Viðauki E: Rúmfræði

Inngangur

Við gefum hér óformlega lýsingu á rúmfræði Evklíðs, en það er sú rúmfræði sem við teljum okkur skynja af umhverfinu í okkar daglega lífi. Við látum okkur nægja að safna saman skilgreiningum á algengustu hugtökum og að nefna helstu niðurstöður en bendum lesandanum á aðra texta vilji hann kafa dýpra.

1 Punktar, línur og sléttur

Grunnhugtök rúmfræðinnar eru *punktar*, *línur* og *sléttur*. Punkta táknum við með upphafsstöfum á borð við A, B og P, línur með lágstöfum á borð við l, m og n en sléttur með grískum lágstöfum eins og α, β og γ.

Punktar *liggja* á línum og línur *liggja* í sléttum. Segjum einnig að punktur á línu í gefinni sléttu *liggi* í sléttunni. Gegnum tvo ólíka punkta liggur nákvæmlega ein lína og gegnum þrjá ólíka punkta sem liggja ekki allir á sömu línunni liggur nákvæmlega ein slétta. Ef tvær ólíkar línur hafa sameiginlegan punkt, þá segjum við að línurnar *skerist* í punktinum. Þar sem að í gegnum tvo ólíka punkta liggur nákvæmlega ein lína er ljóst að tvær ólíkar línur geta aðeins skorist í einum punkti, annars væru þær sama línan.

Tvær línur l og m sem liggja í sömu sléttu en skerast ekki kallast *samsíða*, táknað $l \| m$. Segjum jafnframt að lína sé samsíða sjálfri sér. Ef línan l er samsíða línunum m og n, þá eru línurnar m og n einnig samsíða. Fyrir gefna línu og punkt utan hennar liggur nákvæmlega ein lína gegnum punktinn sem er samsíða gefnu línunni.

Ef tvær ólíkar sléttur hafa sameiginlega línu, þá segjum við að þær *skerist*. Þar sem þrír ólíkir punktar sem liggja ekki allir á sömu línunni ákvarða nákvæmlega eina sléttu, þá hafa tvær ólíkar sléttur sem skerast nákvæmlega eina sameiginlega línu, annars væru þær sama sléttan. Ef lína og slétta hafa sameiginlegan punkt, þá annað hvort liggur línan í sléttunni eða hefur nákvæmlega einn skurðpunkt við sléttuna.

Lína eða slétta er *samsíða* gefinni sléttu ef þær skerast ekki. Tvær sléttur sem eru samsíða þriðju sléttunni eru samsíða hvor annarri. Gegnum punkt utan við gefna sléttu liggur nákvæmlega ein slétta samsíða gefnu sléttunni.

Gefinn punktur á línu skiptir henni í tvær *hálflínur*. Alla punkta á annarri hálflínunni segjum við liggja *sömu megin* við gefna punktinn. Tvo punkta sem liggja hvor á sinni hálflínunni segjum við vera *hvorn sínu megin* við gefna punktinn. Eini punkturinn sem liggur á báðum hálflínunum er gefni punkturinn.

Tveir punktar á línu skipta henni í tvær hálflínur og *strik*. Strikið milli punktanna A og B táknum við með AB. Við gerum ráð fyrir að sérhverju striki megi úthluta jákvæðri rauntölu $|AB|$ sem við köllum *lengd* striksins og við gerum ráð fyrir að þetta megi gera á þann hátt að ef A, B, C eru þrír punktar á sömu línu þannig að punkturinn B liggi á milli punktanna A og C, það er B liggi á strikinu AC, þá sé $|AB| + |BC| = |AC|$. Við gerum jafnframt ráð fyrir að fyrir sérhverja jákvæða rauntölu x, línu l og punkt P á l megi finna nákvæmlega tvö strik af lengd x á línunni l þannig að annar endapunktur striksins sé P en hinir endapunktarnir liggi hvor sínu megin við P. Punkt P köllum við einnig strik af lengd 0.

Línur skipta sléttum í tvær *hálfsléttur*. Tvo punkta í sléttu sem liggja ekki á gefinni línu segjum við liggja *hvorn sínu megin* við línuna ef þeir eru ekki í sömu hálfsléttunni sem línan ákvarðar, en að þeir séu *sömu megin* línunnar ef þeir liggja í sömu hálfsléttunni.

Að lokum skipta sléttur rúminu í tvö *hálfrúm*. Líkt og fyrir línur og sléttur segjum við að tveir punktar séu *sömu megin* eða *hvor sínu megin* við sléttuna ef þeir tilheyra sama eða hvor sínum hluta rúmsins.

Ef tveir punktar liggja á sömu hálflínunni, hálfsléttunni eða í sama hálfrúminu, þá liggur allt strikið milli þeirra á hálflínunni, í hálfsléttunni eða hálfrúminu. Ef hinsvegar tveir gefnir punktar liggja hvor sínu megin við punkt, línu eða sléttu, þá liggur strikið milli gefnu punktanna í gegnum punktinn, línuna eða sléttuna.

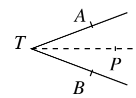
2 Hringir

Hugsum okkur nú að við séu stödd í einhverri tiltekinni sléttu. Punktur O og strik AB ákvarða *hring* en punktur P er á hringnum þá og því aðeins að lengd striksins OP sé sú sama og lengd AB. Við köllum punktinn O *miðpunkt* hringsins og töluna $|AB|$ *geisla* hans. Sérhvert strik OP þar sem P liggur á hringnum köllum við einnig geisla í hringnum.

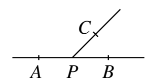
Hringur með miðpunkt O og geisla r skiptir sléttunni í þrjá hluta. Einn þeirra eru þeir punktar P sem liggja á hringnum, en um þá gildir að $|OP| = r$. Hinar tvær deildirnar eru þeir punktar sem eru *innan í* hringnum, en um þá gildir að $|OP| < r$, og svo þeir punktar sem eru *utan við* hringinn, en um þá gildir að $|OP| > r$.

Ef l er lína sem hefur punkt sem liggur innan í gefnum hring, þá sker hún hringinn í tveimur ólíkum punktum. Línan kallast þá *sniðill* við hringinn. Tveir ólíkir punktar á hring ákvarða sniðil og strikið á milli þeirra, sem liggur innan í hringnum, köllum við *streng* í hringnum. Ef miðpunktur hringsins liggur á strengnum, þá köllum við hann *miðstreng* hringsins. Lína l sem hefur nákvæmlega einn punkt sameiginlegan með hring kallast *snertill* við hringinn. Gegnum punkt á hring liggur nákvæmlega einn snertill og gegnum punkt utan við hring liggja nákvæmlega tveir snertlar við hringinn.

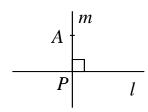
3 Horn



Tvær hálflínur út frá sama punkti T ákvarða *horn* með *topppunkt* T og hálflínurnar köllum við *arma* hornsins. Ef punktarnir A og B liggja hvor á sínum armi hornsins, þá táknum við hornið með $\angle ATB$. Ljóst er að horn skiptir sléttunni í tvo hluta. Við segjum að þeir punktar sem liggja í sama hluta og strikið AB séu *innan í* horninu, en hinir *utan við* það. Hornin $\angle ATB$ og $\angle A'T'B'$ eru jafn stór ef af $|AT| = |A'T'|$ og $|BT| = |B'T'|$ leiðir að $|AB| = |A'B'|$. Ef P er punktur innan í horninu $\angle ATB$ þannig að $\angle ATP = \angle BTP$, þá köllum við hálflínuna út frá T í gegnum P *helmingalínu* hornsins $\angle ATB$.



Ef punktarnir A og B liggja hvor sínu megin við punktinn P á gefinni línu l, þá kallast hornið $\angle APB$ *beint* horn. Ef C er punktur utan línunnar l, þá köllum við hornin $\angle APC$ og $\angle BPC$ *grannhorn*. Segjum einnig að $\angle BPC$ sé grannhorn hornsins $\angle APC$. Ef horn er jafn stórt grannhorni sínu, þá köllum við það *rétt* horn. Sérhver tvö rétt horn eru jafn stór.

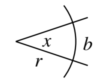


Ef tvær línur l og m skerast undir réttu horni, þá segjum við að þær séu *hornréttar* hvor á aðra, táknað $l \perp m$. Segjum þá einnig að m sé *þverill* á línuna m. Fyrir gefinn punkt A og gefna línu l er til nákvæmlega einn þverill á l sem liggur í gegnum punktinn A. Skurðpunktur línunnar og þverilsins kallast *fótpunktur* þverilsins. Lína l er þverill með fótpunkt P á gefna sléttu ef l er hornrétt á sérhverja línu sem liggur í sléttunni gegnum punktinn P. Fjarlægð punkts A frá línu l eða sléttu α er lengd striksins AP þar sem P er fótpunktur þverilsins á línuna l, eða sléttuna α, í gegnum A.

Fótpunkt þverils gefins punkts á línu eða sléttu köllum við einnig *ofanvarp* gefna punktsins. Hornið milli sléttu og línu sem sker sléttuna í punkti P er hornið $\angle APB$ þar sem A er punktur á línunni og B er ofanvarp hans á sléttuna. Með horninu milli tveggja slétta sem skerast í línu meinum við hornið milli þeirra þverla skurðlínunnar í gefnum punkti P sem liggja hvor í sinni sléttunni.

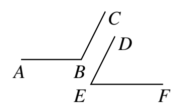
Ef M er punktur á strikinu AB þannig að $|AM| = |BM|$, þá kallast M *miðpunktur* striksins og þverillinn á AB með fótpunkt M kallast *miðþverill* striksins.

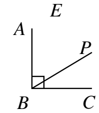
Við mælum stærð horna ýmist í *gráðum* eða með *bogamáli*. Fyrir gefið horn $\angle ABC$ drögum við hring með miðpunkt B. Við skiptum hringnum í 360 jafn stóra boga sem við köllum gráður og táknum með $^\circ$. Fjöldi gráða sem lendir innan í horninu er þá gráðutal þess. Sjáum að stærð beins horns er 180° og stærð rétts horns er þá 90°.



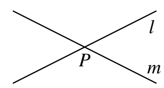
Við skilgreinum bogamál hornsins $\angle ABC$ með eftirfarandi hætti: Drögum hring með miðpunkt B. Hlutfallið milli lengdar bogans, b, sem lendir innan í horninu $\angle ABC$ og geisla hringsins, r, er bogamál hornsins. Bogamálið er þá talan $x = b/r$. Þetta hlutfall er óháð hvaða hring við veljum og skilgreiningin því skynsamleg. Þar sem ummál hrings með geisla 1 er 2π, þá sjáum við að bogamál $180°$ horns er π og bogamál $90°$ horns er $\pi/2$. Almennt er sambandið milli gráðutals, g, og bogamáls horns, x, gefið með

$$\frac{g}{180} = \frac{x}{\pi}.$$



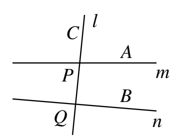


Summa grannhorna er alltaf $180°$, en hugtakið um grannhorn hefur náskylt hugtak, nefnilega *frændhorn*. Við segjum að hornin $\angle ABC$ og $\angle DEF$ séu frændhorn ef $\angle ABC + \angle DEF = 180°$. Ef P er punktur innan í réttu horni $\angle ABC$, þá kallast hornin $\angle ABP$ og $\angle CBP$ *lagshorn*. Summa lagshorna er alltaf $90°$. Horn sem er minna en $90°$ kallast *hvasst* en horn sem er stærra en $90°$ kallast *gleitt*.



Ef línurnar l og m skerast í punkti P, þá gera þær fjögur horn. Sérhver tvö horn sem hafa sameiginlegan arm eru grannhorn, en þau sem hafa ekki sameiginlegan arm kallast *topphorn*. Af þeirri staðreynd að summa grannhorna er ætíð sú sama leiðir eftirfarandi setning:

3.1 Setning. *Topphorn eru jafn stór.*



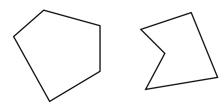
Ef l, m og n eru línur þannig að l og m skerast í punkti P og l og n skerast í punkti Q sem er ólíkur P, þá gerir l fjögur horn við m og fjögur horn við n. Ef A og B eru punktar á m og n sem liggja sömu megin við línuna l og C er punktur á l sem liggur ekki á strikinu PQ, þá segjum við að hornin $\angle APC$ og $\angle BQC$ *liggi eins* eða séu *einslæg*. Sjáum að l gerir fjögur pör af einslægum hornum við línurnar m og n.

3.2 Setning. *Einslæg horn við samsíða línur eru jafn stór.*

3.3 Athugasemd. Sú rúmfræði sem við höfum verið að lýsa er kennd við forngrikkjann Evklíð. Ein af frumsendum hennar er að í gegnum punkt utan gefinnar línu liggi nákvæmlega ein lína samsíða gefnu línunni, en sú forsenda er jafngild setningunni um að einslæg horn við samsíða línur séu jafn stór. Þessa frumsendu vildu margir ekki sætta sig við að þyrfti að taka sem gefna og í gegnum aldirnar reyndu menn að sanna hana út frá hinum forsendunum. Það er skemmst frá því að segja en allar slíkar tilraunir báru engan árangur. Með því að neita forsendunni og gera ráð fyrir að til væri lína og punktur utan hennar sem liggur á tveimur ólíkum línum sem ekki skera gefnu línuna, (sem reyndar er jafngilt, að hinum frumsendunum gefnum, að í gegnum sérhvern punkt utan hvaða línu sem er liggi að minnsta kosti tvær línur sem skera ekki gefnu línuna,) vonuðust menn til að fá mótsögn. En í stað þess þá komu í ljós nýjar gerðir af rúmfræði og þar með var sannað að frumsendan um samsíða línur yrði ekki leidd af hinum frumsendunum.

4 Marghyrningar

Ef $A_1, A_2, \dots, A_n$ eru n ólíkir punktar í sléttu, þá segjum við að runan $A_1A_2 \cdots A_n$ sé n-hyrningur með hornpunkta $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ekki skiptir máli hvar við byrjum á að telja upp hornpunkta marghyrningsins svo framarlega sem við höldum ákveðinni umferðarstefnu við upptalninguna. Þannig eru marghyrningarnir $A_1A_2 \cdots A_n$, $A_2A_3 \cdots A_nA_1$ og $A_nA_{n-1} \cdots A_2A_1$ allt sami marghyrningurinn.

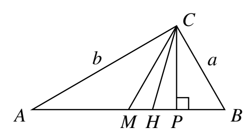


Strikin $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ milli tveggja aðlægra hornpunkta köllum við *hliðar* marghyrningsins en öll önnur strik milli hornpunkta hans *hornalínur*. Tvær hliðar sem hafa sameiginlegan hornpunkt köllum við *aðlægar*. Ef allir hornpunktar marghyrningsins liggja innan í eða á örmum allra hornanna $\angle A_nA_1A_2, \angle A_1A_2A_3, \dots, \angle A_{n-1}A_nA_1$ þá kallast marghyrningurinn *kúptur* eða *úthyrndur* og ofantalin horn kallast *horn marghyrningsins*. Við skrifum oft $\angle A_k$ í stað $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$.

Kúptur marghyrningur er *reglulegur* ef allar hliðar hans eru jafn langar og öll horn hans jafn stór.

4.1 Þríhyrningar

Ef ABC er þríhyrningur, þá köllum við hliðarnar AB og BC *aðlægar* hliðar hornsins $\angle B = \angle ABC$ og hliðina AC *mótlæga* hlið þess. Við táknum oftast lengd mótlægrar hliðar $\angle B$ með b o.s.frv.



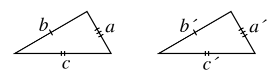
Hæðin á hliðina AB er strikið CP þar sem P er fótpunktur þverilsins á AB í gegnum C. Táknum lengd hennar oft með h_C og segjum að hún sé hæðin á *grunnhliðina* AB. *Miðstrik* á AB er strikið CM þar sem M er miðpunktur AB. *Helmingastrik* hornsins $\angle ACB$ er strikið CH þar sem H er skurðpunktur helmingalínu hornsins $\angle ACB$ við hliðina AB.

4.1 Setning. *Miðstrik [helmingastrik] þríhyrnings skerast öll í sama punktinum. Einnig skerast miðþverlar hliða þríhyrnings allir í sama punkti og sömu leiðis línurnar sem hæðir þríhyrningsins liggja í.*

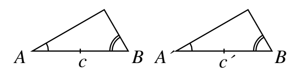
4.2 Setning. *Miðstrik þríhyrnings skipta hvert öðru í hlutföllunum* $1:2$.

Tveir þríhyrningar ABC og $A'B'C'$ eru *eins* ef eitt af eftirtöldum jafngildu skilyrðum er fullnægt:

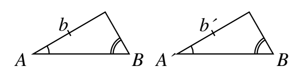
(1) $a = a'$, $b = b'$ og $c = c'$.
(Allar hliðar eins.)



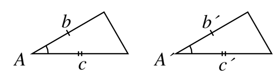
(2) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ og $c = c'$.
(Ein hlið og aðlæg horn eins.)



(3) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ og $b = b'$.
(Ein hlið og aðlægt og mótlægt horn eins.)



(4) $\angle A = \angle A'$, $b = b'$ og $c = c'$.
(Eitt horn og aðlægar hliðar eins.)



Þríhyrningur ABC er *jafnarma* með *topphorn* $\angle A$ ef $b = c$. Þríhyrningur ABC er *jafnhliða* ef $a = b = c$.

4.3 Setning. *Ef þríhyrningurinn ABC er jafnarma, þá er $\angle B = \angle C$. Ef þríhyrningurinn ABC er jafnhliða, þá er $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. Jafnarma þríhyrningur með $60°$ topphorn er jafnhliða. Helmingastrik topphorns jafnarma þríhyrnings, hæðin á mótlæga hlið topphornsins og miðstrik mótlægrar hliðar topphornsins eru allt eitt og sama strikið.*

4.4 Setning. *Ef P er punktur á miðþverli striksins AB, þá er $|AP| = |BP|$. Ef P er punktur á helmingalínu hornsins $\angle ATB$, þá er fjarlægð P frá báðum örmum hornsins sú sama.*

Við segjum að hringur sé *innritaður* í þríhyrning ABC ef allar hliðar hans eru snertlar hringsins. Segjum að þríhyrningur ABC sé *innritaður* í hring ef hornpunktar hans liggja á hringnum. Tölum þá einnig um *umritaðan* hring þríhyrningsins.

4.5 Setning. *Sérhver þríhyrningur hefur bæði innritaðan og umritaðan hring. Miðja umritaðs hrings er skurðpunktur miðþverla hliðanna en miðja innritaðs hrings er skurðpunktur helmingastrikanna.*

Þríhyrningur er *rétthyrndur* ef eitt horna hans er rétt eða $90°$.

4.6 Setning. (Regla Pýþagorasar) *Þríhyrningur ABC er rétthyrndur með rétt horn í C þá og því aðeins að $c^2 = a^2 + b^2$.*

Af reglu Pýþagorasar leiðir að mótlæg hlið rétta hornsins í rétthyrndum þríhyrningi er alltaf lengst. Við köllum hana því *langhlið* þríhyrningsins en hinar hliðarnar *skammhliðar*. Tökum sérstaklega eftir að regla Pýþagorasar segir ekki einungis að summa ferninga skammhliðanna í rétthyrndum þríhyrningi sé jöfn ferningi langhliðarinnar, heldur einnig að ef svo er, þá er þríhyrningurinn rétthyrndur.

4.7 Setning. *Hornasumma þríhyrnings er* $180°$. *Hornasumma n-hyrnings er* $(n-2)\cdot 180°$.

4.8 Setning. *Summa tveggja horna í þríhyrningi er jöfn grannhorni þriðja hornsins.*

Þríhyrningar ABC og $A'B'C'$ eru *einslaga* ef eitt af eftirfarandi jafngildu skilyrðum er fullnægt:

(1) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ og $\angle C = \angle C'$. (Öll horn jafn stór.)

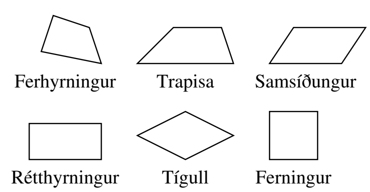
(2) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. (Sömu hlutföll milli allra hliða.)

(3) $\angle A = \angle A'$ og $\angle B = \angle B'$. (Tvö horn jafn stór.)

(4) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ og $\angle C = \angle C'$. (Sömu hlutföll milli aðlægra hliða eins horns.)

4.2 Ferhyrningar

Ferhyrningur $ABCD$ þannig að mótlægu hliðarnar AB og CD eru samsíða kallast *trapisa*. Ef hliðarnar BC og AD eru einnig samsíða kallast hann *samsíðungur*.



4.9 Setning. *Ferhyrningur er samsíðungur þá og því aðeins að mótlæg horn hans eru jafn stór sem aftur gildir þá og því aðeins að mótlægar hliðar hans séu jafn langar.*

Samsíðungur þannig að eitt, og þar með öll, horn hans eru rétt kallast *rétthyrningur* en samsíðungur þannig að allar hliðar hans eru jafn langar kallast *tígull*. Reglulegur ferhyrningur kallast svo *ferningur*.

5 Horn við hring

Horn með topppunkt sinn á gefnum hring köllum við *ferilhorn* ef armar hornsins eru sniðlar við hringinn. Við segjum að hornið *spanni* bogann sem er innan í horninu.

5.1 Setning. *Snertill við hring er hornréttur á geislann OP þar sem O er miðpunktur hringsins og P er snertipunkturinn.*

5.2 Setning. *Ferilhorn sem spanna sama boga eru jafn stór. Stærð ferilhorns er helmingur bogans sem það spannar.*

5.3 Fylgisetning. *Miðpunktur umritaðs hrings rétthyrnds þríhyrnings er miðpunktur langhliðarinnar.*

5.4 Setning. *Ef $\angle ABC$ er horn þannig að armar þess snerti hring í punktunum A og C, þá er $|AB| = |BC|$ og stærð hornsins $\angle ABC$ er helmingur mismunar boganna milli A og C.*

5.5 Setning. *Ef armar hornsins $\angle ABC$ eru sniðlar við hring, þá er stærð hornsins helmingur mismunar boganna sem það spannar.*

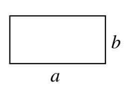
5.6 Setning. *Ef topppunktur horns liggur innan í hring, þá er stærð þess meðaltal boganna sem það og topphorn þess spannar.*

5.7 Setning. *Ferhyrning er hægt að umrita með hring þá og því aðeins að summa mótlægra horna sé $180°$.*

6 Ummál, flatarmál og rúmmál

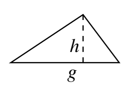
Flatarmál (F), rúmmál (R) og ummál (U) nokkurra flatar- og rúmmynda er eins og sýnt er á myndunum.

Rétthyrningur



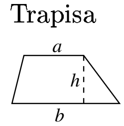
$F = ab$

Þríhyrningur



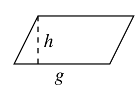
$F = \frac{1}{2}gh$

Trapisa



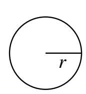
$F = \frac{1}{2}(a+b)h$

Samsíðungur



$F = gh$

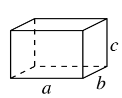
Hringur



$U = 2\pi r$

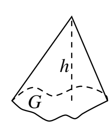
$F = \pi r^2$

Kassi



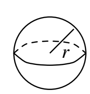
$R = abc$

Keila



$R = \frac{1}{3}Gh$

Kúla



$F = 4\pi r^2$

$R = \frac{4}{3}\pi r^3$

7 Hornaföll

Látum ABC vera rétthyrndan þríhyrning með rétt horn í C. Af setningunni um einslaga þríhyrninga leiðir að fyrir gefna stærð á $\angle A$ eru hlutföllin b/c, a/c og a/b óháð stærð þríhyrningsins og því getum við skilgreint föllin cos, sin og tan fyrir $0 < \angle A < \pi/2$ með því að setja

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\text{aðlæg skammhlið } A}{\text{langhlið}},\\ \sin A &= \frac{\text{mótlæg skammhlið } A}{\text{langhlið}},\\ \tan A &= \frac{\text{mótlæg skammhlið } A}{\text{aðlæg skammhlið } A} = \frac{\sin A}{\cos A}.\end{aligned}$$

Við útvíkkum svo skilgreininguna með því að setja $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ og

$$\cos x = -\cos(\pi - x), \qquad \sin x = \sin(\pi - x), \qquad \text{fyrir } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

Með því að beita setningu Pýþagorasar á rétthyrndan þríhyrning með langhlið af lengd 1 fáum við að:

7.1 Setning. *Fyrir öll x gildir að $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.*

7.2 Setning. (Kósínusregla) *Ef ABC er þríhyrningur, þá er*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

7.3 Setning. (Sínusregla) *Ef ABC er þríhyrningur og R er geisli umritaðs hrings hans, þá er*

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

7.4 Setning. *Í þríhyrningi er stærsta hornið gegnt stærstu hliðinni.*

7.5 Setning. *Flatarmál þríhyrningsins ABC er $\frac{1}{2}ab\cos C$.*