir því að $x > f(x)$ fyrir eitthvað $x \in [0, 1]$. Því er $f(x) = x$ fyrir öll $x \in [0, 1]$.

Dæmi 9 (A). Finnið öll föll $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ þannig að

(i) $f(n)f(-n) = f(n^2)$, fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$,

(ii) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$, fyrir öll $m, n \in \mathbb{Z}$.

Lausn. Auðvelt er að sjá að fallið $f(n) = n^2$ uppfyllir fallajöfnuna (aðferð 10). Skilgreinum þá fallið $g(n) = f(n) - n^2$. Skilyrði (ii) verður þá

$$g(m+n) + (m+n)^2 = g(m) + m^2 + g(n) + n^2 + 2mn,$$

sem er jafngilt

$$g(m+n) = m + n.$$

Þetta er fallajafna Cauchys (aðferð 5) og við vitum að lausnin við henni er $g(n) = g(1)n$. Við þurfum því bara að finna $g(1)$. Ef við setjum $f(n) = g(n) + n^2$ í skilyrði (i) þá fáum við

$$(g(n) + n^2)(g(-n) + n^2) = g(n^2) + n^4.$$

Setjum nú $n = 1$ og fáum

$$(g(1) + 1)(g(-1) + 1) = g(1) + 1,$$

sem er jafngilt, þar sem $g(-1) = -g(1)$,

$$g(1)(g(1) + 1) = 0.$$

Þetta þýðir að annað hvort er $g(1) = 0$ eða $g(1) = -1$. Fyrra tilvikið gefur lausnina $f(n) = n^2$ og hið síðara gefur lausnina $f(n) = n^2 - n$. Auðvelt er að ganga úr skugga um að þessi tvö föll uppfylla fallajöfnuna.

Dæmi 10 (E). Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

Lausn. Látum $A := \{f(x)|\ x \in \mathbb{R}\}$, þ.e.a.s. $A = f(\mathbb{R})$. Við getum tiltölulega auðveldlega ákvarðað f á A. Látum $x = f(y) \in A$, fyrir eitthvað y. Þá fæst $f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1$ sem er jafngilt

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}, \quad x \in A,$$

þar sem $f(0) = c$. Næst skulum við reyna að afla upplýsinga um mengið A. Setjum $x = y = 0$ og fáum $f(-c) = f(c) + c - 1$ svo að $c \neq 0$. Ef við svo setjum $y = 0$ fáum við $f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1$. Nú er fallið hægra megin jafnaðarmerkisins átækt svo við fáum að $\{f(x - c) - f(x)|\ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, svo að $A - A = \mathbb{R}$. Þá eru, fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}$, til $y_1, y_2 \in A$ þannig að $x = y_1 - y_2$. Nú fáum við, þar sem $y_2 = f(z)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y_2) = f(y_1 - f(z)) = f(f(z)) + y_1 f(z) + f(y_1) - 1 \\ &= f(y_1) + f(y_2) + y_1 y_2 - 1 = 2\frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1 y_2 - 1 = c - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Nú er einfalt að sjá að $c = 1$ og enn auðveldara er að ganga úr skugga um að fallið $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ uppfyllir fallajöfnuna.

Dæmi 11 (**E**). Látum $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ vera fall sem uppfyllir

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3n) = 3f(n), \quad f(3n+1) = 3f(n)+2, \quad f(3n+2) = 3f(n)+1.$$

Finnið fjölda heiltalna $n \leq 2006$ sem uppfylla $f(n) = 2n$.

Lausn. Hér beitum við aðferð 11 og skrifum tölurnar í þríundakerfi. Reiknum fyrstu gildin á $f(n)$ til þess að hjálpa okkur að giska á lausn (aðferð 10).

$$f((1)_3) = (2)_3,\ f((2)_3) = (1)_3,\ f((10)_3) = 6 = (20)_3,$$
$$f((11)_3) = 8 = (22)_3,\ f((12)_3) = 7 = (21)_3,\ f((20)_3) = 3 = (10)_3,$$
$$f((21)_3) = 5 = (12)_3,\ f((22)_3) = 4 = (11)_3.$$

Við sjáum að $f(n)$ er fengið útfrá n með því að víxla á 2 og 1 í þríundarstafsetningu tölunnar n. Auðvelt er að sanna þetta með þrepun (reynið að gera það!). Nú, hvaða tölur uppfylla þá $f(n) = 2n$? Það er ekki erfitt að sjá að $f(n) < 2n$ ef og aðeins ef 2 kemur fyrir í þríundarstafsetningu tölunnar n. Fjöldi talna undir $2006 = (2202022)_3$ þar sem ekki kemur fyrir 2 er $2^7 - 1 = 127$.

Dæmi 12 (**E**). Sýnið að ekki sé til neitt fall $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ þannig að $f(f(n)) = n+2011$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}_0$.

Lausn. Athugum að slíkt fall f er eintækt (aðferð 3) þar sem $f(a) = f(b)$ gefur $a+2011 = f(f(a)) = f(f(b)) = b+2011$ og þar með er $a = b$. Setjum nú $A := \mathbb{N}_0 \backslash f(\mathbb{N}_0)$ og látum $B := f(A)$. Þá er $B = f(\mathbb{N}_0) \setminus f(f(\mathbb{N}_0))$ (sannreynið það!). Nú eru A og B sundurlæg (afhverju?) og sammengi þeirra er mengið $A \cup B = \mathbb{N}_0 \setminus f(f(\mathbb{N}_0)) = \{0, 1, 2, \ldots, 2010\}$ en þar sem f er eintækt þá hafa A og B að geyma jafnmörg stök sem gengur ekki upp því mengið $\{0, 1, 2, \ldots, 2010\}$ hefur að geyma oddatölufjölda af stökum.

Dæmi 13 (**E**). Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor,$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$, þar sem $\lfloor a \rfloor$ táknar stærstu heiltöluna sem er ekki stærri en a.

Lausn. Setjum $x = y = 0$ og fáum að annaðhvort gildir $f(0) = 0$ eða $\lfloor f(0) \rfloor = 1$. Ef $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, fæst með því að setja $y = 0$ að $f(x) = f(0)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, þ.e.a.s. að f sé fastafall. Þau fastaföll sem koma til greina eru núllfallið og $f(x) = a$ þar sem $a \in [1, 2)$.

Ef hins vegar $f(0)=0$, þá setjum við $x=y=1$ og fáum að $f(1)=0$ eða $\lfloor f(1)\rfloor=1$. Ef $f(1)=0$, setjum við $x=1$ og fáum að $f(y)=0$ fyrir öll $y\in\mathbb{R}$, sem við vissum að var lausn. Ef $\lfloor f(1)\rfloor=1$, setjum við $y=1$ og fáum $\lfloor f(x)\rfloor=f(x)$, fyrir öll $x\in\mathbb{R}$. Því næst setjum við $x=2$ og $y=1/2$ og fáum $f(1)=f(2)\lfloor f(\frac{1}{2})\rfloor$. Nú vitum við að $\lfloor f(\frac{1}{2})\rfloor=f(0)=0$ svo $f(1)=0$, sem er mótsögn við $\lfloor f(1)\rfloor=1$.

Lausnirnar eru því fastaföll þar sem fastinn er annaðhvort 0 eða á bilinu $[1,2)$.

Dæmi 14 (E). Finnið öll föll $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ þannig að

$$(x+y)(f(x)-f(y))=(x-y)f(x+y),$$

fyrir öll $x,y\in\mathbb{R}$.

Lausn. Auðvelt að að sjá að $f(x)=x^2$ og $f(x)=x$ leysa fallajöfnuna (aðferð 10). Einnig er tiltölulega augljóst að sérhver línuleg samantekt af föllum sem leysa fallajöfnuna er aftur lausn. Af þeim sökum er sérhvert fall á forminu $f(x)=ax^2+bx$ lausn á fallajöfnunni, þar sem $a,b\in\mathbb{R}$ (athugið að $a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$ og $b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$). Sýnum að þetta séu einu lausnirnar. Látum því f leysa fallajöfnuna og skilgreinum fallið $g(x)=f(x)-ax^2-bx$, þar sem $a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$ og $b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$ og sýnum að g er núllfallið (við höfum áður beitt þessari aðferð í Dæmi 9). Athugum að g fullnægir fallajöfnunni og að $g(1)=g(-1)=0$. Setjum nú $y=1$ í

$$(x+y)(g(x)-g(y))=(x-y)g(x+y),$$

og fáum

$$(x+1)g(x)=(x-1)g(x+1).$$

Ef við setjum svo $y=-1$ og $x=x+1$ í fallajöfnuna fæst

$$xg(x+1)=(x+2)g(x),$$

en þá fáum við

$$x(x+1)g(x)=x(x-1)g(x+1)=(x+2)(x-1)g(x),$$

fyrir öll $x\in\mathbb{R}$, sem fær ekki staðist nema g sé núllfallið.

Dæmi 15 (A). Finnið öll föll $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, þannig að

$$f(x^2+xy+f(y))=f(x)^2+xf(y)+y,$$

fyrir öll $x\in\mathbb{R}$.

Lausn. Setjum $x = 0$ og fáum $f(f(y)) = f(0)^2 + y$. Af þessu sést að f er eintækt og átækt (aðferð 3). Það er því til nákvæmlega ein tala $a \in \mathbb{R}$ þannig að $f(a) = 0$. Setjum $x = y = a$ og fáum $f(2a^2) = a$ sem gefur $f(0)^2 + 2a^2 = 0$, þannig að $f(0) = a = 0$. Sér í lagi fæst að $f(f(y)) = y$.

Ef við setjum $y = 0$ fæst nú $f(x^2) = f(x)^2$ og með því að setja $x = -x$ fæst $f(x)^2 = f(-x)^2$ og þar sem f er eintækt fæst $f(-x) = -f(x)$.

Með því að setja $y = -x$ fæst nú $f(x)(f(x) - x) = 0$ og þar sem $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ fæst að $f(x) = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Dæmi 16 (E). Finnið öll föll $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ þannig að fyrir öll $a, b \in \mathbb{N}$ er til þríhyrningur (þar sem summa tveggja hliða er stranglega stærri en þriðja hliðin) með hliðarlengdir a, $f(b)$ og $f(b + f(a) - 1)$.

Lausn. Athugum fyrst að f er augljóslega ótakmarkað fall, því annars væru hliðarnar $f(b)$ og $f(b+f(a)-1)$ takmarkaðar á meðan hliðin a er ótakmörkuð. Setjum nú $a = 1$ og fáum að til sé þríhyrningur með hliðarlengdir 1, $f(b)$ og $f(b+f(1)-1)$. Það þýðir að $1+f(b) > f(b+f(1)-1) > f(b)-1$ fyrir öll $b \in \mathbb{N}$ og þar með að $f(b) = f(b+f(1)-1)$. Ef $f(1) \neq 1$ þá er fallið f lotubundið með lotuna $f(1) - 1$, en þá yrði f augljóslega að vera takmarkað sem er mótsögn. Því er $f(1) = 1$.

Setjum nú $b = 1$ og fáum að til er þríhyrningur með hliðarlengdir a, 1 og $f(f(a))$ og því er $f(f(a)) = a$ fyrir öll $a \in \mathbb{N}$. Sér í lagi er f því eintækt og átækt.

Setjum nú $f(2) = k$. Þá fáum við með því að setja $a = 2$ og $b = k$ að $2+2 > f(2k-1)$ og þar sem $2k - 1 \neq k$ og f er eintækt fæst að $f(2k - 1) = 3$. Setjum þá $a = 2$ og $b = 2k - 1$ og fáum $2 + 3 > f(3k - 2)$, en þar sem $3k - 2 \neq 2k - 1 \neq k$ og f er eintækt fæst að $f(3k - 2) = 4$. Nú fæst almennt að $f(nk - (n - 1)) = n + 1$ og þar sem $f(f(n)) = n$ fæst að $f(n + 1) = n(k - 1) + 1$, fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Þar sem f er átækt fall fáum við því að $k = 2$, svo að $f(2) = 2$.

Gerum nú ráð fyrir að $f(n) = n$ fyrir öll $n \in \{1, 2, \dots, m\}$. Setjum þá $a = m$ og $b = 2$ og fáum $m+2 > f(m+1)$ og þar sem f er eintækt fáum við að $f(m+1) = m+1$ svo $f(n) = n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ (aðferð 2). Einfalt er að ganga úr skugga um að fallið $f(n) = n$ uppfyllir skilyrði dæmisins.

3 Óleyst dæmi

Hér fyrir neðan eru nokkur dæmi sem lesandinn getur spreytt sig á og eru svipað erfið og sýnidæmin hér á undan.

1. Finnið öll föll $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$, þannig að $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$.

2. Finnið öll föll $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, þannig að $f(0) = 1$ og $f(f(n)) = f(f(n+2)+2) = 2$.

3. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að $f((x-y)^2) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2$.

4. Látum $n \in \mathbb{N}$. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að $f(x + f(y)) = f(x) + y^n$.

5. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að $f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$.

6. Finnið öll föll $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, þannig að $f(f(m) + f(n)) = m + n$.

7. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

8. Látum $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ vera stranglega vaxandi fall þannig að $f(f(n)) = 3n$. Hvað er $f(2006)$?

9. Látum $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vera fall þannig að $|f(x)| \leq 1$ og
$$f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7}).$$
Sannið að f er lotubundið (að til sé tala $a \in \mathbb{R}$ þannig að $f(x + a) = f(x)$, fyrir öll $x \in \mathbb{R}$).

10. Finnið öll föll $f : \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Q}^+$ ($\mathbb{Q}^+$ er mengi jákvæðra ræðra talna), þannig að
$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, \quad \text{fyrir öll } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

11. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$.

12. Látum $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vera vaxandi fall þannig að fyrir allar jákvæðar tölur x og y gildir
$$f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x))).$$
Sannið að $f(f(x)) = x$.

13. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$.

14. Látum S vera mengi allra rauntalna sem eru strangt stærri en -1. Finnið öll föll $f : S \mapsto S$ sem uppfylla eftirfarandi tvö skilyrði:
(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$,
(ii) $\frac{f(x)}{x}$ er stranglega vaxandi á bilinum $-1 < x < 0$ og $0 < x$.

15. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að
$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

16. Finnið öll gildi á α þannig að til sé nákvæmlega eitt fall $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, þannig að $f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha y$.

17. Finnið lægsta mögulega gildið á $f(1998)$ þar sem $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ uppfyllir $f(n^2 f(m)) = mf(n)^2$.

18. Er til fall $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, þannig að $f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$.

19. Gerum ráð fyrir að fallið $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ uppfylli $f(n+1) > f(f(n))$, fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Sannið að $f(n) = n$, fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

20. Finnið öll föll $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ sem uppfylla eftirfarandi tvö skilyrði
    (i) $2f(n^2 + m^2) = f(n)^2 + f(m)^2$,
    (ii) Ef $m \geq n$, þá er $f(m^2) \geq f(n^2)$.

21. Látum $k \in \mathbb{N}$. Finnið öll föll $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ þannig að $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k$, fyrir öll $n \in \mathbb{N}_0$.

22. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy.$$

23. Fallið $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uppfyllir $f(x^3 + y^3) = (x+y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2)$, fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$. Sannið að $f(1996x) = 1996f(x)$, fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

24. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sem uppfylla eftirfarandi tvö skilyrði
    (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
    (ii) $f(\frac{1}{x}) = \frac{f(x)}{x^2}$.

25. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að fyrir allar rauntölur $x \neq y$ gildir

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)}.$$

26. Finnið öll föll $f : \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Q}^+$ sem uppfylla eftirfarandi tvö skilyrði
    (i) $f(x + 1) = f(x) + 1$,
    (ii) $f(x^3) = f(x)^3$.

27. Finnið öll föll $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ þannig að $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$.

28. Sannið að ekki sé til fall $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sem uppfyllir $f(y) > (y - x)f(x)^2$, fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$.

29. Sannið að ekki sé til fall $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að $f(0) > 0$ og $f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x))$.

30. Finnið öll föll $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að til sé stranglega einhalla fall $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$ gildir $f(x+y) = f(x)u(y) + f(y)$.

31. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ þannig að $f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$.

32. Fall $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ uppfyllir
    (i) $f(1) = 1$ og $f(3) = 3$,
    (ii) $f(2n) = f(n)$,
    (iii) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$ og $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$,
    fyrir allar $n \in \mathbb{N}$. Finnið allar tölur $n \leq 2010$ þannig að $f(n) = n$.

33. Finnið öll föll $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ sem uppfylla

$$f(x,x) = x, \quad f(x,y) = f(y,x) \quad \text{og} \quad f(x,y)(x+y) = yf(x, x+y).$$